CONCAVITA' E CONVESSITA' DI UNA FUNZIONE.
FLESSI. SCHEMA GENERALE PER LO STUDIO DI FUNZIONE.
FUNZIONI RAZIONALI E IRRAZIONALI INTERE E FRATTE.
TEOREMA DI DE L'HOSPITAL CON APPLICAZIONI AI LIMITI.

Concavità verso l'alto (funzione convessa)

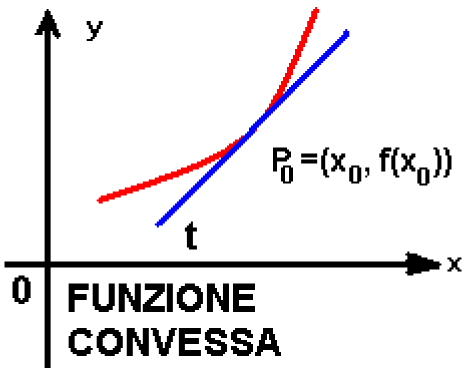
Si dice che in x_0 il grafico della funzione f(x) abbia la concavità rivolta verso l'alto, se esiste un intorno completo di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno completo e diverso da x_0, l'ordinata del punto di ascissa x appartenente alla curva, sia maggiore di quella del punto di stessa ascissa, ma appartenente alla tangente.

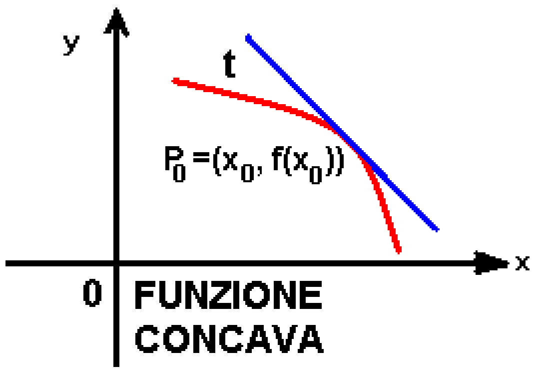
$$f(x) > t(x), \forall x \in I_{x_0}, x \neq x_0$$

Concavità verso il basso (funzione concava)

Si dice che in x_0 il grafico della funzione f(x) abbia la concavità rivolta verso il basso, se esiste un intorno completo di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno completo e diverso da x_0, l'ordinata del punto di ascissa x appartenente alla curva, sia minore di quella del punto di stessa ascissa, ma appartenente alla tangente.

$$f(x) < t(x), \forall x \in I_{x_0}, x \neq x_0$$





Definizione di flesso

Data la funzione y = f(x) definita e continua nell'intervallo I, si dice che essa presenta nel punto x_0, interno all'intervallo I, un punto di flesso se in tale punto il grafico di f(x) cambia la concavità e nel punto x_0 la retta tangente attraversa il grafico della funzione.

