SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto con frontiera ∂U regolare (C^1 a tratti) e sia

$$\varphi : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

continua t.c.

a) $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ iniettiva

b) $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1,

con $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right)$ e

$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right)$

linearmente indipendenti, ovvero le colonne di

$$J\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

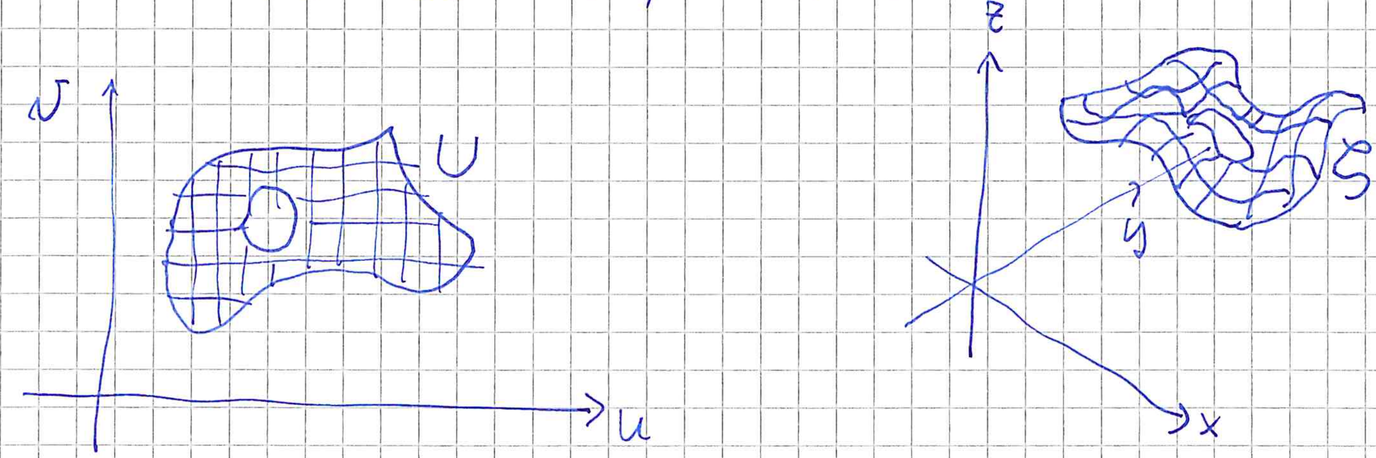
Allora $S := \{ \varphi(u,v) \mid (u,v) \in \overline{U} \} = \varphi(\overline{U})$

si dice superficie regolare, e

φ è una parametrizzazione di S.

Se φ è iniettiva su $\overline{U}$, allora

$\varphi(\partial U)$ è unione di un numero finito di curve chiuse, che costituiscono il bordo di S, indicato con ∂S.



Per brevità indicheremo con

$$\varphi_u := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right)$$

$$\varphi_v := \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right)$$

e scriveremo $J\varphi(u,v) = \left(\varphi_u \mid \varphi_v \right)$

$\boxed{\text{vettori colonna}}$.

<u>Piano Tangente.</u>

Sia $(u_0, v_0) \in U$ e sia

$$P_0 = \varphi(u_0,v_0) = (\varphi_1(u_0,v_0), \varphi_2(u_0,v_0), \varphi_3(u_0,v_0)) \in S.$$

Sia $\gamma(t) :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ una curva regolare t.c. $\gamma(0) = (u_0, v_0)$

e sia $\tilde{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$

$\tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))$

$\tilde{\gamma}$ è una curva di $\mathbb{R}^3$ la cui traiettoria sta tutta in S

si ha $\tilde{\gamma}'(t) = J\varphi(\gamma(t))\, \gamma'(t)$

da cui $\tilde{\gamma}'(0) = \gamma_1'(0)\, \varphi_u(u_0, v_0) + \gamma_2'(0)\, \varphi_v(u_0, v_0)$

Quindi $\tilde{\gamma}'(0) \in \operatorname{span} \langle \varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0) \rangle$

Quindi il piano tangente a S in P_0 è generato da $\varphi_u(u_0, v_0)$ e $\varphi_v(u_0, v_0)$

e inoltre $\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)$ è perpendicolare al piano tangente in P_0.

Indichiamo con $T_{P_0} S$ il piano tangente a S in P_0. e con

$$\nu(P_0) := \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{\| \varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0) \|}$$

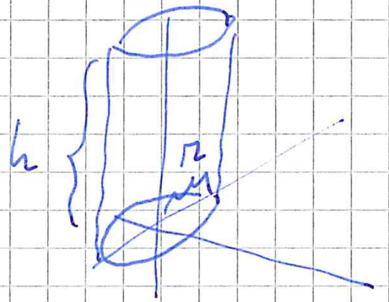
il versore ortogonale a S in P_0.

