Omotopia

X, Y spazi topologici, $I = [0, 1]$.

Def. Un'*omotopìa* da X a Y è un'applicazione continua $H\colon X \times I \to Y$.

$H\colon X \times I \to Y \rightsquigarrow h_s\colon X \to Y$, $h_s(x) := H(x, s)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, s \in I$.

N. B. Assumeremo *continue* tutte le applicazioni tra spazi topologici.

Def. $f, g\colon X \to Y$ sono *omòtope* se $\exists\, H\colon X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$ e $h_1 = g$. Se f e g sono omotope scriviamo $f \simeq g$.

Oss. $f \simeq g \Leftrightarrow \exists\, H\colon X \times I \to Y$ t.c. $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$. Durante l'omotopia f si "deforma" in g in modo continuo.

Oss. Un'omotopia $H\colon X \times I \to Y$ è un cammino nello spazio delle applicazioni continue $C(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ continua}\}$.

Def. $f, g\colon X \to Y$ sono *omotope relativamente ad* $A \subset X$ se $f|_A = g|_A$ e $\exists\, H\colon X \times I \to Y$ t.c. $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_s|_A = f|_A$, $\forall\, s \in I$.
Scriviamo $f \simeq_A g$ oppure $f \simeq g$ (rel A).

Oss. $f \simeq_A g \Leftrightarrow \exists\, H\colon X \times I \to Y$ t.c. $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$, $\forall\, x \in X$, e $H(x, s) = f(x)$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, s \in I$.
Durante l'omotopia relativa f si "deforma" in g senza modifiche su $A \subset X$.

Oss. Per le omotopie possiamo considerare le operazioni tra cammini.
(*1*) $f : X \to Y \rightsquigarrow H : X \times I \to Y$, $H(x, s) = f(x)$ *omotopia costante.*

(*2*) $H\colon X \times I \to Y \rightsquigarrow \bar{H}\colon X \times I \to Y$ *omotopia inversa*

$$\bar{H}(x, s) \overset{\text{def}}{=} H(x, 1 - s).$$

(*3*) $H, K : X \times I \to Y$ t.c. $h_1 = k_0 : X \to Y \rightsquigarrow$

$$H \cdot K : X \times I \to Y \quad \textit{concatenazione di } H \textit{ e } K$$

$$(H \cdot K)(x, s) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} H(x, 2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ K(x, 2s - 1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Oss. $\simeq$ e $\simeq_A$ sono relazioni d'equivalenza su $C(X, Y)$.

Oss. $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1 : X \to Y$ e $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1 : Y \to Z \Rightarrow g_0 \circ f_0 \overset{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$
($\simeq$ è *compositiva*) $H(x, s) = G(F(x, s), s)$.

Def. $f : X \to Y$ è un'*equivalenza omotopica* tra X e Y se $\exists\, g : Y \to X$ t.c. $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ e $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Una tale g è detta *inversa omotopica* di f.

N. B. L'inversa omotopica se esiste non è necessariamente né unica, né iniettiva, né suriettiva.

Def. Diciamo che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* o che *hanno lo stesso tipo d'omotopia* se $\exists\, f : X \to Y$ equivalenza omotopica, $X \simeq Y$.

Oss. $f : X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow$ f equivalenza omotopica con inversa omotopica $f^{-1} : Y \to X$. Quindi $X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$.

Oss. L'equivalenza omotopica è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici, più debole dell'omeomorfismo.

N. B. Indicheremo un punto che non vogliamo specificare con $*$ e uno spazio puntiforme con $\{*\}$.

Def. Uno spazio top. è *contraibile* se ha il tipo d'omotopia di un punto.

Oss. In altre parole X contraibile $\Leftrightarrow X \simeq \{*\}$.

Prop. X *contraibile* $\Leftrightarrow \mathrm{id}_X \simeq$ *costante.*

In inglese un'applicazione omotopa a costante è detta *null-homotopic*.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $j : X \to \{*\}$ equivalenza omotopica, $i : \{*\} \to X$ inversa omotopica di $j \Rightarrow c := i \circ j \simeq \mathrm{id}_X$ e $c : X \to X$ costante.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, c : X \to X$ costante, $c(x) = *, \forall\, x \in X$, t.c. $\mathrm{id}_X \simeq c \rightsquigarrow i : \{*\} \to X$, $i(*) = *$, $j : X \to \{*\} \Rightarrow j \circ i = \mathrm{id}_{\{*\}}$, $i \circ j = c \simeq \mathrm{id}_X \Rightarrow j$ equivalenza omotopica $\Rightarrow X \simeq \{*\}$. $\square$

Esempio. $U \subset \mathbf{R}^n$ convesso $\Rightarrow U$ contraibile: scegliamo $a \in U \rightsquigarrow$
$H : U \times I \to U$, $H(x, s) = (1 - s)x + sa \Rightarrow h_0 = \mathrm{id}_U$, $h_1 = a$.
Quindi $\mathbf{R}^n$, B^n e I^n sono contraibili.

Prop. X *contraibile* $\Rightarrow X$ *connesso per archi.*

Dim. $H : X \times I \to X$ t.c. $h_0 = x_0$ costante e $h_1 = \mathrm{id}_X$. $\forall\, x \in X \rightsquigarrow \gamma_x : I \to X$, $\gamma_x(t) = H(x, t) \Rightarrow \gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x \Rightarrow X$ cpa. $\square$

Def. $r : X \to A$ è una *retrazione* continua se $A \subset X$ e $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Def. $H : X \times I \to X$ *(retrazione per) deformazione forte* (risp. *debole*) di X su $A \subset X$ se:

(1) $h_0 = \mathrm{id}_X$

(2) $h_s|_A = \mathrm{id}_A$, $\forall\, s \in I$ (risp. per $s = 1$)

(3) $h_1(X) = A$.

X si retrae per deformazione su A e scriviamo $X \searrow A$ se $\exists\, H$ deformazione.

Esempio. Nell'esempio precedente H è retrazione per deformazione forte del convesso U su un suo punto.

Oss. H deformazione di X su $A \Rightarrow r := h_1| : X \to A$ retrazione.

Oss. X contraibile $\Leftrightarrow X$ ammette deformazione debole su un punto.

Oss. $X \searrow A \Rightarrow i_A : A \overset{\simeq}{\hookrightarrow} X$ ha inversa omotopica $r : X \overset{\simeq}{\to} A \Rightarrow X \simeq A$.