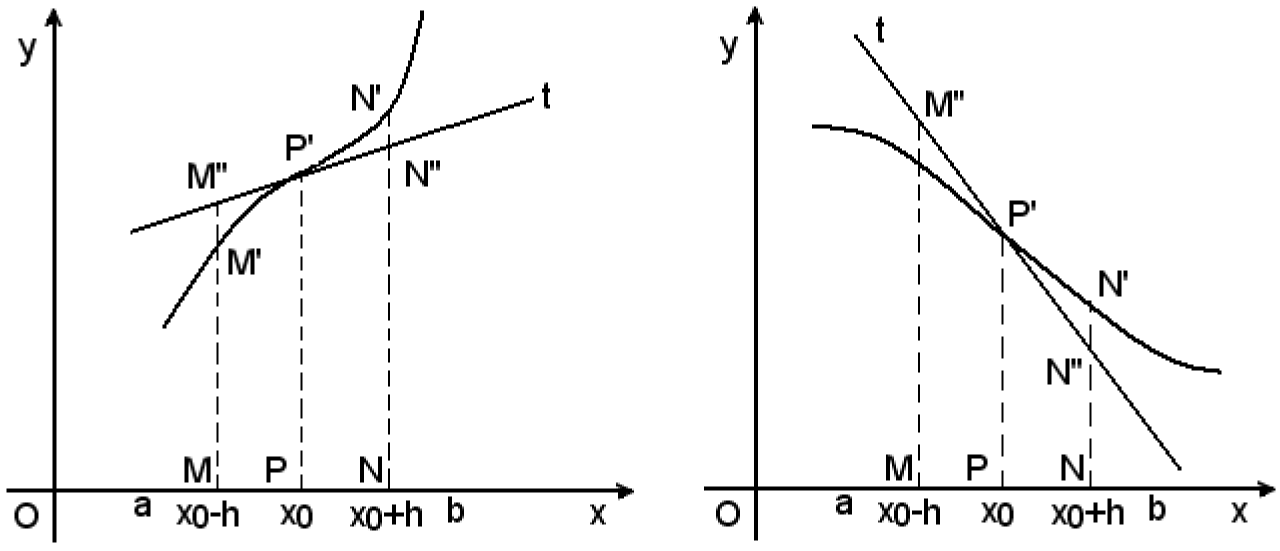


Fig.10 Fig.11

I flessi possono essere a tangente orizzontale, verticale e obliqua.

Flessi a tangente orizzontale

Data la funzione $y=f(x)$ definita e continua in un intorno completo I di x_0 e derivabile nello stesso intorno, x_0 è punto di flesso orizzontale se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $f'(x_0)=0$
2) il segno della derivata prima è lo stesso per ogni x diverso da x_0 dell'intorno I

Concavità e derivata seconda

Sia $y=f(x)$ una funzione definita e continua in un intervallo I, insieme con le sue derivate prima e seconda, e sia x_0 un punto interno a questo intervallo. Se in x_0 è $f''(x_0) \neq 0$, allora

1) la concavità è verso l'alto se $f''(x_0) > 0$
2) la concavità è verso il basso se $f''(x_0) < 0$

Una condizione necessaria per i flessi

Sia data una funzione y=f(x) definita in un intervallo [a,;] e in tale intervallo esistano le sue derivate prima e seconda. Se y=f(x) ha un flesso nel punto x_0 interno all'intervallo [a;b], allora la derivata seconda della funzione in quel punto è nulla, ossia $f''(x_0) = 0$

Ricerca dei flessi con lo studio della derivata seconda

Sia data una funzione y=f(x) definita e continua in un intorno completo I di x_0 e in tale intorno esistano le derivate prima e seconda della funzione, per $x \neq x_0$
Se per ogni $x \neq x_0$ dell'intorno si ha che:
$f''(x) > 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) < 0$ per $x > x_0$ oppure
$f''(x) < 0$ per $x < x_0$ e $f''(x) > 0$ per $x > x_0$
Allora x_0 è un punto di flesso.

