Rivestimenti

X e Y spazi topologici.

Def. $p\colon X \to Y$ *rivestimento* se p continua e $\exists\, J = J_{\mathrm{dis}}$ t.c.
$\forall\, y \in Y\ \exists V \subset Y$ intorno aperto di y con

$$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{j\in J} U_j,\ \ U_j \subset X \text{ aperto } \forall\, j \in J \text{ e}$$

$$p_j := p|_{U_j} : U_j \xrightarrow{\cong} V \text{ omeo } \forall\, j \in J.$$

Terminologia: X *spazio totale*; Y *base di* p; $p^{-1}(y)$ *fibra* di y; J *fibra tipo*; V *aperto banalizzante*; U_j *foglio*; $p_j^{-1} : V \xrightarrow{\cong} U_j$ *inversa locale* di p.

Oss. $p^{-1}(y) \cap U_j = \{p_j^{-1}(y)\}$, $\forall\, j \in J \Rightarrow p^{-1}(y) \cong J_{\mathrm{dis}}$, $\forall\, y \in Y$.

Oss. $\varphi\colon V \times J_{\mathrm{dis}} \xrightarrow{\cong} p^{-1}(V)$, $\varphi(y,j) := p_j^{-1}(y)$ omeo e $\pi_V = p \circ \varphi$.

Oss. p rivestimento $\Rightarrow$ p omeo loc. e suriettiva $\Rightarrow$ p aperta.

Oss. X *II*-numerabile $\Rightarrow$ J al più numerabile.

Def. Un rivestimento $p\colon X \to Y$ è:

(1) *connesso* (risp. *connesso per archi*) se X è connesso (risp. cpa);

(2) *finito* se $d(p) := \#\, J < \infty$ (*grado* o *numero di fogli* di p);

(3) *infinito* se $d(p) = \infty$;

(4) *banale* se Y aperto banalizzante per p.

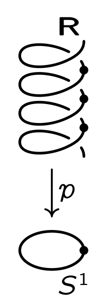
Oss. p banale $\Leftrightarrow \exists\, \varphi\colon Y \times J_{\mathrm{dis}} \xrightarrow{\cong} X$ omeo t.c. $\pi_Y = p \circ \varphi$.

Oss. $p\colon X \to Y$ rivestimento ad un foglio $\Leftrightarrow$ p omeo.

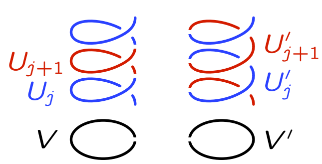
Esempio notevole. $p\colon \mathbf{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) = e^{2\pi i x}$.
$p^{-1}(1,0) = \mathbb{Z}$, $p^{-1}(-1,0) = \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$. p periodica di periodo 1: $p(x+1) = p(x)$.
$V = S^1 - \{(1,0)\} \cong \mathbf{R}$, $V' = S^1 - \{(-1,0)\} \cong \mathbf{R}$ (proiezione stereografica).

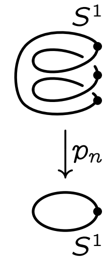
$$p^{-1}(V) = \mathbf{R} - \mathbb{Z} = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} U_j \qquad U_j := \,]j, j+1[\, \cong \mathbf{R}$$

$$p^{-1}(V') = \mathbf{R} - \left(\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\right) = \bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}} U'_j \qquad U'_j := \,]j+\tfrac{1}{2}, j+\tfrac{3}{2}[\, \cong \mathbf{R}$$



$p|_{U_j} : U_j \to V$ continua biiettiva $\Rightarrow$ omeo $\Rightarrow$ V banalizzante
$p|_{U'_j} : U'_j \to V'$ continua biiettiva $\Rightarrow$ omeo $\Rightarrow$ V' banalizzante
$S^1 = V \cup V' \Rightarrow p$ rivestimento con fibra $\mathbb{Z}$.



