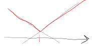
30 novembre $\quad a, b \in \mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + a + bx^2 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

1) Determinare a e b t.c. $f \in C^2(\mathbb{R})$
2) Stabilire se esiste una scelta di a, b t.c. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

1) In $\underset{(0,+\infty)}{\mathbb{R}_+}$ ed in $\underset{(-\infty,0)}{\mathbb{R}_-}$ f è C^∞ per qualsiasi a e b.

La questione dirimente è cosa succede nel punto 0.

i) Continuità di f nello 0.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\cos x + a + bx^2) = \cos(0) + a = 1 + a = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

La continuità richiede $f(0) = 0 = 1 + a$ $\quad \boxed{a = -1}$

Infatti questo dà anche la continuità in 0.

(ii) Esistenza della derivata e sua continuità in 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - \overset{=0}{f(0)}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - 1 + bx^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} (-\sin x + 2bx) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 = f'_s(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to +\infty} y\, e^{-y^2} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^{y^2}} \overset{H}{=} \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{2y\, e^{y^2}} = 0 = f'_d(0)$$

$$f'_d(0) = f'_s(0) = 0 \implies \exists\ f'(0) = 0$$

Ora dobbiamo stabilire la continuità di $f'(x)$ nel punto 0.

Abbiamo già verificato che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = f'(0) = 0$

Ora dobbiamo verificare se $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = 0 = f'(0).$$ È dimostrato

(iii) Si parte

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x + 2bx & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - \overset{0}{\overbrace{f'(0)}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overset{f'(x)}{\overbrace{-\sin x + 2bx}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\cos x + 2b) = -1 + 2b = f''_s(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - \overset{=0}{\overbrace{f'(0)}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{2y^4}{e^{y^2}} = 0 = f''_d(0)$$

Perché esista $f''(0)$ deve essere $f''_s(0) = f''_d(0)$

$-1 + 2b = 0$ $\quad \boxed{b = \frac{1}{2}}$

Per verificare che f'' è continua in 0 basta controllare se $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f''(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(2\,\frac{1}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0^+} \left(-3x^{-4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$$

$$= 2 \lim_{y\to +\infty} \frac{-3y^4 + 2y^6}{e^{y^2}} = 0 = f''(0)$$

$y = \frac{1}{x}$. Conclusione: per $a = -1$ e $b = \frac{1}{2}$

risulta $f \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^2\left(1-th\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right)}^{0}+3}{\underbrace{x^4 \sin\left(lg(1+x^{-4})\right)}_{1}+2} = 1$$

$x^2 - x^2\, th(x^{\frac{1}{10}})$

$$x^2\left(1-\underbrace{th\left(x^{\frac{1}{10}}\right)}_{1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \sin\left(lg(1+x^{-4})\right) = 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^4\, lg(1+x^{-4})\right)\left(\frac{\sin(lg(1+x^{-4}))}{lg(1+x^{-4})}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{lg(1+x^{-4})}{x^{-4}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(lg(1+x^{-4}))}{lg(1+x^{-4})}$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{lg(1+y)}{y} \qquad \lim_{z\to0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{\left(1-th\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right)}_{\to0} = 0$$

$$1-th(y) = 1 - \frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}} = \frac{\cancel{e^y}+e^{-y}-(\cancel{e^y}-e^{-y})}{e^y+e^{-y}}$$

$$= \frac{2e^{-y}}{e^y+e^{-y}} = \frac{2e^{-y}}{e^y(1+e^{-2y})} = 2e^{-2y}\frac{1}{1+o(1)}$$

$$= 2e^{-2y}(1+o(1)) \qquad = \frac{2}{e^{2y}+1} = \frac{2}{e^{2y}(1+e^{-2y})}$$

$$1-th(x^{\frac{1}{10}}) = 2e^{-2x^{\frac{1}{10}}}(1+o(1))$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-th\left(x^{\frac{1}{10}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 e^{-2x^{\frac{1}{10}}}$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x^{\frac{1}{10}}}} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^{\frac{1}{10}}\right)^{20}}{e^{2x^{\frac{1}{10}}}}$$

$y = x^{\frac{1}{10}}$

$$= 2\lim_{y\to+\infty} \frac{y^{20}}{e^{2y}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{f(x)}_{\to+\infty}\ \underbrace{g(x)}_{\to0}$$

$x^A \qquad x^{-B}$

$f(x) = x^A + o(x^A)$

$g(x) = x^{-B} + o(x^{-B})$

Osservazione Supponiamo che se $f \in L[a,b] \Longrightarrow |f| \in L[a,b]$

$$\left(\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \right)$$

$$\not\Longleftarrow$$

Esistono $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $|f| \in L[a,b]$

ma $f \notin L[a,b]$.

Partiamo $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichlet

Sappiamo che $D \notin L[a,b]$

Proviamo a considerare

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f \notin L[a,b]$, lo verifichiamo tra un attimo

$|f| = 1 \in L[a,b]$

Risulta che $f(x) = 2D(x) - 1$

Non può essere $f \in L[a,b]$. Se per assurdo $f \in L[a,b]$

$$\Longrightarrow D(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} \in L[a,b] \quad \text{falso}$$

Pertanto $f \notin L[a,b]$