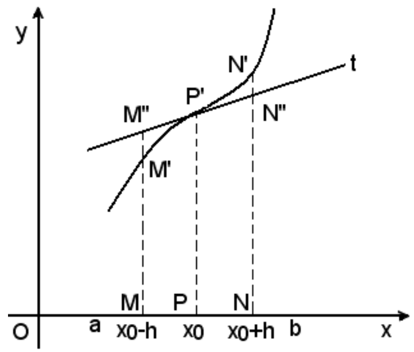


Fig.10

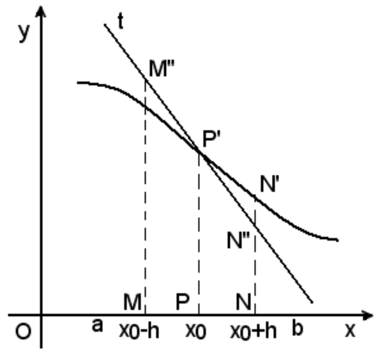
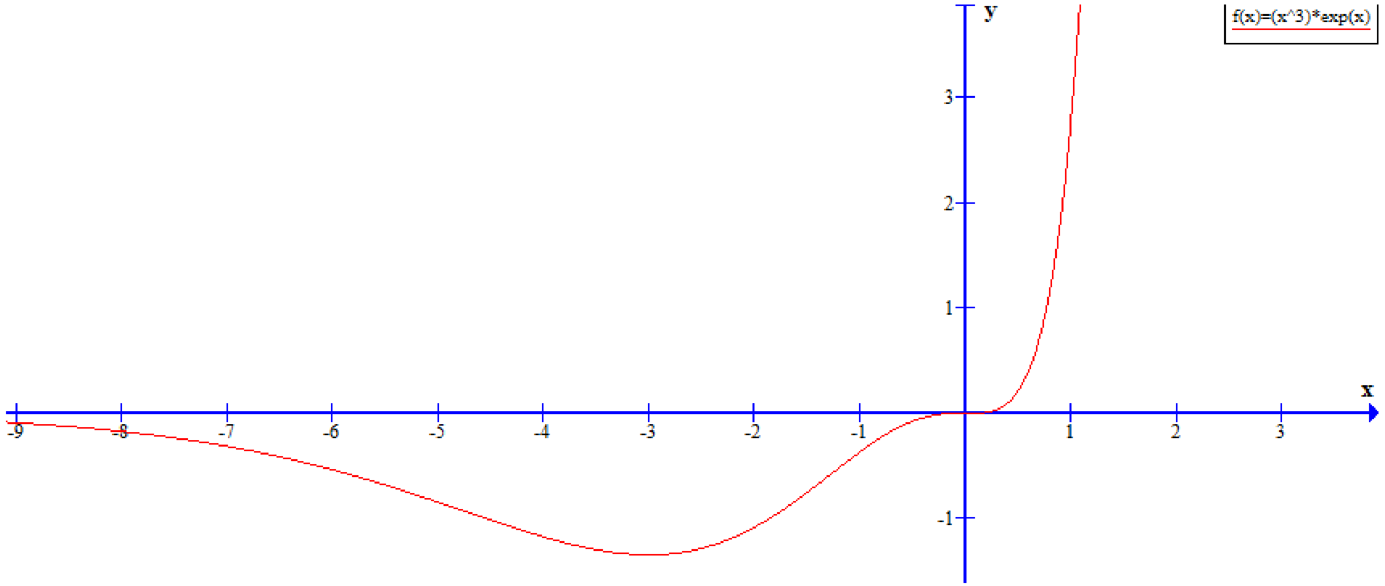


Fig.11

Schema generale per lo studio di una funzione:

- ✓ Determinazione del dominio
- ✓ Ricerca di eventuali simmetrie (pari, dispari …)
- ✓ Studio del segno della funzione
- ✓ Intersezioni con gli assi
- ✓ Limiti agli estremi del dominio
  - Ricerca di eventuali asintoti
  - Analisi delle discontinuità della funzione
- ✓ Derivata prima e monotonia
  - Determinazione del dominio di derivabilità
  - Ricerca di eventuali punti di non derivabilità
  - Ricerca di punti stazionari, massimi e minimi relativi, flessi a tangente orizzontale
- ✓ Derivata seconda e concavità:
  - Ricerca dei flessi a tangente obliqua
  - Analisi della concavità della funzione
- ✓ Costruzione del grafico (avviene durante lo studio e non alla fine, è un processo trasversale)

$y = x^3 e^x$



Ricerchiamo per la funzione suddetta il minimo relativo, il punto di flesso a tangente orizzontale e gli altri due punti di flesso.

<u>Dominio:</u> D = R

<u>Simmetrie:</u> $\forall x \in R \Longrightarrow -x \in R$, analizziamo $f(-x) = (-x)^3 e^{-x} = -x^3 \frac{1}{e^x} \neq f(x)$
e $f(-x) = (-x)^3 e^{-x} = -x^3 \frac{1}{e^x} \neq -f(x)$ quindi la funzione non è né pari, né dispari

Studio del segno:

$x^3e^x > 0 \Longrightarrow x > 0$ in quanto l'esponenziale è sempre positiva

Intersezioni con gli assi: $x^3e^x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^3e^x = +\infty$$

