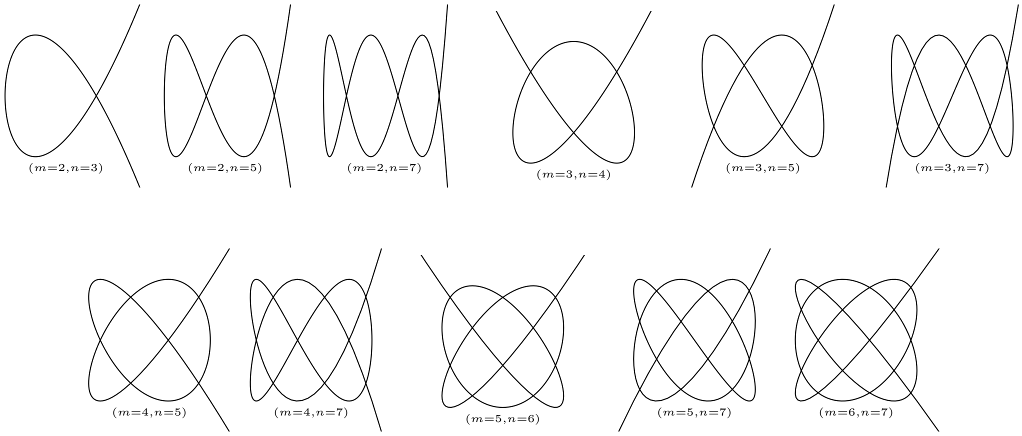
Istituzioni di Algebra e Geometria
Terzo foglio di esercizi

30 novembre 2023

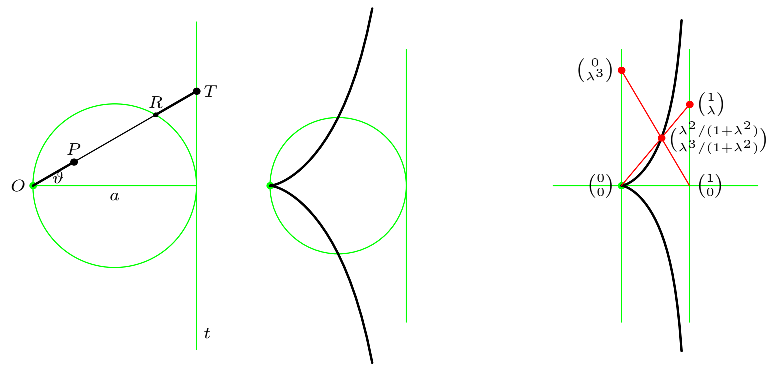
1. Sia $Z_P(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una curva proiettiva di grado $d \geq 3$, e siano $P_1, \ldots, P_s$ i suoi punti singolari, con le rispettive molteplicità m_i per $i = 1, \ldots, s$. Si dimostri che il sistema lineare Λ delle curve aggiunte di grado $d-2$, cioè delle curve di grado $d-2$ aventi i punti $P_1, \ldots, P_s$ come punti di molteplicità $m_i - 1$, per $i = 1, \ldots, s$, e passante per ulteriori $d-3$ punti di $Z_P(F)$, verifica
$$\dim \Lambda = 1.$$

2. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una conica degenere, unione di due rette distinte:
$$\Gamma = L_1 \cup L_2,$$
e sia $Q \in L_1 \setminus L_2$ un punto non singolare. Si timostri che la retta tangente proiettiva $\tau_Q\Gamma$ verifica
$$\tau_Q\Gamma = L_1.$$

3. Polinomi di Čebyšev: sono i polinomi così definiti
$$T_n(x) = \sum_{h=0, h\ pari}^{n} \binom{n}{h} (x^2-1)^{h/2} x^{n-h} \in \mathbb{R}[x].$$
Siano ora $m, n \in \mathbb{N}$ coprimi e si considerino le curve affini di equazione
$$T_n(x) - T_m(y) = 0.$$
Usando la regola di Cartesio per polinomi reali, si verifichi per alcuni valori bassi di m e n che tali curve hanno la proprietà di avere esattamente $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ punti singolari doppi ordinari, tutti reali e concentrati in un quadrato.



4. **Cissoide di Diocle**: data una circonferenza di diametro a del piano euclideo usuale, un suo punto O e la tangente t nel punto diametralmente opposto. Per ogni retta r per O, siano O e R le intersezioni con il cerchio, e T l'intersezione con t. Sia P il punto di r tale che $d(O,P) = d(R,T)$.



Mostrare che il luogo descritto da tali punti P è una curva algebrica che in un opportuno riferimento ha equazioni cartesiane

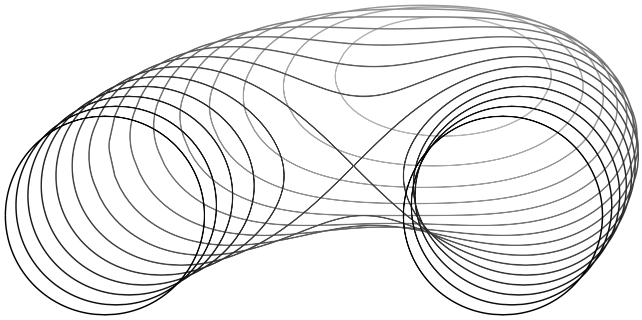
$$(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0.$$

Si dimostri che la chiusura proiettiva di tale curva è razionale, e se ne trovi una parametrizzazione con l'uso di un programma di calcolo simbolico.

5. **Sezioni spiriche o toriche di Perseo**. Studiare le sezioni "laterali" piane di un toro immerso nello spazio euclideo usuale. Partendo dalla seguente rappresentazione cartesiana del toro in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2(r^2 - x^2),$$

dove $0 < r < R$, e usando i piani $z = c$, mostrare che si tratta di curve di grado 4 e prevederne l'aspetto grafico.



6. Si verifichi che la cubica cuspidata proiettiva di equazione $x_0x_2^2 - x_1^3 = 0$ contiene un unico flesso.

   Si verifichi che la cubica nodata $x_0x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3 = 0$ contiene tre flessi che risultano allineati.

7. **Curve iperellittiche**: Si dicono curve iperellittiche le curve proiettive di grado $d \geq 3$ che in una opportuna scelta di un riferimento si scrivono nella forma

$$x_0^{d-2}x_2^2 - p(x_0, x_1) = 0$$

   dove $p(x_0, x_1) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_d$ è un polinomio omogeneo di grado d, ovvero nella forma affine

$$y^2 - p(x) = 0,$$

   con $p(x)$ polinomio di grado $d \geq 3$.

   Si preveda la traccia reale della curva. Si dimostri che l'unico punto improprio delle curve iperellittiche è singolare se e solo se $d > 3$, e che in ogni caso ha come unica tangente la retta impropria.

   Infine, si dimostri che la curva iperellittica affine $y^2 - p(x) = 0$ ha punti singolari se e solo se il polinomio $p(x)$ ha radici multiple, e si faccia qualche esempio.