Capitolo 7

Applicazioni lineari

7.1 Definizione di applicazione lineare e prime proprietà

Definizione 7.1.1. Siano V e V' due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Una **applicazione lineare da V in V'** è una funzione $f : V \to V'$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- (AL1) **additività:** $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$**, per ogni** $v_1, v_2 \in V$;
- (AL2) **omogeneità:** $f(c \cdot v) = c \cdot f(v)$**, per ogni** $c \in \mathbb{K}$ **e per ogni** $v \in V$.

Una applicazione lineare da V in V:

$$f : V \to V$$

è anche detta **endomorfismo** o anche **operatore lineare di** V.

Una applicazione lineare **biettiva** $f : V \to V'$ si dice **isomorfismo**.

Osservazione 20. Si osservi che nella proprietà (AL1), la somma v_1+v_2 è quella in V , mentre $f(v_1) + f(v_2)$ è la somma dei vettori $f(v_1)$ e $f(v_2)$ in V'. Analogamente, in (AL2), $c \cdot v$ è il prodotto del vettore v per lo scalare c in V, mentre $c \cdot f(v)$ è il prodotto dello scalare c per il vettore $f(v)$ in V'. Per questo motivo si dice anche che una applicazione lineare $f : V \to V'$ **rispetta le operazioni di somma e di prodotto per scalari** di V e V'.

Osservazione 21. Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Allora si ha:

1. $f(0_V) = 0_{V'}$. Infatti possiamo scrivere

$$0_V = 0 \cdot v, \ 0 \in \mathbb{K}, \ v \in V,$$

e per l'omogeneità (AL2) si ha

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_{V'}.$$

2. Siano $v_1, \dots, v_k$ dei vettori di V. Allora per ogni $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ si ha $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ per opportuni $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, e per la linearità di f abbiamo

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k);$$

quindi $f(v) \in \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$.
In particolare, se $v_1, \dots, v_n$ è una BASE d V, per ogni $v \in V$ si ha che

$$f(v) \in \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))).$$

Inoltre, è facile verificare che ogni vettore di $\mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)))$ è immagine di un vettore di V. Si ha quindi che le immagini dei vettori di una base di V generano il sottospazio immagine $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n)))$$

3. Indichiamo con

$$\mathcal{L}(V, V') := \{\text{applicazioni lineari } V \to V'\},$$

o anche

$$\mathrm{Hom}(V, V') := \{\text{applicazioni lineari } V \to V'\}.$$

In $\mathcal{L}(V, V')$ possiamo definire una somma di applicazioni e il prodotto per scalari nel modo usuale (puntualmente). Con queste operazioni $\mathcal{L}(V, V')V'$ risulta uno **spazio vettoriale su** $\mathbb{K}$.

Esempio 7.1.2. L'applicazione costante nulla $0 : V \to V'$, che associa ad ogni vettore $v \in V$ il vettore nullo $0_{V'}$ è un'applicazione lineare.

Si osservi che tra le applicazioni costanti, quella nulla è l'unica che risulta lineare.

Esempio 7.1.3. La funzione **identità**

$$\mathrm{Id}_V : V \to V, \quad \mathrm{Id}_V(v) = v$$

è un operatore lineare.

Esempio 7.1.4. Fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, la **funzione coordinate**

$$F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n, \quad \text{se } v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n,$$

$$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = n - \text{upla delle coordinate di } v \text{ rispetto a } \mathcal{B}$$

è un'applicazione lineare biiettiiva, cioè un isomorfismo.

Esempio 7.1.5. La **proiezione**

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Esempio 7.1.6. La **rotazione di angolo** α

$$F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F_\alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) r_1 - \sin(\alpha) r_2 \\ \sin(\alpha) r_1 + \cos(\alpha) r_2 \end{pmatrix}$$

è un'applicazione lineare.

Esempio 7.1.7. Data una matrice qualunque

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{K},$$

possiamo definire la seguente applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad L_A(v) = A \cdot v,$$

dove v è un vettore colonna di $\mathbb{K}^n$ e $A \cdot v$ è la moltiplicazione riga per colonna. La proprietà (AL1) segue dalla proprietà distributiva del prodotto righe per colonne rispetto alla somma, mentre la (AL2) segue dal fatto che la moltiplicazione per scalari commuta con il prodotto righe per colonne.

