Diagonalizzabilità

Oss: ricordiamo che se $f: V \longrightarrow V$ è applicazione lineare, $\dim V$ finita e $N = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $N' = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$, allora

$$N' = P^{-1} \cdot N \cdot P$$

dove P è una matrice invertibile; pertanto possiamo dire che f è diagonalizzabile se e solo se, presa una sua matrice associata $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ rispetto a una base $\mathcal{B}$ di V, tale matrice è simile a una matrice diagonale, ovvero se esiste P invertibile tale che $P^{-1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot P$ è diagonale.

Prop: sia $f: V \longrightarrow V$ applicazione lineare, $\dim V$ finita, allora f è diagonalizzabile se e solo se esiste una base $\mathcal{B}$ di V costituita tutta da autovettori.

Dim: se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base costituita da autovettori, e per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i è autovettore associato all'autovalore λ_i (ovvero vale che $f(v_i) = \lambda \cdot v_i$), allora

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ovvero tale matrice è diagonale (notiamo che non abbiamo supposto che i $\{\lambda_i\}$ siano tutti distinti)

Per comprendere se una tale base può esistere, andiamo a ripensare gli autospazi in maniera differente. In particolare, andiamo a ridimostrare che gli autospazi sono sottospazi vettoriali in una maniera alternativa.

Sia $f: V \longrightarrow V$, con $\dim V$ finita e sia $\lambda \in K$ un autovalore di f. Allora per definizione esiste $v \in V$, con $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda \cdot v$. Ora

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow f(v) - \lambda \cdot id_V(v) = 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(f - \lambda \cdot id)}_{:= f_\lambda}(v) = 0.$$

Allora $f_\lambda : V \longrightarrow V$ e $v \in \ker f_\lambda$. Pertanto $\ker f_\lambda \neq (0)$ perché $v \neq 0$. Ciò significa che f_λ non è iniettiva. Pertanto f_λ non è invertibile e dunque per qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V vale che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\lambda) \text{ \underline{non} è invertibile} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda \cdot id) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id) \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \mathbb{1}_n \right) = 0$$

Pertanto gli autovalori di f sono tutti e soli i valori $\lambda \in K$ tali per cui $\det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_n \right) = 0$ per una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di V.

Inoltre, $Aut(\lambda) = \{ v \in V : f(v) = \lambda v \} =$
$$= \{ v \in V : (f - \lambda id)(v) = 0 \}$$
$$= \{ v \in V : f_\lambda(v) = 0 \}$$
$$= \ker f_\lambda.$$

Pertanto, essendo $Aut(\lambda)$ il nucleo di una applicazione lineare, riotteniamo il risultato che $Aut(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ applicazione lineare, $\dim V$ finita, sia $\lambda \in K$ un autovalore per f; il numero

$$\dim_K Aut(\lambda)$$

è detto la <u>molteplicità geometrica</u> dell'autovalore λ.

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ applicazione lineare, $\dim V$ finita e consideriamo ora λ come un parametro, una variabile; formiamo il determinante

$$\det \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda \cdot id \right)$$

dove $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base di V; questa quantità è un <u>polinomio</u> in λ a coefficienti in K ed è detto il <u>polinomio caratteristico</u> di f ed è denotato $P_f(\lambda)$.

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

se consideriamo la base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, allora

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico è dunque

$$P_f(\lambda) = \det \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_2 \right) =$$
$$= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \det \left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right) =$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 =$$
$$= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda$$

Oss: per come abbiamo caratterizzato gli autovalori, abbiamo che gli autovalori di f sono tutti e solo quei $\bar{\lambda} \in K$ tali per cui $P_f(\bar{\lambda}) = 0$, ovvero sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico dell'applicazione f.

Esempio: (continuando da prima)

$$P_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda \cdot (\lambda - 3)$$

quindi le radici di $P_f(\lambda)$ sono $\{0, 3\}$; otteniamo quindi che 0 e 3 sono gli autovalori di f; esistono dunque autovettori non nulli v_1 (rispetto a 0) e v_2 (rispetto a 3); dato che autovettori non nulli rispetto ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, otteniamo che $\{v_1, v_2\}$ sono vettori linearmente indipendenti, e pertanto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e quindi f ammette una base di autovettori, ovvero è diagonalizzabile; possiamo calcolare v_1 e v_2 determinando

$$\ker(f_0) = \ker(f - 0 \cdot id) = \ker f \quad \text{e}$$
$$\ker(f_3) = \ker(f - 3 \cdot id)$$

che sono rispettivamente $Aut(0)$ e $Aut(3)$

Def: sia $f: V \longrightarrow V$ applicazione lineare con $\dim V$ finita e sia $P_f(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico; supponiamo che $\bar{\lambda} \in K$ sia un autovalore per f, ovvero $P_f(\bar{\lambda}) = 0$; per il teorema di Ruffini vale che $P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot g(\lambda)$; definiamo la <u>molteplicità algebrica</u> di $\bar{\lambda}$ come quel numero naturale m tale per cui

$$P_f(\lambda) = (\lambda - \bar{\lambda})^m \cdot \tilde{g}(\lambda) \quad \text{e} \quad \lambda - \bar{\lambda} \text{ \underline{non} divide } \tilde{g}(\lambda)$$