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui

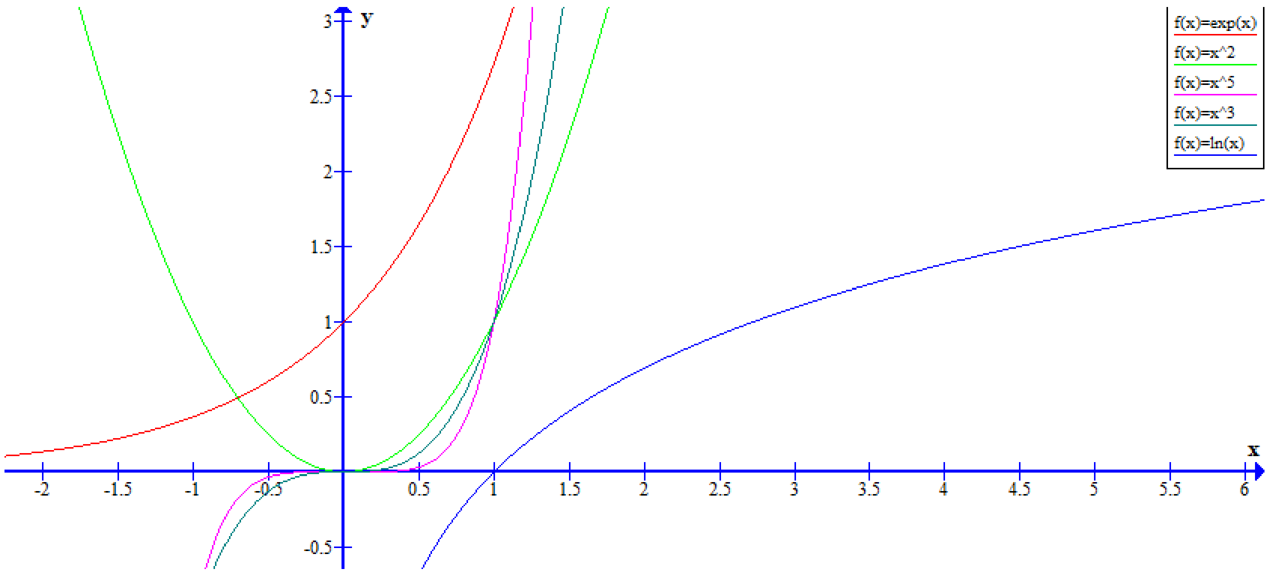
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^3e^x}{x} = +\infty \quad non\ ci\ sono\ asintoti\ obliqui$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^3e^x = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = 0 \qquad per\ la\ gerarchia\ degli\ infiniti$$

La funzione ammette un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (asse x)

NOTA: Ricordiamo la **gerarchia degli infiniti**

Per $x \to +\infty$ le funzioni logaritmiche (con base >1) tendono a infinito meno rapidamente delle potenze, che a loro volta tendono ad infinito meno rapidamente delle funzioni esponenziali(con base >1)



Ciò implica che:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^\alpha}{log_a x}=+\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{log_a x}{x^\alpha}=0$$

Derivata prima e monotonia:

$$y = x^3 e^x \Longrightarrow y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x) \qquad D' = D = R$$

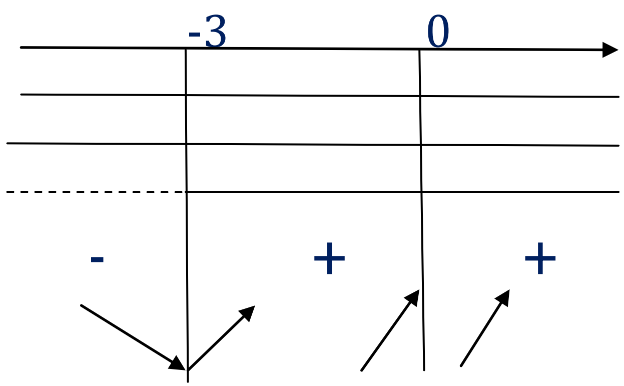
Non ci sono punti di non derivabilità

- Ricerca dei punti stazionari: y’ = 0

$$y' = 0 \Longrightarrow x^2 e^x (3 + x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = -3$$

- Studio del segno della derivata prima:

$$y' > 0 \Longrightarrow x^2 e^x (3 + x) > 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} F1: x^2 > 0, \forall x \in R, x \neq 0 \\ F2: e^x > 0, \forall x \in R \\ F3: 3 + x \Longrightarrow x > -3 \end{array}$$



x = -3 punto di minimo relativo

x = 0 punto di flesso a tangente orizzontale

La funzione è decrescente per x < -3, mentre è crescente per x > -3

Derivata seconda e concavità:

$$y' = x^2e^x(3+x) \Longrightarrow y'' = 2xe^x(3+x) + x^2e^x(3+x) + x^2e^x =$$
$$= xe^x(6+2x+3x+x^2+x) = xe^x\,(x^2+6x+6)$$

