ESERCIZI SU APPLICAZIONI LINEARI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera l'applicazione lineare
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
determinata dalle condizioni
$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Scrivi l'immagine del generico elemento $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ di $\mathbb{R}^3$ attraverso f.

Risoluzione. Chiamando e_i l'i-esimo elemento della base standard di $\mathbb{R}^3$, ovvero
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
abbiamo che
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ora, vale che
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3\,.$$
Pertanto
$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) &= a\,f(e_1) + b\,f(e_2) + c\,f(e_3) \\ &= a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a - b \\ a + 2b + c \\ 3a + b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2

Considera i due insiemi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Verifica che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi per $\mathbb{R}^2$. **Determina** la matrice rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dell'applicazione identica:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risoluzione. Formiamo le matrici 2×2 le cui colonne sono rispettivamente i vettori di $\mathcal{B}$ e di $\mathcal{C}$:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che, per una matrice quadrata $A \in M_n(K)$ vale che

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) = K^n .$$

Quindi se $\det(A) \neq 0$, le colonne di A sono un sistema di generatori per K^n ed essendo esse esattamente in numero di n, sono anche linearmente indipendenti. Pertanto per vedere se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$ è sufficiente controllare se $\det(B) \neq 0$ e $\det(C) \neq 0$. Vale che

$$\det(B) = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 2 , \quad \det(C) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 2 .$$

Quindi sia $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$.

Al fine di scrivere $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ è necessario scrivere le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ attraverso $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{C}$. Vale che

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi otteniamo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 3

Considera le seguenti tre applicazioni lineari

$$\begin{aligned} f_1\colon \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y-z \\ x-y+2z \end{pmatrix} \\ f_2\colon \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y+z \\ x-y+2z \end{pmatrix} \\ f_3\colon \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y+z \\ x-y-2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard di $\mathbb{R}^3$. **Verifica** se, dato $i \in \{1,2,3\}$, l'insieme $\{f_i(e_1), f_i(e_2), f_i(e_3)\}$ sia o meno una base di $\mathbb{R}^3$.

Risoluzione. Consideriamo a uno a uno i tre casi.

(1) Vale che

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Come abbiamo ragionato nell'esercizio precedente, i vettori $f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se la matrice 3×3 le cui colonne sono i tre vettori ha determinante non nullo. Vale che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -6$$

Pertanto i tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) Vale che

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ragionando come al punto precedente

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Pertanto i tre vettori non sono una base di $\mathbb{R}^3$.

(3) Vale che

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f_1(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ragionando come al punto precedente

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 12$$

Pertanto i tre vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4

Disegna nel piano le immagini dei due vettori

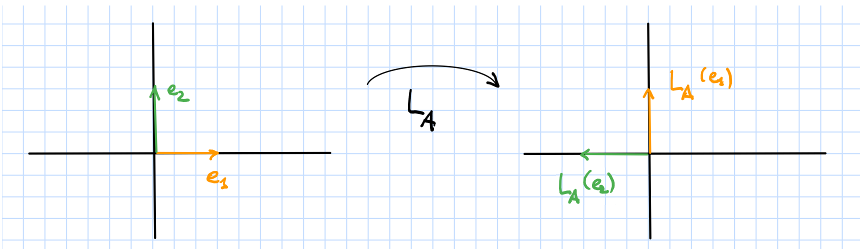
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

attraverso le applicazioni lineari L_A, dove la matrice A è uguale a

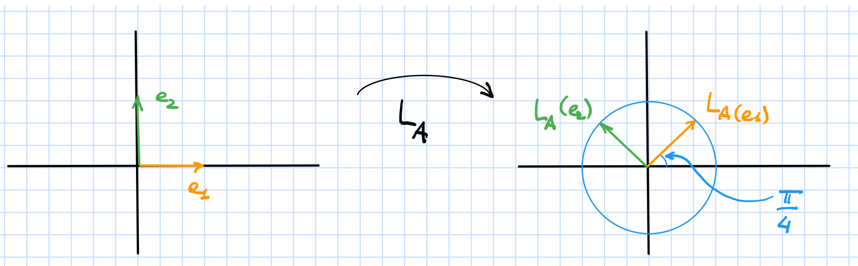
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione.