Esempio 7.1.8. Sia

$$V = \mathcal{C}^1((a,b), \mathbb{R})$$

lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili su un intervall0 aperto $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e con derivata continua, e sia

$$V' = \mathcal{C}^0((a,b), \mathbb{R})$$

lo spazio vettoriale delle funzioni continue sull'intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

L' applicazione di **derivazione**

$$D : \mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0((a, b), \mathbb{R}), \quad D\, f(t) = f'(t)$$

è lineare.

Esempio 7.1.9. Sia $V = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. La funzione

$$I : V \to \mathbb{R}, \quad I(p(x)) = \int_a^b p(x)\, dx$$

è una applicazione lineare.

Teorema 7.1.10. Teorema di struttura per le applicazioni lineari

Siano V e V' due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, e siano $w_1, \dots, w_n \in V'$ dei vettori di V' .

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to V'$, tale che

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad \dots, \quad f(v_n) = w_n.$$

Dimostrazione. **Esistenza** Definiamo una applicazione $f : V \to V'$ come segue: per ogni vettore $v \in V$, esso si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le coordinate di v rispetto alla base data; allora definiamo

$$f(v) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in V'.$$

Si verifica facilmente che tale f è lineare (esercizio) e, per definizione, si ha che $f(v_i) = w_i$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

Unicità Siano f e g due applicazioni lineari che soddisfano la proprietà dell'enunciato $f(v_i) = w_i = g(v_i)$, per ogni $i = 1, \dots, n$. Dimostriamo che $f = g$,cioè che $f(v) = g(v)$ per ogni $v \in V$. A tale scopo sia $v \in V$ un vettore arbitrario. Scriviamo v come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Sfruttando le proprietà di linearità (AL1) e (AL2) si ha:

$$\begin{aligned} f(v) &= \beta_1 f(v_1) + \cdots + \beta_n f(v_n) = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n = \\ &= \beta_1 g(v_1) + \cdots + \beta_n g(v_n) = g(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = g(v). \end{aligned}$$

□

7.2 Nucleo e immagine

Definizione 7.2.1. Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Il **nucleo** di f è il sottoinsieme di V

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

L'**immagine** di f è il sottoinsieme di V'

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in V' \mid \exists v \in V : f(v) = w\}.$$

Proposizione 7.2.2. *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Allora si ha:*

1. $\ker(f)$ *è un sottospazio vettoriale di* V*.*
2. $\mathrm{Im}(f)$ *è un sottospazio vettoriale di*V'*.*
3. f *è iniettiva se e solo se* $\ker(f) = \{0\}$.
4. f *è suriettiva se e solo se* $\mathrm{Im}(f) = V'$.

Dimostrazione. 1. Abbiamo già osservato che si ha sempre $0_V \in \ker(f)$. Dimostriamo ora che $\ker(f)$ è chiuso per la somma e per il prodotto per scalari.

Siano $v, \tilde{v} \in \ker(f)$; quindi $f(v) = 0_{V'}$ e $f(\tilde{v}) = 0_{V'}$. Per il vettore somma $v + \tilde{v}$, usando l'additività (AL1) di f, si ha che

$$f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}) = 0_{V'} + 0_{V'} = 0_{V'},$$

quindi anche $v + \tilde{v} \in \ker(f)$. Supponiamo infine $v \in \ker(f)$ e sia $c \in \mathbb{K}$ arbitrario. Per il vettore $c \cdot v$ si ha:

$$f(c \cdot v) = c\, f(v) = c \cdot 0_{V'} = 0_{V'}$$

per l'omogeneità (AL2) di f, quindi $v \cdot v \in \ker(f)$.

