Matrici associate

Data $f: V \longrightarrow V'$ applicazione lineare tra spazi di dimensione finita. Supponiamo $\dim V = n$, $\dim V' = m$, fissiamo basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di V'; allora è determinata $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ (le sue colonne sono le coordinate delle immagini degli elementi di $\mathcal{B}$ attraverso f rispetto a $\mathcal{C}$). Abbiamo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \in M_{m,n}(K)$$

Proprietà della matrice associata:

i. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \mathbb{1}_n$ (attenzione $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)$ non è necessariamente $\mathbb{1}_n$)

ii. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\text{applicazione nulla}) = \text{matrice nulla}$

iii. Se $\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{C}}{V'}$ e $\underset{\mathcal{C}}{V'} \xrightarrow{g} \underset{\mathcal{D}}{V''}$ sono lineari

allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(g \circ f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$

prodotto righe per colonne

("la matrice associata alla composta è il prodotto delle matrici associate")

iv. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)$ è l'inversa di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)$

v. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f+g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$ per ogni $f, g: V \longrightarrow V'$

vi. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$.

Oss: se $f: V \longrightarrow V$, con $\dim V = n$, è un isomorfismo (ovvero f è una applicazione lineare ed è biettiva, quindi invertibile), allora $f^{-1}: V \to V$ è anch'essa lineare ed abbiamo che, se $\mathcal{B}$ è base di V, allora

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = \mathbb{1}_n$$

quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è invertibile e la sua inversa è $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$, ovvero

$$\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$$

Ricordiamo inoltre che se $f: V \longrightarrow V'$ e $\mathcal{B}$ è base di V e $\mathcal{C}$ è base di V', se $v \in V$ e $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, allora $\underset{m \times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)} \cdot \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}$ è un vettore $m \times 1$ ed è il vettore delle coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{C}$.

Studiamo questo risultato nel caso particolare in cui abbiamo $f = id_V$, quindi abbiamo $id_V: V \to V$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di V. Allora se $v \in V$ e $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, abbiamo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di $id_V(v) = v$ rispetto alla base $\mathcal{C}$. Pertanto, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V)$ è la matrice del cambio di base.

Da tutti questi risultati deriviamo che, se

$$f: V \longrightarrow V'$$

è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita e

$\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ sono basi di V

$\mathcal{C}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ sono basi di V'

allora abbiamo che

$$M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f) = M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(id_{V'} \circ f \circ id_V) =$$

$$= M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(id_{V'}) \cdot M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(f) \cdot M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{B}}}(id_V)$$

Pertanto, se conosciamo $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$, possiamo ottenere $M^{\tilde{\mathcal{B}}}_{\tilde{\mathcal{C}}}(f)$ moltiplicando a destra e a sinistra $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ per due matrici di cambio di base.

In particolare, se $f: V \longrightarrow V$ (attenzione, dominio e codominio qui coincidono) e se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono due basi di V, allora

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

Notiamo che se $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)^{-1} = P^{-1}$

Quindi l'uguaglianza precedente si può scrivere come

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

Def: due matrici quadrate $A, B \in M_n(K)$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $P \in M_n(K)$ tale che

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Pertanto possiamo riassumere quanto ottenuto finora dicendo che se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare con $\dim V = n$, e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di V, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ sono simili e vale

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

dove $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$.

Questo risultato ci consente quindi di determinare la matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a una base differente da quella che potremmo aver considerato in partenza. La speranza è di riuscire a trovare basi rispetto alle quali l'applicazione lineare abbia una forma abbastanza semplice.

Prima di passare a questo argomento concludiamo con un risultato generale.

Def: siano V e V' due spazi vettoriali su K di dimensione finita

$\dim V = n$, $\dim V' = m$

definiamo

$$\mathcal{L}(V, V') = \{\text{applicazioni lineari da } V \text{ in } V'\}$$

abbiamo che, definendo la somma tra applicazioni in maniera "puntuale" ($(f+g)(v) = f(v) + g(v)$) e analogamente la moltiplicazione di una applicazione lineare per uno scalare ($(\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot f(v)$), allora $\mathcal{L}(V, V')$ diventa uno spazio vettoriale su K.

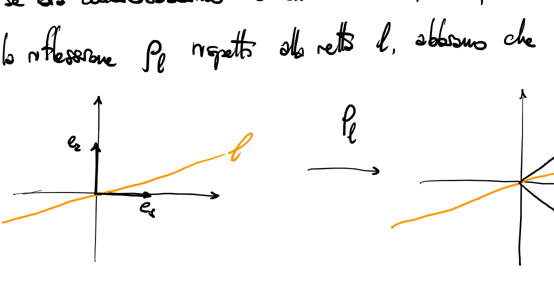
Teorema: nelle ipotesi della definizione precedente, fissata $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{C}$ una base di V', abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V, V') &\longrightarrow M_{m,n}(K) \\ f &\longmapsto M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

è un'applicazione lineare ed è biettiva, ovvero è un isomorfismo.