- Ricerca dei flessi:

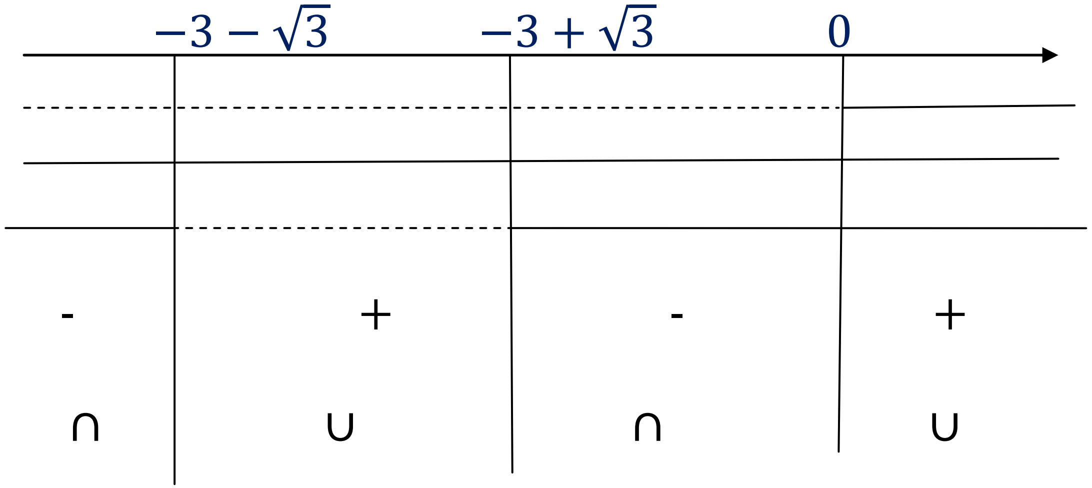
$$y'' = xe^x\,(x^2+6x+6) = 0$$
$$x = 0 \vee x^2+6x+6 = 0$$

Applico la formula risolutiva: $x = -3 \pm \sqrt{9-6} = -3 \pm \sqrt{3}$

- Studio del segno della derivata seconda: $y'' > 0$

$$xe^x\,(x^2+6x+6) > 0$$

$F1: x > 0$
$F2: e^x > 0, \forall x \in R$
$F3: x^2+6x+6 > 0 \Longrightarrow x < -3-\sqrt{3} \vee x > -3+\sqrt{3}$



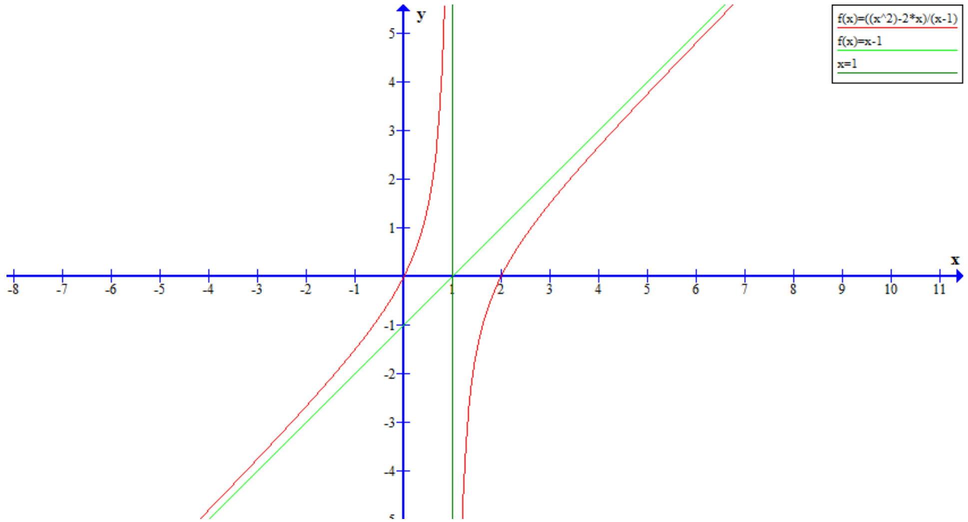
La funzione è concava per $x < -3-\sqrt{3} \ \vee \ -3+\sqrt{3} < x < 0$
La funzione è convessa per $-3-\sqrt{3} < x < -3+\sqrt{3} \ \vee \ x > 0$