2. Siccome $0_{V'} = f(0_V)$, il vettore nullo $0_{V'} \in \mathrm{Im}(f)$. Supponiamo ora che $w, \tilde{w} \in \mathrm{Im}(f)$. Allora esistono due vettori $v, \tilde{v}\, inV$ tali che

$$w = f(v), \quad \tilde{w} = f(\tilde{v}).$$

Per il vettore somma si ha che

$$w + \tilde{w} = f(v) + f(\tilde{v}) = f(v + \tilde{v})$$

per l'additività (AL1) di f, quindi anche $w + \tilde{w} \in \mathrm{Im}(f)$.

Infine sia $w \in \mathrm{Im}(f)$ e $c \in \mathbb{K}$ arbitrario. Allora esiste un $v \in V$ tale che

$$w = f(v),$$

da cui

$$c \cdot w = c \cdot f(v) = f(c \cdot v)$$

per l'omogeneità (AL2) di f, allora $cw \in \mathrm{Im}(f)$.

3. Supponiamo f iniettiva. Siccome $f(0_V) = 0_{V'}$ e f è iniettiva, non possono esistere altri vettori che abbiano la stessa immagine di 0_V. Quindi $\ker(f) = \{0_V\}$.

   Viceversa, supponiamo $\ker(f) = \{0_V\}$, cioè 0_V è l'unico vettore che abbia immagine nulla $0_{V'}$. Siano $v, \tilde{v} \in V$ due vettori diversi:

$$v \neq \tilde{v}.$$

   Allora $v - \tilde{v} \neq 0_V$, da cui

$$f(v - \tilde{v}) \neq 0_{V'},$$

   per l'ipotesi $\ker(f) = \{0_V\}$. Per la linearità si ha

$$f(v - \tilde{v}) = f(v) - f(\tilde{v}) \neq 0_{V'},$$

   cioè

$$f(v) \neq f(\tilde{v}),$$

   che è proprio la definizione di iniettività.

4. f è suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = V'$: questa è semplicemente la definizione di suriettività.

□

Definizione 7.2.3. Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare. Il **rango** di f è la dimensione dell'immagine di f e si indica con rg**(f)**:

$$\mathrm{rg}(f) := \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Osservazione 22. Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

l'applicazione lineare associata. Per l'Osservazione 21 (2), se in $\mathbb{K}^n$ fissiamo la base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$, abbiamo che

$$\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Span}(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)).$$

Osserviamo ora che

$$L_A(e_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(1)}, \ldots, L_A(e_n) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A^{(n)},$$

cioè le immagini dei vettori della base canonica tramite L_A coincidono con le colonne di A. Questo implica che

$$\mathrm{rg}(L_A) \dim \mathrm{Im}(L_A) = \dim \mathrm{Span}(L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)) = \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = \mathrm{rg}(A).$$

Notiamo, inoltre, che se $\widetilde{A}$ é ottenuta da A per mezzo di operazioni elementari, allora sappiamo che $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\widetilde{A})$, ma in generale

$$\mathrm{Im}(L_A) \neq \mathrm{Im}(L_{\widetilde{A}}).$$

Teorema 7.2.4. Teorema di Dimensione *Siano V e V' due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, con V di dimensione finita. Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare. Allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

Dimostrazione. Poiché V ha dimensione finita e $\ker(f)$ è un sottospazio vettoriale di V, anche $\ker(f))$ ha dimesnione finita. Fissiamo dunque una base

$$\{v_1, \ldots, v_k\} \quad \text{di } \ker(f),$$

e completiamola a una base di V:

$$\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}.$$

Affermiamo che

$$\{f(u_{k+1}), \ldots, f(u_n)\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(f)$ ed osserviamo che da questo segue l'enunciato, perché avremmo

$$\mathrm{rg}(f) = n - k,$$

quindi
$$\dim(V) = n = k + (n-k) = \dim(ker(f)) + \mathrm{rg}(f).$$
Dalla Osservazione 21 (2) sappiamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \dots, f(v_k), f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)) = \mathrm{Span}(f(u_{k+1}), \dots, f(u_n))$$

perché $v_1, \dots, v_k \in \ker(f)$. Dunque i vettori $\{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$ sono un insieme di generatori.

