Calcolo dei predicati

$\forall x \, , \, \exists y$

Il calcolo della logica predicativa e` un'estensione del calcolo della logica proposizionale.

Esso puo` essere ottenuto semplicemente aggiungendo alle regole di deduzione naturale gia` introdotte per la logica proposizionale (opportunamente estese a coprire il linguaggio predicativo),

le regole per i due quantificatori ($\forall x$, $\exists x$)

e, eventualmente, per la relazione di identita`(=).

- I quantificatori, come molti connettivi, hanno regole di eliminazione e di introduzione.

- Le regole del **quantificatore universale** sono simili alle regole della **congiunzione**.

- Le regole del **quantificatore particolare** sono simili alle regole della **disgiunzione**.

Regole di deduzione naturale per $\forall x$

$\forall$ e &

- L'analogia tra $\forall$ e & non è sorprendente.

- Si consideri:

  Tutti gli umani sono mortali.

  Quesa affermazione e` simile a una lunghissima congiunzione in cui si elenca, uno per uno, ogni umano e si afferma di ognuno di loro che è mortale.

Eliminazione di $\forall x$

UE

- La regola di eliminazione della **congiunzione** ci permette di passare da una congiunzione:

  A & B

  a uno dei suoi congiunti:

  A

  Oppure: B

Se consideriamo una formula quantificata universalmente come se fosse una congiunzione (magari molto lunga), la regola di eliminazione è semplice:

- Prendiamo una formula universalmente quantificata;
- La pensiamo come una lunga congiunzione;
- Applichiamo la regola di &-eliminazione, ottenendo uno dei congiunti.

- Supponiamo, ad esempio, di avere (per semplicita`) solo tre oggetti nel dominio e tre costanti nel linguaggio m, n, o.

e si consideri la formula:

$\forall x \ P(x)$

Se $\forall x\ P(x)$ è concepita come congiunzione avremmo che $P(m)\ \&\ P(n)\ \&\ P(o)$

- Possiamo quindi applicare &-eliminazione e ottenere uno dei congiunti, ad esempio:

$P(n)$

→ Oppure, naturalmente, $P(m)$ o $P(o)$.

- Quindi ∀-eliminazione, UE, è una regola che ci permette di passare da

  $\forall x\ A(x)$

  a

  $A(c)$

  Dove ‘c’ è una qualsiasi costante individuale (o nome arbitrario) di L1.

  (Nota: ‘c’ non e` una variabile, altrimenti non otteniamo una formula chiusa/enunciato.)

- La giustificazione intuitiva della regola dovrebbe essere chiara.

  Se ogni cosa ha una certa proprietà P,

  ed m è una delle cose, allora anche m è P.

$F(m), \forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash G(m)$

1	(1)	$F(m)$	A
2	(2)	$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$	A
2	(3)	$F(m) \rightarrow G(m)$	2 UE
1,2	(4)	$G(m)$	1,3 MPP

- L'argomento precedente è la versione formale di:

Socrate è un uomo.
Tutti gli uomini sono mortali,

Quindi,
Socrate è mortale.

- Altro esempio:

$F(m), \forall x\, (F(x) \rightarrow -G(x)) \;\; |\!- \;\; -G(m)$

1	(1)	$F(m)$	A
2	(2)	$\forall x\, (F(x) \rightarrow -G(x))$	A
2	(3)	$F(m) \rightarrow -\, G(m)$	2 UE
1,2	(4)	$-G(m)$	1,3 MPP

Introduzione di $\forall x$

UI

- La regola di introduzione del quantificatore universale (UI) viene utilizzata per introdurre un quantificatore nella conclusione.

- Permette di ottenere una conclusione universalmente quantificata.

- Pensate a come fa Euclide a dimostrare che ***tutti i*** *triangoli hanno una certa proprietà*.

  - Inizia: " Sia ABC un triangolo...",

  - Dimostra poi che ABC possiede la proprietà in questione;

  - E conclude che **tutti i** triangoli hanno tale proprietà.

- Il punto cruciale è l'inizio:
  "*Sia ABC un triangolo*"

- **Che triangolo è ABC?**
  - NON è un triangolo specifico.
  - Perché, se no, la conclusione varrebbe solo per quel triangolo specifico.

- “ABC" è il nome di un triangolo preso **arbitrariamente**.

- "Arbitrariamente" significa che potrebbe essere un triangolo *qualsiasi*.

  Di cui non sappiamo null’altro, se non che e` triangolo.

- Se possiamo dimostrare che un triangolo qualsiasi, per per il semplice fatto di essere un triangolo, ha una certa proprietà,

  allora possiamo concludere che ogni triangolo ha tale proprietà.

Nomi arbitrari

- Per replicare questa strategia, usiamo quindi

  nomi arbitrari (che abbiamo a suo tempo introdotto ne linguaggio),

  che hanno lo stesso ruolo del nome del triangolo arbitrario "ABC".

Se '*a*' è un **nome arbitrario**, e possiamo dimostrare (per via puramente logica) che *a* ha la proprietà P,

allora possiamo concludere che che ogni oggetto ha la proprietà P.

