

Calcolo del rango col determinante

Teor (di Kronecker). Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, supponiamo che una sottomatrice quadrata B di ordine r abbia $\det B \neq 0$. Se tutte le sottomatrici quadrate di ordine $r+1$ che contengono B hanno determinante nullo, allora $\text{rg } A = r$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

quindi $\text{rg } A = 2$.

Determinante come funzione multilineare

Una matrice $n \times n$ è essenzialmente una n -upla ordinata di vettori colonna di $\mathbb{K}^n$, ossia $A = (v_1, \dots, v_n)$ con $v_i = A_{(i)}$.

$$\det : M_n(\mathbb{K}) = \underbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{K}$$

è funzione delle colonne di una matrice. Si può dimostrare che $\det$ soddisfa le seguenti proprietà (dove ci sono $\dots$ non modifichiamo nulla):

$$\det(\dots, v + w, \dots) = \det(\dots, v, \dots) + \det(\dots, w, \dots)$$

$$\det(\dots, \alpha v, \dots) = \alpha \det(\dots, v, \dots).$$

In altre parole $\det$ è lineare rispetto a ciascuna colonna, tenendo fisse le altre. Per questo motivo si dice che $\det$ è *multilineare nelle colonne*, ossia è lineare rispetto a ciascuna colonna.

Dato che $\det A = \det {}^t A$ si ha che $\det$ è *multilineare nelle righe*.

Determinante di un endomorfismo

Def. Consideriamo un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ e una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V . Si chiama *determinante* di f il numero

$$\det f \stackrel{\text{def}}{=} \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \mathbb{K}.$$

Oss. Il determinante di un endomorfismo è definito come il determinante di una sua matrice rispetto ad una base arbitraria di V , usando la *stessa* base sia nel dominio che nel codominio.

Oss. $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ altra base per $V \Rightarrow \det M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ perché sono matrici simili. Quindi $\det f$ è ben definito (non dipende dalla base).

Oss. $f, g : V \rightarrow V$ endomorfismi $\Rightarrow \det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ (T. di Binet).

Oss. f isomorfismo $\Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ invertibile $\Leftrightarrow \det f \neq 0 \Rightarrow \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$.

Spazio delle applicazioni lineari

Definiamo lo *spazio delle applicazioni lineari* da V a W

$$\text{Hom}(V, W) \stackrel{\text{def}}{=} \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ lineare}\}$$

Date applicazioni lineari $f, g: V \rightarrow W$ definiamo la *somma*

$$f + g: V \rightarrow W$$

$$(f + g)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

e la *moltiplicazione scalare* per $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha f: V \rightarrow W$$

$$(\alpha f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(v).$$

È facile dimostrare che $f + g$ e αf sono lineari e con queste operazioni $\text{Hom}(V, W)$ è un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale.

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W

$\forall f, g \in \text{Hom}(V, W), \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f + g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha f) = \alpha M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

Quindi l'applicazione

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}: \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$$

che associa a $f \in \text{Hom}(V, W)$ la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, è lineare e sappiamo che è anche invertibile (ad ogni matrice corrisponde un'applicazione lineare). Abbiamo quindi la proposizione seguente.

Prop. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}: \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn} \Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn \Rightarrow \dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \dim W.$$

Definiamo lo *spazio degli endomorfismi* di V

$$\text{End}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(V, V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ lineare}\}.$$

$\text{End}(V)$ è uno spazio vettoriale e $\dim \text{End}(V) = (\dim V)^2$.

Problema della diagonalizzazione

Dato $f \in \text{End}(V)$ vorremmo trovare una base $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ per V t.c. $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ sia la più semplice possibile: una matrice diagonale.

Def. $f \in \text{End}(V)$ è *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{D}$ per V t.c. $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ sia una matrice diagonale. $\mathcal{D}$ è detta *base diagonalizzante* o *base che diagonalizza* f .

Ricordando che la i -esima colonna di $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f)$ è il vettore delle coordinate di $f(v_i)$ si ha subito la seguente proposizione.

Prop. $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ diagonalizza $f \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Inoltre $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Oss. Se $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ allora f si scrive in coordinate come

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Def. Dato $f \in \text{End}(V)$, uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* di f se esiste un vettore *non nullo* $v \in V$ t.c. $f(v) = \lambda v$. In questo caso v è detto *autovettore per f relativo all'autovalore λ* .

Oss. $v \in V$ autovettore per $f \Leftrightarrow v \neq 0_V$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$.

N. B. Vogliamo $v \neq 0_V$ perché altrimenti la definizione sarebbe banale: per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $f(0_V) = \lambda 0_V$.

Cor. Una base è diagonalizzante $\Leftrightarrow$ è formata da autovettori.