Ci rimane da dimostrare che $\{f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)\}$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo una combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$c_{k+1}f(u_{k+1}) + \dots + c_n f(u_n) = 0_{V'}. \tag{7.1}$$

Per linearitá possiamo scrivere

$$0_{V'} = c_{k+1}f(u_{k+1}) + \dots + c_n f(u_n) = f(c_{k+1}u_{k+1} + \dots + c_n u_n).$$

Segue che il vettore
$$w = c_{k+1}u_{k+1} + \dots + c_n u_n \in \ker(f).$$
Come ogni vettore di $\ker(f)$, w si puó esprimere come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\ker(f)$:
$$w = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k.$$
In definitiva abbiamo due espressioni di w come combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti:
$$w = c_{k+1}u_{k+1} + \dots + c_n u_n = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k.$$
Portando le ultime due espressioni allo stesso membro troviamo

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - c_{k+1}u_{k+1} - \dots - c_n u_n = 0_V,$$

cioè una combinazione lineare dei vettori della base di V che dá il vettore nullo, e per l'indipendenza lineare dei vettori di una base, tutti i coefficienti sono necessariamente nulli:

$$a_1 = 0, \dots, a_k = 0, c_{k+1} = 0, \dots, c_n = 0,$$

in particolare i coefficienti nell'espressione (7.1) sono tutti nulli, quindi $f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)$ sono linearmente indipendenti.

□

Osservazione 23. Sia $f : V \to V'$ un' applicazione lineare. Ricordiamo che per ogni vettore $w \in V'$, $f^{-1}(w)$ denota la pre-immagine di w tramite f, cioè

$$f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}.$$

Allora si ha che

$$f^{-1}(w) = \tilde{v} + \ker(f),$$

dove $\tilde{v}$ è un qualsiasi elemento di $f^{-1}(w)$. Questo segue, ad esempio, tramite una dimostrazione analoga a quella del Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare (la verifica è lasciata come esercizio). Dal Teorema della dimensione si ha che $\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \mathrm{rg}(f)$.

Si osservi che in questo modo, nel caso in cui

$$V = \mathbb{K}^n, \ V' = \mathbb{K}^m, \ f = L_A,$$

per qualche $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, si ritrova il Teorema di Struttura per le soluzioni di un sistema lineare ed il teorema di Rouché-Capelli.

Corollario 7.2.5. *Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Supponiamo che*

$$\dim(V) = \dim(V').$$

Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $\ker(f) = \{0\}$*, cioè f è iniettiva;*

2. $\mathrm{Im}(f) = V'$*, cioè f è suriettiva;*

3. *f è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Se $\ker(f) = \{0\}$, allora $\dim(\ker(f)) = 0$. Per il Teorema della Dimensione si ha

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V) - \dim(\ker(f)) = \dim(V) - 0 = \dim(V).$$

Per ipotesi $\dim(V) = \dim(V')$, ne segue che $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V')$, e poiché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di V', quest'ultima condizione è equivalente a $\mathrm{Im}(f) = V'$. Quindi 1. e 2. sono equivalenti tra di loro.

Supponiamo ora che valga la condizione 2. (oppure la 1.). Per quanto appena dimostrato, vale anche la condizione 1. (rispettivamente la 2.), quindi f è un isomorfismo. Viceversa, se f è un isomorfismo, è iniettiva e suriettiva per definizione, quindi valgono 1. e 2. $\square$

Definizione 7.2.6. Due spazi vettoriali V e V' su un campo $\mathbb{K}$ si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo

$$f : V \to V'.$$

In tal caso si scrive $V \cong V'$.

Osservazione 24. L'isomorfismo è una relazione di equivalenza tra gli spazi vettoriali su uno stesso campo $\mathbb{K}$.

Teorema 7.2.7. *Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Allora $V \cong V'$ se e solo se $\dim(V) = \dim(V')$.*

Dimostrazione. Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Per il precedente corollario abbiamo $\ker(f) = \{0\}$ ed $\mathrm{Im}(f) = V'$, quindi per il Teorema della Dimensione $\dim(V) = \mathrm{rg}(f) = \dim(V')$.