ESEMPIO

Consideriamo la superficie laterale

del cilindro di raggio r e altezza h

$$C = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \le r^2, \ 0 \le z \le h \}$$



Σ è descritta parametricamente da

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, h] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v)$$

Si ha $\quad \varphi_u(u,v) = (-r\sin u, r\cos u, 0)$

$$\varphi_v(u,v) = (0, 0, 1)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r\cos u, r\sin u, 0)$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = r \neq 0$$

$$\nu(r\cos u_0, r\sin u_0, v_0) = (\cos u_0, \sin u_0, 0).$$

Il contorno di Σ è dato dall'unione dei due cerchi

$$C_1 = \{ (x,y,0) \mid x^2+y^2 = r^2 \}$$

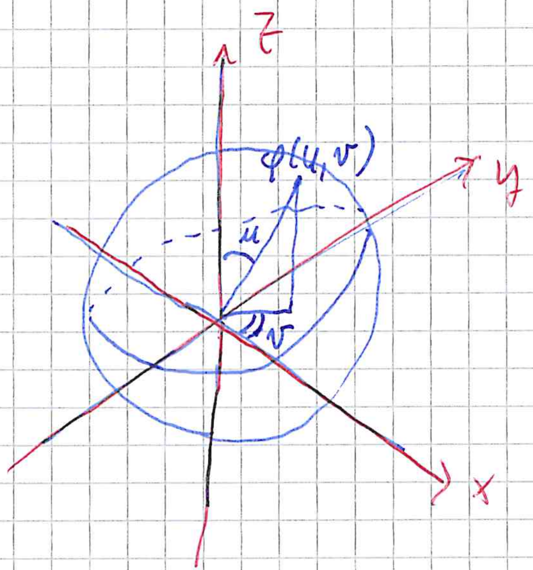
$$C_2 = \{ (x,y,h) \mid x^2+y^2 = r^2 \}.$$

ESEMPIO

La sfera di raggio r

$$\varphi(u,v) = (r\sin u \cos v,\ r \sin u \sin v,\ r \cos u)$$

$$(u,v) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi]$$



$$\varphi_u = (r \cos u \cos v,\ r \cos u \sin v,\ -r \sin u)$$

$$\varphi_v = (-r \sin u \sin v,\ r \sin u \cos v,\ 0)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (r^2 \sin^2 u \cos v,\ r^2 \sin^2 u \sin v,\ r^2 \sin u \cos v)$$
$$= r^2 \sin u\,(\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos v)$$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = r^2 \sin u$$

Cosa succede a cambio parametrizzazione?

Siano $V, U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti e sia

$\chi : V \longrightarrow U$ di classe C^1, invertibile,

con $J\chi(\eta, \xi)$ invertibile $\forall\ \eta, \xi$;

sia $\tilde{\varphi}(\eta, \xi) = \varphi(\chi(\eta, \xi))$

φ e $\tilde{\varphi}$ hanno la stessa immagine.

inoltre

$$J\tilde{\varphi}(\eta, \xi) = J\varphi(\chi(\eta,\xi)) \cdot J\chi(\eta, \xi)$$

$$= \left(\varphi_u(\chi(\eta,\xi)) \middle| \varphi_v(\chi(\eta,\xi)) \right) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$= \left(\underbrace{A\varphi_u + C\varphi_v}_{\tilde{\varphi}_\eta} \middle| \underbrace{B\varphi_u + D\varphi_v}_{\tilde{\varphi}_\xi} \right)$$

Allora $\tilde{\varphi}_\eta \wedge \tilde{\varphi}_\xi = (A\varphi_u + C\varphi_v) \wedge (B\varphi_u + D\varphi_v)$

$$= AD\ \varphi_u \wedge \varphi_v + CB\ \varphi_v \wedge \varphi_u$$

$$= (AD - CB)\ \varphi_u \wedge \varphi_v$$

$$= \det(J\chi(\xi, \eta))\ \varphi_u(\chi(\xi,\eta)) \wedge \varphi_v(\chi(\xi,\eta))$$

Da questo segue che la riparametrizzazione non cambia il piano tangente e al massimo inverte il verso del vettore normale. Inoltre

$$\| \tilde{\varphi}_\eta(\eta,\xi) \wedge \tilde{\varphi}_\xi(\eta,\xi) \| = |\det J\chi(\eta,\xi)| \, \| \varphi_u(\chi(\eta,\xi)) \wedge \varphi_v(\chi(\eta,\xi)) \|$$

