

ESERCIZI SU DIAGONALIZZAZIONE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- (i) **Scrivi** la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f associata alla base standard \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .
- (ii) **Calcola** il polinomio caratteristico di f .
- (iii) **Determina** lo spettro di f .
- (iv) **Decidi** se f sia diagonalizzabile o meno.
- (v) Nel caso in cui f sia diagonalizzabile, **determina** una base \mathcal{B} di autovettori di f e **calcola** le due matrici del cambiamento di base $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(1)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7x + 2y + 14z \\ 10x + 3y + 22z \\ -5x - y - 10z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3x - 2y + 2z \\ 3x + z \\ -3y + 6z \end{pmatrix}$$

(3)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x \\ -8x + 6z \\ -4x - y + 5z \end{pmatrix}$$

(4)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + 5y - z \\ 5y - z \\ 9y - z \end{pmatrix}$$

(5)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x - 3y + 9z \\ -9x - 7y + 27z \\ -3x - 3y + 11z \end{pmatrix}$$

(6)

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -11x - 6y + 6z \\ 20x + 13y - 4z \\ -5x - 3y + 2z \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Considera una generica applicazione lineare:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono generici numeri reali. Sia \mathcal{E} la base standard di \mathbb{R}^2 e considera la matrice associata $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. **Dimostra** che, se denotiamo con $p_f(\lambda)$ il polinomio caratteristico di f , allora $p_f(\lambda)$ si può scrivere come

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)) + \det(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)),$$

dove $\text{tr}(\cdot)$ è la *traccia* di una matrice, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale.

Esercizio 3

Dimostra che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

Esercizio 4

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia \mathcal{E} la base standard di \mathbb{R}^n . **Dimostra** che $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L_A)$.

Esercizio 5

Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Supponiamo che f sia diagonalizzabile. **Dimostra** che l'applicazione lineare $f \circ f$, ottenuta componendo f con se stessa, è anch'essa diagonalizzabile.