Viceversa, supponiamo ora che $\dim(V) = \dim(V') = n$. Fissiamo una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V ed una base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ di V'. Per il Teorema di Struttura per le applicazioni lineari esiste un' unica applicazione lineare $f : V \to V'$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Essendo $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \mathrm{Span}(w_1, \ldots, w_n) = V'$, quindi f è suriettiva. Dal precedente Corollario abbiamo che f è un isomorfismo, quindi $V \cong V'$. $\square$

Corollario 7.2.8. *Se $n \neq m$, gli spazi vettoriali $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ non sono isomorfi.*

7.3 Matrici associate a un'applicazione lineare

Abbiamo visto che ad ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ corrisponde una applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, con $L_A(v) := A \cdot v$. In questa sezione vedremo che, viceversa, data una applicazione lineare $f : V \to V'$ tra spazi vettoriali di dimensione finita, fissata una base $\mathcal{B}$ di V ed una base $\mathcal{C}$ di V' , possiamo associare una matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ (la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$), tale che se le coordinate di un vettore $v \in V$ riepsetto alla base $\mathcal{B}$ sono

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

le coordinate di $f(v) \in V'$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ sono date da

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 7.3.1. Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di V'. La **matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** è definita come segue:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K}),$$

dove

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m.$$

In altre parole, **la colonna j-ma di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ è formata dalle coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$ per ogni** $j = 1, \ldots, n$.

Osservazione 25. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e consideriamo la applicazione lineare $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ le basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, rispettivamente. Allora si ha

$$M_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}(L_A) = A.$$

Infatti, se e_j denota il j-mo vettore della base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{K}^n$, allora

$$L_A(e_j) = A \cdot e_j = A^{(j)},$$

e le coordinate di $A^{(j)}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{K}^m$ coincidono con gli scalari della colonna stessa.

Osservazione 26. Sia f la applicazione nulla, cioè l'applicazione

$$f(v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Allora

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = 0$$

è la matrice nulla per ogni scelta di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Infatti $f(v_j) = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, e le coordinate del vettore nullo sono tutte nulle in una qualsiasi base $\mathcal{C}$.

Inoltre, vale anche il viceversa: se $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = 0$ è la matrice nulla, allora

$$f(v_1) = 0, \ldots f(v_n) = 0,$$

e per il Teorema di Struttura per Applicazioni Lineari da ciò segue che f è l'applicazione nulla.

Osservazione 27. Se $V = V'$ e $f = Id_V$, allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id_V) = I_n,$$

per ogni base $\mathcal{B}$ di V. Infatti se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ si ha

$$f(v_j) = v_j,$$

e le coordinate di v_j nella base $\mathcal{B}$ sono tutte nulle eccetto la coordinata j-esima che vale 1.

Più in generale, se $V = V'$ e $f = c \cdot Id_V$, per qualche scalare $c \in \mathbb{K}$, allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(c \cdot Id_V) = c \cdot I_n,$$

la verifica è lasciata per esercizio. Tale applicazione si chiama **dilatazione**.

Proposizione 7.3.2. *Siano V e V' due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare, e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di V'. Dato un vettore $v \in V$, se*

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n,$$

allora

$$f(v) = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m,$$

dove

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. L'enunciato segue dalla seguente sequenza di uguaglianze, dove si sfrutta il fatto che f è lineare e la definizione di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \dots \alpha_n f(v_n) = \\ &= \alpha_1(a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m) + \dots + \alpha_n(a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m) = \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_n a_{1n}) w_1 + \dots + (\alpha_1 a_{m1} + \dots + \alpha_n a_{mn}) w_m. \end{aligned}$$

Infine, osserviamo che per ogni $i = 1, \dots, m$, lo scalare

$$\alpha_1 a_{i1} + \dots + \alpha_n a_{in}$$

è proprio il coefficiente i-esimo della matrice colonna

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

□

Uno dei vantaggi che si ottengono descrivendo una applicazione lineare f per mezzo delle matrici $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ è che possiamo usare i risultati concernenti i sistemi lineari per determinare $\operatorname{Im}(f)$ e $\ker(f)$ come segue.

