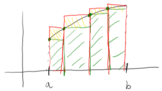
27 Novembre



$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$ risulterà essere l'area della regione sotto il grafico.

Integrale di Riemann

$\boxed{\text{Integrale di Darboux}}$

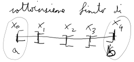
Ricordiamoci che se $f: [x_j, x_{j+1}] \to \mathbb{R}$

$$\sup f([x_j, x_{j+1}]) = \sup \{ f(x) : x \in [x_j, x_{j+1}] \}$$

$$\inf f([x_j, x_{j+1}]) = \inf \{ f(x) : x \in [x_j, x_{j+1}] \}$$

$$\operatorname{osc} f([x_j, x_{j+1}]) = \sup f([x_j, x_{j+1}]) - \inf f([x_j, x_{j+1}])$$

Dato un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato una sua decomposizione è un qualunque sottoinsieme finito di $[a,b]$ della forma

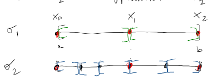


$\sigma \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

Più precisamente la decomposizione è data
$[a,b] = [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$

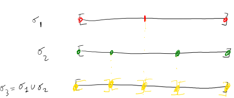
Denoteremo l'insieme delle decomposizioni di $[a,b]$ con $\Sigma_{[a,b]}$

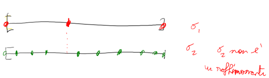
Date due decomposizioni σ_1 e $\sigma_2 \in \Sigma_{[a,b]}$ diciamo che σ_2 è un raffinamento di σ_1 se $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$



Date due decomposizioni σ_1 e σ_2 esiste sempre una terza decomposizione, σ_3, che è un raffinamento di entrambe

Ad es $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$





Il calibro di una decomposizione

$\sigma \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

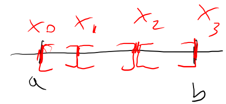
è $|\sigma| = \max\{ x_j - x_{j-1} : 0 \le j \le n \}$

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata

cioè $\sup f([a,b]) < +\infty$, $\inf f([a,b]) > -\infty$.

Sia σ una decomposizione di $[a,b]$

$\sigma \qquad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$



$$S(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j]) \in \mathbb{R}$$

$$s(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j])$$

<u>Esempi</u> $\quad f = c \qquad f([a,b]) = \{c\}$

$$f([x_{j-1}, x_j]) = \{c\}$$

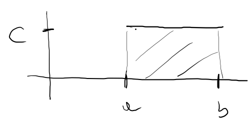
$$S(c,\sigma) = S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup\{c\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, c = c \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = c\,(x_n - x_0)$$

$$= c\,(b-a)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \dots + x_n - \cancel{x_{n-1}} = x_n - x_0$$

$$S(c,\sigma) = c\,(b-a)$$



$$s(c,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \overbrace{\inf\{c\}}^{c} = c\,(b-a)$$

funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$D([a,b]) = \{D(x) : x \in [a,b]\} = \{0,1\}$$

$$D([x_{j-1}, x_j]) = \{0,1\}$$

$$S(D,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup D([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \overbrace{\sup\{0,1\}}^{1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a$$

$$s(D,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf D([x_{j-1}, x_j]) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \overbrace{\inf\{0,1\}}^{0}$$

$$= 0$$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ crescente. $\Longrightarrow$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

σ ; $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{f(x_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_j)$$

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{f(x_{j-1})}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_{j-1})$$

Se f invece è decrescente

$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{f(x_{j-1})}$$

$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_{j-1})$$

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_j)$$

Se $f \in C^0([a,b])$

x_{jM}
x_{jm} punto di min dif max in $[x_{j-1}, x_j]$

$\sigma \quad x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$

$$S(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f([x_{j-1}, x_j])$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_{jM})$$

$$s(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f([x_{j-1}, x_j]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \; f(x_{jm})$$

Lemma

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e sia σ_2 un raffinamento di σ_1. Allora

$$s(f,\sigma_1) \le s(f,\sigma_2) \le S(f,\sigma_2) \le S(f,\sigma_1)$$

Vediamo un esempio

σ_1 $\quad x_0 = a < x_1 = b$

σ_2 $\quad x_0 = a < \underset{\overset{\shortparallel}{c}}{x_1} < x_2 = b$

$S(f,\sigma_1) = (b-a)\sup f([a,b])$

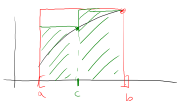
$$S(f,\sigma_2) = (c-a)\underbrace{\sup f([a,c])}_{\le \sup f([a,b])} + (b-c)\underbrace{\sup f([c,b])}_{\le \sup f([a,b])}$$

Sappiamo che $\sup f([a,c]) \le \sup f([a,b]) \quad \cdot(c-a)$

$\sup f([c,b]) \le \sup f([a,b]) \quad \cdot(b-c)$

$$\le (c-a)\sup f([a,b]) + (b-c)\sup f([a,b])$$

$$= (b-a)\sup f([a,b]) = S(f,\sigma_1)$$



Corollario: Date $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e σ_1 e σ_2 due decomposizioni qualsiasi, allora

$$s(f,\sigma_1) \le S(f,\sigma_2)$$

Dim: Basta prendere un raffinamento σ_3 di σ_1 e di σ_2. Per il lemma precedente

$$s(f,\sigma_1) \le s(f,\sigma_3) \le S(f,\sigma_3) \le S(f,\sigma_2)$$

Osservazione: Gli insiemi $\{s(f,\sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\}$ e

$$\{S(f,\sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\}$$

formano una coppia separata

Pongo $\displaystyle \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,\sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\}$

e lo chiamo integrale inferiore di f in $[a,b]$

Pongo $\displaystyle \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,\sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a,b]}\}$

superiore