AREA DI UNA SUPERFICIE

Osserviamo che se $Q \subseteq U$ è un rettangolo,

$$Q = [u_0, u_0+h] \times [v_0, v_0+k]$$

allora $$\varphi(Q) = \{ \varphi(u_0,v_0) + J\Phi(u_0,v_0)(s,t) + R(s,t) \mid 0 \le s \le h,\ 0 \le t \le k \}$$

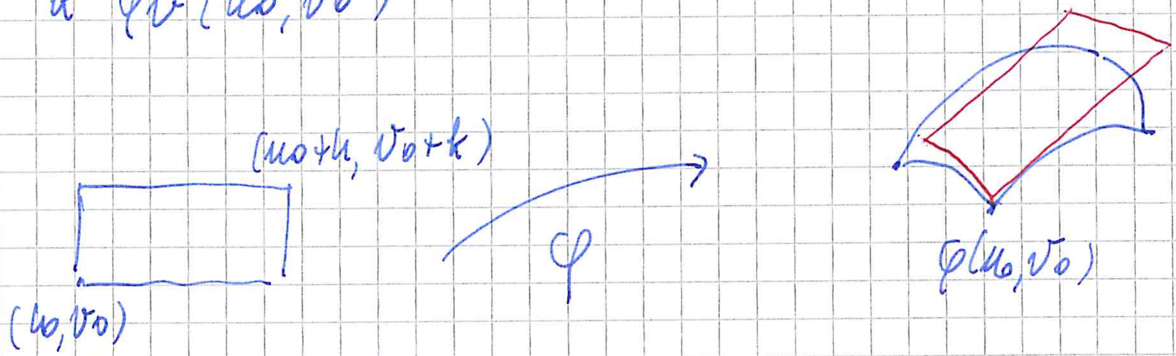
con $$\frac{R(s,t)}{\|(s,t)\|} \xrightarrow{\|(s,t)\| \to 0} 0$$

Al primo ordine quindi

$$\varphi(Q) = \varphi(u_0,v_0) + \{ s\,\varphi_u(u_0,v_0) + t\,\varphi_v(u_0,v_0) \mid 0 \le s \le h,\ 0 \le t \le k \}$$

PAGINA BIANCA PER ERRORE

cioè al primo ordine $\varphi(Q)$ è il parallelogramma generato da $h\varphi_u(u_0,v_0)$ e $k\varphi_v(u_0,v_0)$



Quindi l'area di $\varphi(Q)$ è approssimativamente

$$\|h\varphi_u(u_0,v_0) \wedge k\varphi_v(u_0,v_0)\| = hk\,\|\varphi_u(u_0,v_0)\wedge\varphi_v(u_0,v_0)\|$$

$$= \text{area}(Q)\,\|\varphi_u(u_0,v_0)\wedge\varphi_v(u_0,v_0)\|$$

ovvero

$$\text{Area}(\varphi(Q)) \simeq \|\varphi_u(u_0,v_0)\wedge\varphi_v(u_0,v_0)\|\,\text{Area}(Q)$$

Si ha quindi la definizione

$$\text{Area}(S) := \iint_U \|\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v)\|\,du\,dv$$

grazie alla formula a pag. 205 si vede che la definizione è indipendente dalla particolare parametrizzazione.

Se $f : S \to \mathbb{R}$ è continua, poniamo

$$\iint_S f(\sigma)\, d\sigma := \iint_U f(\varphi(u,v))\, \| \varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v) \| \, du\, dv$$

dove $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di S.

Si vede che la definizione non dipende dalla parametrizzazione.

OSS.

Se S è il grafico di una funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$,

$$S = \{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \}$$

allora $\varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$

è una parametrizzazione naturale di S.

in questo caso

$$\varphi_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\varphi_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

e quindi $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$

ESEMPI

Calcoliamo l'area della sfera di raggio R

$\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$

$(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi] = U$

Abbiamo già calcolato $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = R^2 \sin u$

Quindi

$$\text{Area} = \iint_U R^2 \sin u \, du\, dv$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} R^2 \sin u \, dv \right) du$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin u$$

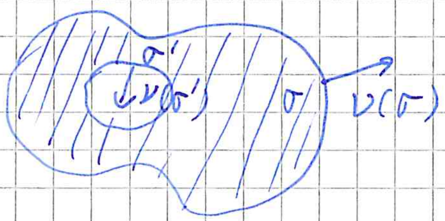
$$= 4\pi R^2 .$$

Superfici più generali si ottengono "incollando" superfici come quelle trattate finora.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA NELLO SPAZIO

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto con frontiera regolare (ovvero descrivibile localmente come superficie parametrizzata).

$\forall\ \sigma \in \partial\Omega$ sia $\vec{\nu}(\sigma)$ il versore ortogonale a $\partial\Omega$ che punta verso l'esterno



Sia $\vec{F} : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di regolarità C^1. Allora

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}(\sigma) \cdot \vec{\nu}(\sigma)\, d\sigma$$

dove $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_3}{\partial x_3}$

OSS.