$$x = 0 \ \ punto\ di\ flesso\ a\ tangente\ orizzontale$$

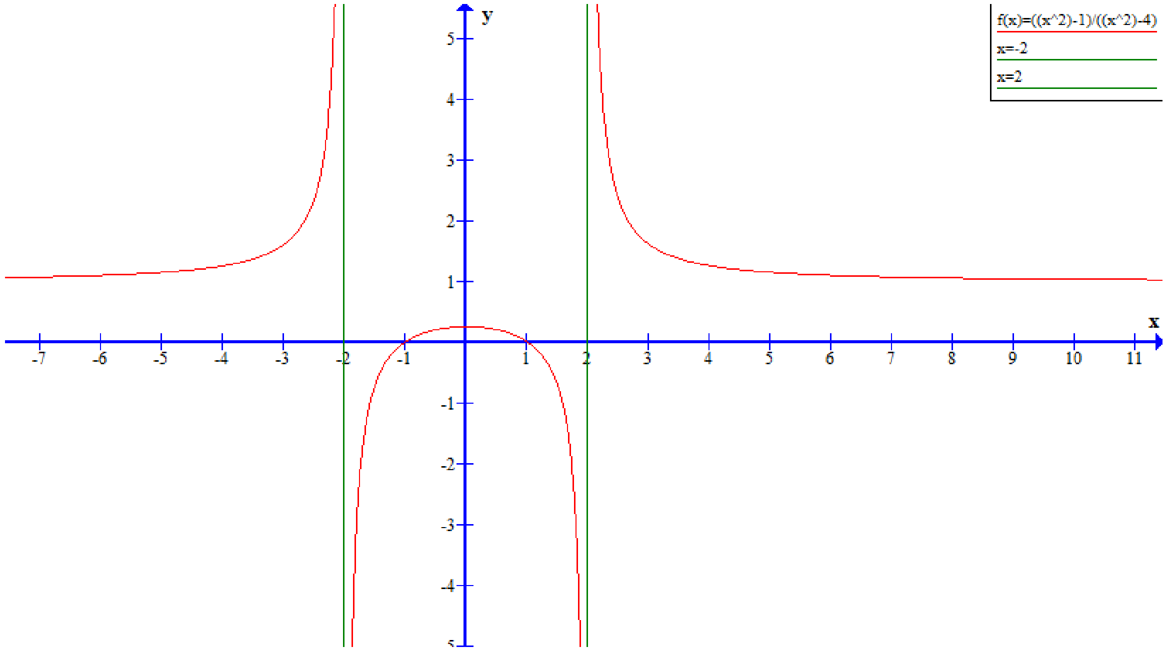
$$x = -3-\sqrt{3}\,, \qquad x = -3+\sqrt{3} \ \ punti\ di\ flesso\ a\ tangente\ obliqua$$

Esercizi. Studiare le seguenti funzioni, rappresentandone il grafico e controllare con il programma Graph la correttezza dello studio effettuato.