Esempio: se $P_f(\lambda) = (\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda + 1)^3$, allora le radici di $P_f(\lambda)$ sono 5 e -1 e la <u>molteplicità</u> algebrica di 5 è 2, mentre la molteplicità algebrica di -1 è 3.

Notazione, denotiamo

$$\text{molteplicità geometrica di } \bar{\lambda} = m_g(\bar{\lambda})$$
$$\text{molteplicità algebrica di } \bar{\lambda} = m_a(\bar{\lambda})$$

Prop: se $f: V \longrightarrow V$ è applicazione lineare con $\dim V$ finita e $\bar{\lambda}$ è un autovalore per f, allora $m_g(\bar{\lambda}) \leq m_a(\bar{\lambda})$.

Oss: se $f: V \longrightarrow V$ è applicazione lineare e $\dim V = n$, allora $P_f(\lambda)$ è un polinomio di grado esattamente n; pertanto la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di f è al più n.

Supponiamo di avere un'applicazione lineare $f: V \longrightarrow V$ con $\dim V = n$ tale per cui $P_f(\lambda)$ si scompone nel prodotto di n fattori lineari distinti, ovvero $P_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_n)$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tutti distinti. Allora $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici di $P_f(\lambda)$ e dunque sono autovalori di f. Per ciascuno di tali autovalori esiste almeno un autovettore non nullo. In questo modo determiniamo $v_1, \dots, v_n$ con v_i autovettore relativo ad α_i. Ora, $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori non nulli relativi ad autovalori differenti, quindi sono linearmente indipendenti; essendo essi n vettori in uno spazio vettoriale di dimensione n, essi sono una base di V. Pertanto in questo caso f è diagonalizzabile. Notiamo inoltre che $m_a(\alpha_i) = 1 \ \forall i$ e dunque deve essere $m_g(\alpha_i) = 1 \ \forall i$; il che implica che $\dim Aut(\alpha_i) = 1$ per ogni i, e dato che $v_i \in Aut(\alpha_i)$ e $v_i \neq 0$, quindi $Aut(\alpha_i) = span(v_i)$.

Vale un teorema più generale.

Teorema: (criterio di diagonalizzazione)

sia $f: V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con $\dim V$ finita; f è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. $P_f(\lambda)$ si scompone completamente in fattori di primo grado (non necessariamente distinti)
2. per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ (ovvero per ogni radice di $P_f(\lambda)$) vale che $m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\bar{\lambda})$

(quindi 1. dice che $P_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_k)^{m_k}$ e 2. dice che $m_i = \dim Aut(\alpha_i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$)

Esempio: consideriamo la seguente applicazione lineare

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ -y \\ -3x + 2z \end{pmatrix}$$

allora se $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$ vale che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vogliamo comprendere se f sia diagonalizzabile o meno; calcoliamo $P_f(\lambda)$

$$P_f(\lambda) = \det \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{1}_3 \right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -(\lambda+1) \cdot \left[(2-\lambda)^2 - 9 \right] = -(\lambda+1) \cdot \left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 9 \right]$$
$$= -(\lambda+1) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda - 5) =$$
$$= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-5) =$$
$$= -(\lambda+1)^2 (\lambda - 5)$$

abbiamo quindi che le radici di $P_f(\lambda)$ sono -1 e 5, ovvero $Sp(f) = \{-1, 5\}$ (lo spettro di f); abbiamo che $P_f(\lambda)$ si scompone completamente in fattori di grado 1, e vale che

$$m_a(-1) = 2, \quad m_a(5) = 1$$

per vedere se f sia diagonalizzabile o meno dobbiamo verificare se

$$m_g(-1) = 2 \quad \text{e} \quad m_g(5) = 1$$

sicuramente $m_g(5) = 1$ perché dal fatto che 5 è autovalore segue che $m_g(5) \geq 1$ e in generale $m_g(5) \leq m_a(5) = 1$; resta da verificare se $m_g(-1) = 2 \Leftrightarrow \dim Aut(-1) = 2$

per calcolare $Aut(-1)$ consideriamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) - (-1) \cdot \mathbb{1}_3 = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) + \mathbb{1}_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = span\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

pertanto $\dim \ker(f - (-1) \cdot id) = 2$, ovvero $m_g(-1) = 2$, quindi per il teorema precedente f è diagonalizzabile.