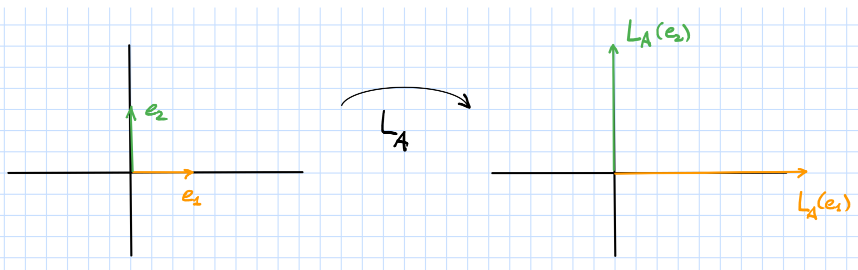
- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



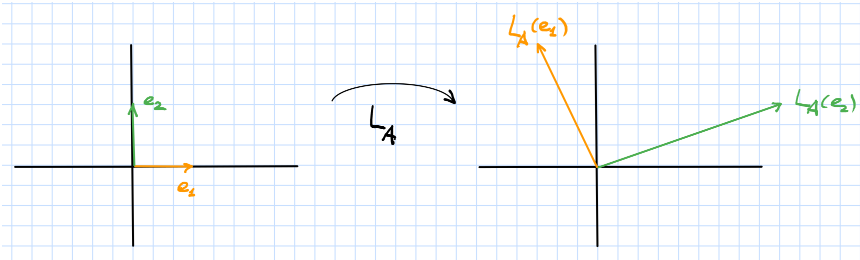
- $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$



- $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



- $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



Esercizio 5

Verifica che la funzione

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & x + \sqrt[3]{x^3+y^3} \end{array}$$

è omogenea, ma non lineare.

Risoluzione. Verifichiamo che la funzione f è omogenea, ovvero mostriamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ vale che $f(\lambda\, v) = \lambda\, f(v)$. Sia dunque $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Abbiamo

$$\begin{aligned} f(\lambda\, v) = f(\begin{pmatrix} \lambda\, x \\ \lambda\, y \end{pmatrix}) &= \lambda\, x + \sqrt[3]{(\lambda\, x)^3 + (\lambda\, y)^3} \\ &= \lambda\, x + \sqrt[3]{\lambda^3\, x^3 + \lambda^3\, y^3} = \lambda\, x + \lambda \sqrt[3]{x^3+y^3} \\ &= \lambda(x + \sqrt[3]{x^3+y^3}) = \lambda\, f(v)\,. \end{aligned}$$

Pertanto f è omogenea.

Per verificare che f non è lineare, mostriamo quindi che non è additiva. Per fare ciò è sufficiente esibire una coppia v_1, v_2 di vettori di $\mathbb{R}^2$ tali per cui $f(v_1+v_2) \neq f(v_1) + f_(v_2)$. Se scegliamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora $f(v_1) = 1 + \sqrt[3]{1^3+0^3} = 2$ e $f(v_2) = 0 + \sqrt[3]{0^3+1^3} = 1$ quindi $f(v_1) + f(v_2) = 3$. D'altro canto $v_1 + v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, pertanto $f(v_1+v_2) = 1 + \sqrt[3]{1^3+1^3} = 1 + \sqrt[3]{2}$. Quindi $f(v_1+v_2) \neq f(v_1) + f_(v_2)$, ovvero f non è additiva.

Esercizio 6

Per ciascuna delle seguenti matrici $A \in M_3(\mathbb{Q})$, **determina** una base di $\ker(L_A)$ e **determina** se il vettore

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

appartenga o meno a $\operatorname{im}(L_A)$; in tal caso, determina tutti gli elementi del dominio di L_A la cui immagine sia $\bar{w}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione. Una base di $\ker(L_A)$ è ottenibile risolvendo il sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Così facendo otteniamo:

- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che $\ker(L_A)$ è l'insieme con il solo vettore nullo. In questo caso per definizione una base di $\ker(L_A)$ è data dall'insieme vuoto.
- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che una base di $\ker(L_A)$ è data da $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$.
- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che una base di $\ker(L_A)$ è data da $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Analizziamo ora la questione se $\bar{w} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ appartenga o meno all'immagine di L_A. Abbiamo che $\bar{w} \in \mathrm{im}(L_A)$ se e solo se il sistema lineare $AX = \bar{w}$ è compatibile.

- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dato che abbiamo visto che A ha nucleo dato dal solo vettore nullo, sappiamo che A è invertibile. In questo caso, per il teorema di Cramer il sistema lineare $AX = \bar{w}$ è compatibile, e la sua unica soluzione (dunque, l'unico vettore v del dominio la cui immagine sia $\bar{w}$) è data da $A^{-1}\bar{w}$. Abbiamo quindi che tale vettore v è dato da
$$v = A^{-1}\bar{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che $\bar{w} = A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(2)}$, dunque $\bar{w} \in \mathrm{im}(L_A)$. Il sistema lineare $AX = \bar{w}$ ammette dunque come soluzione particolare $\tilde{s} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Per trovare tutte le soluzioni dobbiamo determinare l'insieme W delle soluzioni di $AX = 0$. Otteniamo
$$W = \{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q}\} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$
Quindi le soluzioni di $AX = \bar{w}$ sono della forma
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{per } t \in \mathbb{Q}.$$
- Per $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ abbiamo che $\mathrm{rg}(A) = 2$, mentre $\mathrm{rg}(A|\bar{w}) = 3$, pertanto per il teorema di Rouché-Capelli il sistema $AX = \bar{w}$ non è compatibile e quindi $\bar{w} \notin \mathrm{im}(L_A)$.