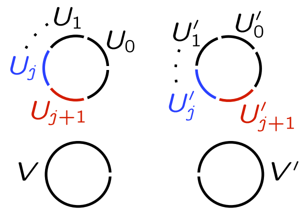


Esempio. $p_n : S^1 \to S^1$, $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $S^1 \subset \mathbf{C}$.
$J = p^{-1}(1) = \{\text{radici } n\text{-esime di } 1\} \Rightarrow d(p_n) = n$.
V, V' aperti banalizzanti. Per $j = 0, \ldots, n-1$ consideriamo

$$U_j = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; \arg z \in \left] \tfrac{2j\pi}{n}, \tfrac{2(j+1)\pi}{n} \right[\right\}$$

$$U'_j = \left\{ z \in S^1 \;\middle|\; \arg z \in \left] \tfrac{(2j+1)\pi}{n}, \tfrac{(2j+3)\pi}{n} \right[\right\}$$

$p_n|_{U_j} : U_j \to V$ e $p_n|_{U'_j} : U'_j \to V'$ omeo con inversa data dalla radice n-esima.



Esempio. $p : S^n \to \mathbf{RP}^n$ restrizione della proiezione $\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{RP}^n$.
$p^{-1}([x]) = \{\pm x\} \Rightarrow d(p) = 2$.
$H_i : x_i = 0$ iperpiano in $\mathbf{RP}^n \Rightarrow H_i \cong \mathbf{RP}^{n-1} \rightsquigarrow V_i = \underbrace{\mathbf{RP}^n - H_i}_{\text{carta affine}} \cong \mathbf{R}^n$.
$\mathbf{RP}^n = V_0 \cup \cdots \cup V_n$. $U_i^{\pm} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$ aperti in S^n.
$p|_{U_i^{\pm}} : U_i^{\pm} \to V$ omeo, $\left(p|_{U_i^{\pm}}\right)^{-1}([x_0, \ldots, x_n]) = \pm \operatorname{sgn} x_i (x_0, \ldots, x_n)$.

Def. Siano $p : X \to Y$ rivestimento e $f : Z \to Y$ continua.
$\tilde{f} : Z \to X$ è un *sollevamento di* f se $\tilde{f}$ è continua e $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Lemma del numero di Lebesgue. *Sia* (X, d) *spazio metrico compatto e* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *ricoprimento aperto di* X. *Allora* $\exists\, \delta > 0$ *t.c.* $\forall\, S \subset X$, $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow S \subset U_\alpha$ *per un certo* $\alpha \in A$.

Def. δ è detto *numero di Lebesgue* del ricoprimento aperto.

Dim. Se $\exists\, \alpha \in A$ t.c. $U_\alpha = X \rightsquigarrow \delta = 1$ numero di Lebesgue.
Supponiamo $\emptyset \neq U_\alpha \subsetneq X$, $\forall\, \alpha \in A$. $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ sottoricoprimento finito.
$K_i = X - U_{\alpha_i}$ chiuso $\Rightarrow K_i$ compatto e $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = X - \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = \emptyset \rightsquigarrow$

$$\bar{d} : X \to \mathbf{R}$$

$$\bar{d}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, K_i) \quad \text{(distanza media)}$$

$\Rightarrow \bar{d}(x) > 0$, $\forall\, x \in X \Rightarrow \delta := \min \bar{d} > 0$. $\forall\, S \subset X$ t.c. $\operatorname{diam} S < \delta \Rightarrow S \subset B_d(s, \delta)$ con $s \in S$. $\exists\, i$ t.c. $\delta \leqslant \underbrace{\bar{d}(s)}_{d \text{ media}} \leqslant d(s, K_i) \Rightarrow B_d(s, \delta) \cap K_i = \emptyset$
$\Rightarrow S \subset B_d(s, \delta) \subset X - K_i = U_{\alpha_i} \Rightarrow \delta$ numero di Lebesgue. $\square$