Corollario 7.3.3. *Sia $f : V \to V'$ una applicazione lineare, dove V e V' sono spazi vettoriali di dimensione finita. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di V'. Sia $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ la matrice che rappresenta f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\ker(f) = \left\{ v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V \mid M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \right\};$$

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m \in W \mid \text{il sistema } M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \text{ e compatibile} \right\};$$

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f).$$

Teorema 7.3.4. *Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V e V', rispettivamente. Allora l' applicazione*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(V, V') \to M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad f \to M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f),$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare, $\mathcal{L}(V, V')$ ha dimensione finita pari a $n \cdot m = \dim(V) \cdot \dim(V')$.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è lineare. Siano $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$ e sia $c \in \mathbb{K}$. Denotiamo con a_{ij} (rispettivamente $b_i j$) l'elemento di posto (i, j) di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ (rispettivamente di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)$). Dobbiamo verificare che l'elemento di posto (i, j) di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)$ coincide con

$a_{ij} + b_{ij}$, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Per definizione $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)]_{ij}$ è la coordinata i-esima di $(f + g)(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. Abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$(f+g)(v_j) = f(v_j)+g(v_j) = (a_{1j}w_1+\cdots+a_{mj}w_m)+(b_{1j}w_1+\cdots+b_{mj}w_m) = (a_{1j}+b_{1j})w_1+\cdots+(a_{mj}+b_{mj})w_m.$$

Da questo segue che

$$[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g)]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)]_{ij} + [M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)]_{ij},$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f + g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g).$$

Analogamente si dimostra che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(c \cdot f) = c \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f),$$

quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è lineare.

Per dimostrare che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è iniettiva, è sufficiente provare che

$$\ker(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}) = \{0\}.$$

Sia quindi $f \in \mathcal{L}(V, V')$ tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = 0 \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Per l'Osservazione 26 si ha che $f = 0$, da cui segue la tesi.

Per concludere, dimostriamo che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è suriettiva. Sia quindi $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Definiamo $f_A \in \mathcal{L}(V, V')$ come l'unica applicazione lineare tale che

$$f_A(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m, \qquad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n.$$

Dalla definizione segue facilmente che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$, quindi $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ è suriettiva. □

7.4 Cambi di base

In questa sezione vedremo come cambia la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ al variare delle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Questo seguirà dalla seguente proposizione.

Proposizione 7.4.1. *Siano U, V e W tre spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, di dimensione p, n, m, rispettivamente. Siano*

$$\mathcal{D} = \{u_1, \ldots, u_p\}, \qquad \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

basi di U, V e W, rispettivamente.

Siano $g : U \to V$ e $f : V \to W$ applicazioni lineari. Allora si ha

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g).$$

Dimostrazione. La colonna di posto j della matrice associata a $f \circ g$ è per definizione la colonna delle coordinate del vettore $(f \circ g)(u_j) = f(g(u_j))$. Se poniamo

$$g(u_j) = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} v_l,$$

e

$$f(v_l) = \sum_{k=1}^{m} a_{kl} w_k,$$

allora $(M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g))_{lj} = b_{lj}$ e $(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f))_{kl} = a_{kl}$. Inoltre, si ha

$$f(g(u_j)) = f(\sum_{l=1}^{n} b_{lj} v_l) = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} f(v_l) = \sum_{l=1}^{n} b_{lj} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kl} w_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lj} \right) w_k,$$

quindi la coordinata k-esima di $f(g(u_j))$ è data dal prodotto della riga k di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ con la colonna j di $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$. $\square$

Corollario 7.4.2. *Siano V e V' spazi vettoriale della stessa dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di V'. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1. *Sia $f : V \to V'$ un' applicazione lineare. Allora f è un isomorfismo se e solo se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è invertibile. In tal caso si ha*
$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)^{-1}.$$
2. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora A è invertibile se e solo se $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Dimostrazione. 1. Supponiamo che $f : V \to V'$ sia un isomorfismo, e sia f^{-1} la funzione inversa di f, che è ancora lineare. Allora valgono le uguaglianze

$$f \circ f^{-1} == \mathrm{Id}_{V'}, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_V.$$

Abbiamo

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_{V'}) = \mathbb{I}_n,$$
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathbb{I}_n.$$

Dalla Proposizione precedente segue che

$$\mathbb{I}_n = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$

e dalla definizione di matrice invertibile e matrice inversa segue l'enunciato.