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

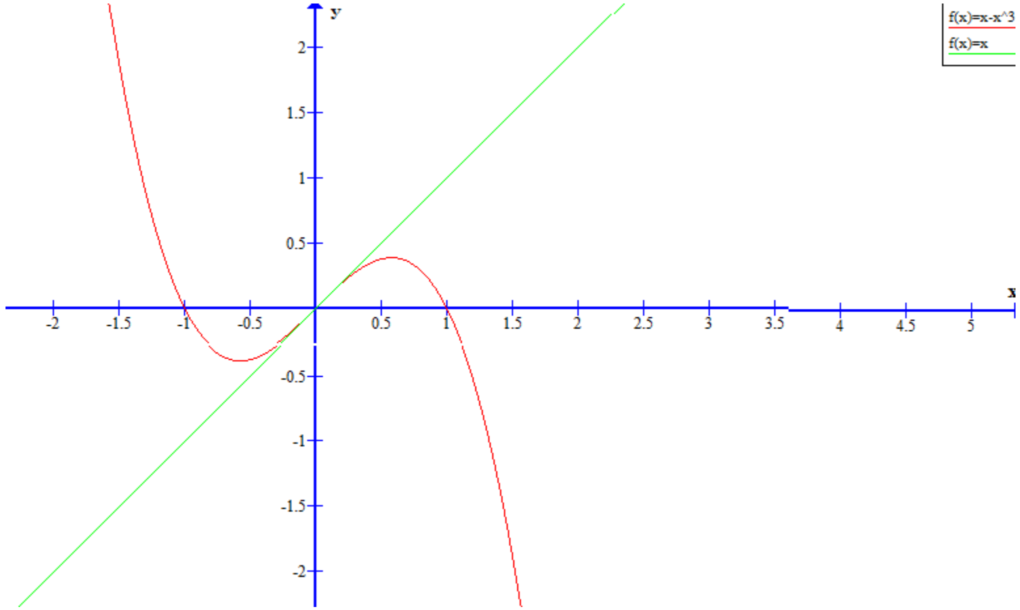


$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

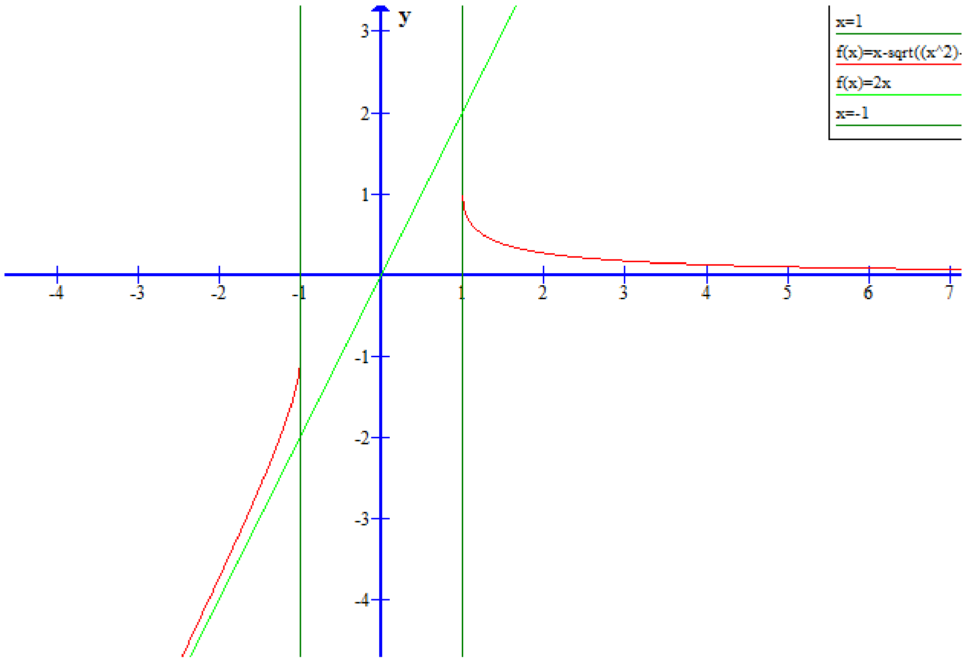


$$y = x - x^3$$

Con la tangente in flessionale
y = x



$$y = x - \sqrt{x^2 - 1}$$



Teorema di De l'Hospital

Dato un intorno I di un punto c e due funzioni y = f(x) e y=g(x) definite in I, escluso al più c, se:

- ✓ f(x) e g(x) sono derivabili in $I - \{c\}$ $\;con\; g^{'}(x) \neq 0$
- ✓ le due funzioni tendono entrambe a 0 o ad ∞ $\quad per\; x \to c$
- ✓ per $x \to c$ esiste il limite del rapporto $\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ delle loro derivate

allora:

esiste il limite del rapporto delle funzioni e risulta:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Applicazioni:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + lnx}{2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}$$

<u>Oss. Non sempre tale teorema è applicabile</u>:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + senx}{7x - senx}$$

In tal caso viene a cadere l'ultima ipotesi del teorema, in quanto non esiste il limite del rapporto tra le derivate:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + cosx}{7x - cosx}$$

Ciò però non implica la non esistenza del limite tra le due funzioni, indica solo che va calcolato in altro modo, ma non applicando il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + senx}{7x - senx} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{senx}{x}}{7 - \frac{senx}{x}} = \frac{2}{7}$$

$y = \log(1 - |x|)$