Diagonalizzazione

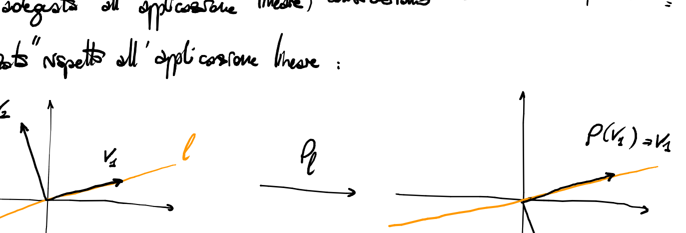
Esempio: consideriamo nel piano $\mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto all'asse delle ordinate, ovvero:



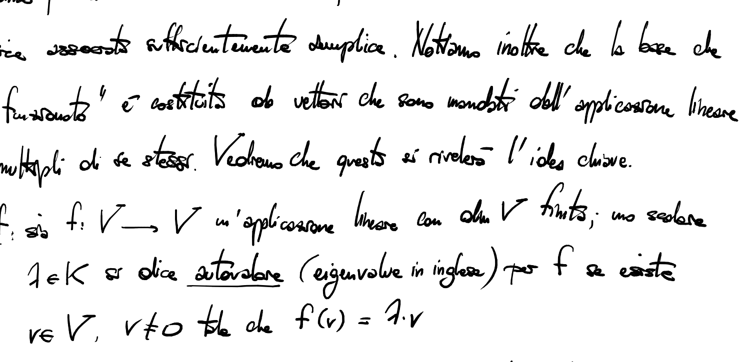
la riflessione ρ è un'applicazione lineare e se $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^2$, allora

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se ora considerassimo una retta ℓ che passa per $(0,0)$ e la riflessione ρ_ℓ rispetto alla retta ℓ, abbiamo che



dal disegno possiamo notare che non è immediato comprendere come sia fatta $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho_\ell)$; possiamo interpretare questa difficoltà nel determinare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\rho_\ell)$ come il fatto di non aver scelto una base 'adeguata' all'applicazione lineare; consideriamo ora una base "personalizzata" rispetto all'applicazione lineare:



allora se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ abbiamo che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e che vale $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\rho_\ell) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Notiamo pertanto che cambiare base può essere efficace nell'ottenere una matrice associata sufficientemente semplice. Notiamo inoltre che la base che "ha funzionato" è costituita da vettori che sono mandati dall'applicazione lineare in multipli di se stessi. Vedremo che questa si rivelerà l'idea chiave.

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita; uno scalare $\lambda \in K$ si dice autovalore (eigenvalue in inglese) per f se esiste $v \in V$, $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$

Oss: considerando ρ_ℓ come nell'esempio precedente abbiamo che 1 e -1 sono autovalori di ρ_ℓ (infatti $\rho_\ell(v_1) = 1 \cdot v_1$ e $\rho_\ell(v_2) = (-1) \cdot v_2$ ed entrambi v_1 e v_2 sono non nulli)

Def: data f come sopra, l'insieme degli autovalori di f si dice spettro di f e si indica $Sp(f)$.

Def: sia f come sopra e sia λ un autovalore di f; diciamo che $v \in V$ è un autovettore (eigenvector in inglese) di f relativo a λ se $f(v) = \lambda \cdot v$; definiamo l'autospazio (eigenspace in inglese) di λ l'insieme degli autovettori di λ e lo denotiamo $Aut(\lambda)$.

Oss: affinché λ sia autovalore, deve esistere $v \in V$, $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$; se λ è autovalore, consideriamo autovettore relativo a λ ogni vettore $w \in V$ tale che $f(w) = \lambda \cdot w$; in particolare $f(0) = \lambda \cdot 0$, dunque vale che $0 \in Aut(\lambda)$ per ogni autovalore λ.

Prop: sia $f: V \longrightarrow V$ applicazione lineare con $\dim V$ finita, sia λ un autovalore di f, allora l'autospazio di λ, $Aut(\lambda)$, è un sottospazio vettoriale di V.

Dim: 1. sia $v \in V$, sia $\mu \in K$, e sia $v \in Aut(\lambda)$; dobbiamo mostrare che $\mu \cdot v \in Aut(\lambda)$; per ipotesi $f(v) = \lambda \cdot v$; ora

$$\mu \cdot v \in Aut(\lambda) \Leftrightarrow f(\mu \cdot v) = \lambda \cdot (\mu v)$$

d'altra parte $f(\mu \cdot v) = \mu \cdot f(v) = \mu \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

2. siano $v_1, v_2 \in V$, e supponiamo $v_1, v_2 \in Aut(\lambda)$, dobbiamo mostrare che $v_1 + v_2 \in Aut(\lambda)$; per ipotesi $f(v_1) = \lambda \cdot v_1$ e $f(v_2) = \lambda \cdot v_2$, pertanto

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

dunque $v_1 + v_2 \in Aut(\lambda)$.

Prop: sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita e siano λ e μ due autovalori distinti di f; siano $v_1 \in Aut(\lambda)$ e $v_2 \in Aut(\mu)$ e supponiamo che $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$; allora v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

L'obiettivo delle nostre considerazioni sarà capire se, data una applicazione lineare $f: V \longrightarrow V$ sia possibile determinare una base $\mathcal{B}$ di V tutta costituita da autovettori. In tal caso, infatti, la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale.

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita; f si dice diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.