Viceversa, se $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è invertibile, allora per il Teorema di Cramer l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot X = 0$$
è $X = (M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} \cdot 0 = 0$. Da ciò segue che $\ker(f) = \{0\}$, quindi f è iniettiva; essendo una applicazione lineare tra spazi della stessa dimensione, è anche suriettiva, quindi è un isomorfismo.

2. Consideriamo la applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

e ricordiamo che risulta
$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A),$$
dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Dal punto 1. si ha che A è invertibile se e solo se L_A è un isomorfismo. D'altra parte, L_A è un isomorfismo se e solo se L_A è suriettiva, cioè se e solo se $\mathrm{rg}(L_A) = n$.

□

Definizione 7.4.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$. Siano

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$$

due basi di V. La **matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$** è la matrice

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) \in M_n(\mathbb{K})$$

che rappresenta la funzione identità $Id_V : V \to V$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Osservazione 28. 1. Per ogni $j = 1, \dots, n$, siano

$$a_{1j}, \dots, a_{nj}$$

le coordinate di v_j rispetto alla base $\mathcal{C}$. Allora la colonna j-esima di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$ è data da

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

2. Per ogni vettore $v \in V$, se
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$
è la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora la colonna delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{C}$ è data da
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$ permette di determinare le coordinate di un vettore rispetto alla base $\mathcal{C}$ se sono note le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, per questo prende il nome di matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Proposizione 7.4.4. *La matrice di cambio di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$ è invertibile, e vale la seguente uguaglianza:*
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)^{-1} = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_V).$$

Dimostrazione. Valgono le seguenti identità:
$$\mathbb{I}_n = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V), \qquad Id_V = Id_V \circ Id_V, \qquad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(Id_V \circ Id_V) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V).$$
Da questo segue l'enunciato. □

Come conseguenza otteniamo una formula per passare da una matrice che rappresenta un'applicazione f rispetto a certe basi alla matrice che rappresenta f in altre basi:

Corollario 7.4.5. *Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V e $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due basi di V'. Allora vale la relazione*
$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'}), \tag{7.2}$$
dove $Id_V : V \to V$ e $Id_{V'} : V' \to V'$ sono le applicazioni identità.

In particolare, se $V = V'$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, si ha
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)\right)^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V). \tag{7.3}$$

Definizione 7.4.6. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono **simili** se esiste C matrice invertibile tale che

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

In tal caso si scrive $A \sim B$.

Quindi, se due matrici rappresentano lo stesso operatore rispetto a due basi, allora esse sono simili. Vale anche il viceversa, come afferma il seguente risultato.

Lemma 7.4.7. *Sia $f : V \to V$ un operatore lineare, e sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$, dove $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V. Allora, se $B \in M_n(\mathbb{K})$, si ha che $B \sim A$ se e solo se esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che*

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f).$$

Dimostrazione. Se esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, allora A e B sono simili per la relazione (**??**).

Viceversa, supponiamo che A e B siano simili. Quindi per definizione esiste una matrice invertibile C tale che

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C.$$

Sia c_{ij} l'elemento di posto (i, j) di C. Definiamo una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V come segue:

$$w_j := c_{1j}v_1 + \cdots + c_{nj}v_n, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Con questa costruzione si ha che

$$C = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id_V),$$

quindi, essendo C invertibile, si ha in particolare che gli n vettori $w_1, \dots, w_n$ sono linearmente indipendenti, e siccome $\dim V = n$ sono anche dei generatori. Inoltre possiamo scrivere

$$B = C^{-1} \cdot A \cdot C = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id_V) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f).$$

□

Osservazione 29. La similitudine è una relazione di equivalenza tra le matrici a coefficienti in $\mathbb{K}$. La verifica è lasciata per esercizio.

Osservazione 30. La matrice unità $\mathbb{I}_n$ è simile solo a se stessa, la verifica è molto semplice.