$\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \vec{F}(\sigma) \cdot \vec{\nu}(\sigma)\, d\sigma$ si chiama flusso di $\vec{F}$ attraverso $\partial\Omega$

In generale se Σ è una superficie in $\mathbb{R}^3$ e $\vec{F}$ è un campo vettoriale, si chiama flusso di $\vec{F}$ attraverso S (nella direzione $\vec{\nu}(\sigma)$) l'integrale

$$\iint_S \vec{F}(\sigma)\cdot\vec{\nu}(\sigma)\,d\sigma = \iint_U \vec{F}(\varphi(u,v))\cdot(\varphi_u(u,v)\wedge\varphi_v(u,v))\,du\,dv$$

Se $\vec{F}$ è il campo di velocità di un fluido in movimento,

$\iint_S \vec{F}(\sigma)\cdot\vec{\nu}(\sigma)\,d\sigma$ rappresenta la portata

attraverso la superficie S (quanto fluido attraversa S per unità di tempo).

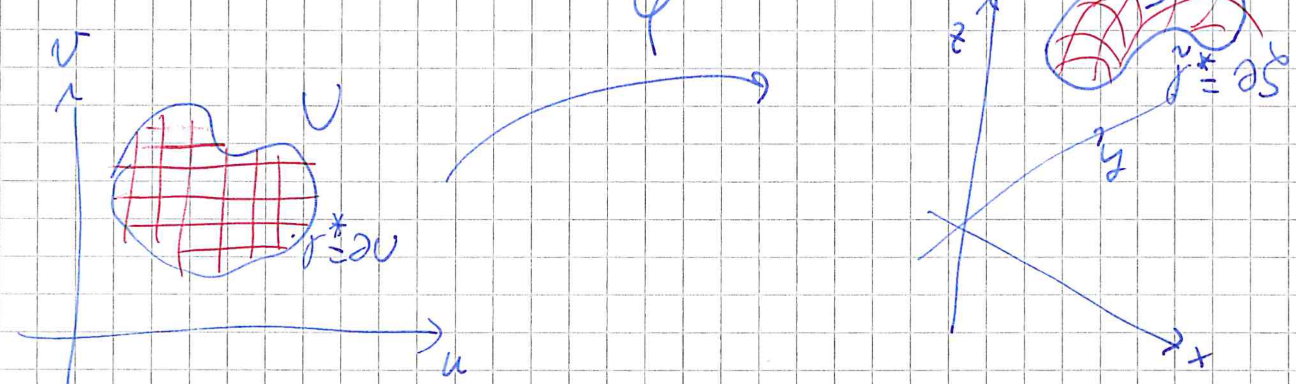
Da ciò il nome di flusso.

Se $\operatorname{div}\vec{F}=0$ allora attraverso una superficie chiusa il flusso è nullo (tanto entra, tanto esce).

TEOREMA DI STOKES NELLO SPAZIO

Sia $\varphi : \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare con bordo parametrizzata.

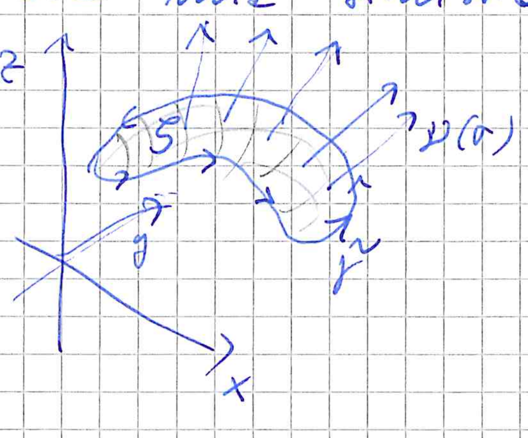
Supponiamo che $\partial \overline{U}$ sia parametrizzato con una curva γ, così che $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ è una parametrizzazione del bordo di $S = \varphi(\overline{U})$.



Scegliamo l'orientamento delle parametrizzazioni in modo che, posto

$$\nu(\varphi(u_0, v_0)) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{\|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)\|}$$

si abbia che "camminando sul bordo di S" ho S alla mia sinistra



Allora si ha

$$\iint_{\Sigma} [\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\sigma)] \cdot \vec{\nu}(\sigma)\, d\sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{F}(s) \cdot \vec{\tau}(s)\, ds$$

$$= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$$= \iint_U [\vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\varphi(u,v))] \cdot (\varphi_u(u,v) \wedge \varphi_v(u,v))\, du\, dv$$

Si ottiene a partire dal teorema di Stokes nel piano, facendo i conti in coordinate.