

28 Novembre

Ricordiamo che se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato
allora per ogni coppia di decomposizioni σ_1 e σ_2
si ha $\lambda(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2)$

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{ \lambda(f, \sigma) : \sigma \in \Sigma [a, b] \}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ S(f, \sigma) : \sigma \in \Sigma [a, b] \}$$

$$\lambda(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2) \quad \forall \sigma_1 \text{ e } \forall \sigma_2 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Def $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato si dice integrabile per

Darboux se $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Il loro comune valore viene chiamato integrale di
Darboux di f in $[a, b]$ ed è denotato con $\int_a^b f(x) dx$.

Esempi $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{ \lambda(c, \sigma) : \sigma \in \Sigma [a, b] \} = \{ c(b-a) \}$$

$$\Rightarrow \int_a^b c dx = c(b-a)$$

$$\{ S(c, \sigma) : \sigma \in \Sigma [a, b] \} = \{ c(b-a) \}$$

$$\int_a^b c dx = c(b-a)$$

Concludiamo che $\int_a^b c dx = c(b-a)$

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$D: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a < b$$

$$\{ \Lambda(D, \sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a, b]} \} = \{ 0 \}$$

$$\Rightarrow \int_a^b D(x) dx = 0$$

$$\{ S(D, \sigma) : \sigma \in \Sigma_{[a, b]} \} = \{ b - a \}$$

$$\int_a^b D(x) dx = b - a$$

D non è integrabile in $[a, b] \quad \forall \quad a < b$ in $\mathbb{R}$.

Leor Sia $[a, b]$ un intervallo, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Le seguenti due proprietà sono equivalenti.

1) f è integrabile su Darboux

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon \in \Sigma_{[a, b]} \quad t.c.$

$$S(f, \sigma_\varepsilon) - s(f, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon.$$

D_{11m} 1) $\Rightarrow$ 2)

Se 1) è vera allora $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$.

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad \xrightarrow{\sigma_1} \quad \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\exists \sigma_1 \quad t.c. \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, \sigma_1) \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$\exists \sigma_2 \quad t.c. \quad \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma_2) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sia σ_3 un raffinement di σ_1 e σ_2

Sopponiamo che allora

$$s(f, \sigma_1) \leq s(f, \sigma_3) \leq S(f, \sigma_3) \leq S(f, \sigma_2)$$

$$\Rightarrow S(f, \sigma_3) - s(f, \sigma_3) \leq S(f, \sigma_2) - s(f, \sigma_1) < \varepsilon$$

Allora (Def 2) è vera per $\sigma_\varepsilon = \sigma_3$

Ora dimostriamo che 2) $\Rightarrow$ 1)

Noi supponiamo che $\forall \sigma \in \Sigma_{[a, b]}$

$$s(f, \sigma) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma)$$

$\forall \sigma \in \Sigma_{[a, b]}$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S(f, \sigma_\varepsilon) - s(f, \sigma_\varepsilon) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Teor Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotono, allora f è integrabile
in Darboux.

Dim Assumiamo f crescente e dimostriamo che
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma \in \Sigma_{[a, b]} \text{ t.c. } S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$

Considero una successione $\{\sigma_n\}$ di decomposizioni di $[a, b]$ in n
intervalli di uguale lunghezza $\frac{b-a}{n}$

$$\sigma_n \quad (x_0 = a) < x_1 < \dots < (x_n = b) \quad x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$S(f, \sigma_n) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_j) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_j) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j)$$

$$s(f, \sigma_n) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} f(x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$$

$$\begin{aligned} S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) &= \frac{b-a}{n} \left(\sum_{j=1}^n f(x_j) - \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \end{aligned}$$

$$S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\forall \varepsilon > 0$, se n è sufficientemente grande, si ha

$$S(f, \sigma_n) - s(f, \sigma_n) < \varepsilon. \quad \text{Pertanto } f \text{ è integrabile.}$$

Def $Pondera$ con $[a, b]$ l'insieme delle funzioni integrabili per Darboux in $[a, b]$.

Teor Siano $f, g \in L[a, b]$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Allora $\lambda f + \mu g \in L[a, b]$ con

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \quad (*)$$

Anda ^{per il prodotto} $fg \in L[a, b]$

Osservazione Il teorema ci sta dicendo che $L[a, b]$ è uno spazio vettoriale

Teorema (Monotonia) Se $f, g \in L[a, b]$ con

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \text{ allora } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Teor Sia $f \in L[a, b]$. Allora $|f| \in L[a, b]$ e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad *$$

Convergenza * e' ~~convergenza~~ $\left| \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|$

Dim di * Sia $f \in L[a, b]$ e cons, denoto $|f| \in L[a, b]$

Allora

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$$

Per la Monotonia

$$\int_a^b (-|f(x)|) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Per la Linearità

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$(-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a)$$

Teor (Heine) Se f è continua in $[a, b]$
 allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. se I è un intervallo
 contenuto in $[a, b]$ di lunghezza $|I| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup f(I) - \inf f(I)}_{|I| < \delta_\varepsilon} < \varepsilon$$

Teor $f \in C^0([a, b]) \Rightarrow f \in L([a, b])$.

Dim Dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \in \Sigma_{[a, b]}$ t.c.

$$0 \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\delta_\varepsilon > 0$ del Teor di Heine

considerando ora una decomposizione σ di valore $< \delta_\varepsilon$.

$$\sigma \quad x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$0 < x_j - x_{j-1} < \delta_\varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$S(f, \sigma) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\sup f([x_{j-1}, x_j])}_{f(x_{jM})} \quad x_{jM} \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$s(f, \sigma) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\inf f([x_{j-1}, x_j])}_{f(x_{jM})} \quad x_{jM} \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$\begin{aligned} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_{jM}) - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(x_{jM}) \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) (f(x_{jM}) - f(x_{jM})) \end{aligned}$$

$\underbrace{f(x_{jM}) - f(x_{jM})}_{\sup f([x_{j-1}, x_j]) - \inf f([x_{j-1}, x_j])} < \varepsilon$

Secon $x_j - x_{j-1} < \delta_\varepsilon \Rightarrow \sup f([x_{j-1}, x_j]) - \inf f([x_{j-1}, x_j]) < \varepsilon$

$$< \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \varepsilon = \varepsilon \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b-a)$$