Questa e` l’idea della regola di introduzione del quantificatore universale, UI.

NOTA BENE:

Se si vuole dimostrare che ogni cosa ha la proprietà P, dal fatto che a è P,

allora, <u>non dobbiamo sfruttare nessun’altra informazione specifica su a</u>.

Altrimenti a non sara` piu` un elemento arbitrario che ha P.

Sarebbe come se prendessimo un triangolo rettangolo come ABC e poi concludessimo da questo che tutti i triangoli sono rettangoli.

Quindi abbiamo bisogno di una clausola che specifichi questo.

- Inoltre, se abbiamo i nomi arbitrari nel nostro linguaggio, possiamo anche estendere la precedente regola dell'UE (∀-eliminazione), istanziando una formula universale anche con un nome arbitrario.

- Ad esempio, da $\forall x\ P(x)$ possiamo dedurre: $P(a)$, dove 'a' è un nome arbitrario.

→ Questa estensione è particolarmente utile.

UI - ∀-Introduzione

Se 'a' è un nome arbitrario e

Se P(a) <u>NON si basa su assunzioni su a</u>,

(ovvero, a sinistra non sono riportate assunzioni in cui ‘a’ occorre. Nemmeno se stessa.)

- Allora da P(a) possiamo dedurre:

  $\forall x\ P(x)$

- Esempio:

$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)), \forall x\,(G(x) \rightarrow H(x)) \vdash \forall x\,(F(x) \rightarrow H(x))$

1	(1) $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$	A
2	(2) $\forall x\,(G(x) \rightarrow H(x))$	A
1	(3) $F(a) \rightarrow G(a)$	1 UE
2	(4) $G(a) \rightarrow H(a)$	2 UE
1,2	(5) $F(a) \rightarrow H(a)$	3,4 SI(S)*
1,2	(6) $\forall x\,(F(x) \rightarrow H(x))$	5 UI

*E` un sequente derivato.

- Si noti cosa abbiamo fatto:
  - Eliminiamo i quantificatori universali dalle ipotesi, cambiando le variabili con nomi arbitrari;
  - Applichiamo passi del calcolo proposizionale;
  - Infine, reintroduciamo un quantificatore universale tramite UI.

Notiamo inoltre che in UI la clausola restrittiva e` rispettata.

Nessuna delle formule su cui si basa la formula generalizzata si basa su assunzioni in cui ricorre il nome arbitrario.

La formula a cui e` applicata UI e` la (5), che si basa su 1,2 in cui ‘a’ non c’e`.

→ Questo è molto importante!

- La seguente, ad esempio, è invece una derivazione **sbagliata**, perche` viola la restrizione:

$F(a) \vdash \forall x\, F(x)$

1	(1)	$F(a)$	A
1	(2)	$\forall x\, F(x)$	1,UI

- Qui UI viene applicata a una formula (1) che dipende da un'assunzione **in cui il nome arbitrario "a" è già presente** (la stessa (1)).

- Quindi il nome non era davvero arbitrario.

Sarebbe come:

Luca e` biondo, quindi tutti sono biondi.

(Chiaramente non e` un buon argomento)

Regole del quantificatore esistenziale

$\exists x$

- Il quantificatore esistenziale $\exists x$ è analogo a v.

→ Anche in questo caso, l’analogia è utile per determinare le nostre regole.

- Supponiamo, per semplicita`, di avere solo tre costanti:

  m, n, o.

- Dire che *esiste almeno un x che è F*

  *p*uò essere considerato analogo a dire:

  m è F, oppure n è F, oppure o è F.

Quantificatore esistenziale

∃-introduzione, EI

- Supponiamo di aver dimostrato:

  F(n)

  Per vI (applicata due volte) possiamo derivare:

  F(n) v F(m) v F(o)

- Ma sappiamo che (nella nostra ipotesi)

$F(n) \vee F(m) \vee F(o)$

è come:

$\exists x\, F(x)$

- La regola di introduzione di ∃ può quindi essere anche giustificata intuitivamente come segue.

- Supponiamo che un certo oggetto (ad esempio m) sia F.

allora, deve essere vero che c’e` qualcosa che è F.

- Quindi la regola di introduzione di ∃, EI, permette,

  data una formula A(t), in cui occorre la costante o il nome arbitrario t,

  di derivare ∃xA(x), sostituendo tutte o alcune delle occorrenze di t con x.

Esempio:

$F(m) \vdash \exists x\, Fx$

1	(1)	$F(m)$	A
1	(2)	$\exists x F(x)$	1,EI

Si noti che la derivazione sopra e` analoga a quella errata vista per il quantificatore universale.

Qui e` corretta perche` corrisponde all'argomento, chiaramente corretto:

Luca e` biondo. Quindi qualcuno e` biondo.

Esempio:

$\forall x\, F(x) \vdash \exists x\, Fx$

1	(1)	$\forall x F(x)$	A
1	(2)	$F(a)$	1UE
1	(3)	$\exists x F(x)$	2EI

- Nota che possiamo applicare EI, ∃-introduzione, anche a nomi arbitrari.

- Eliminazione del quantificatore esistenziale

$\exists$- Eliminazione

- Per trovare una buona regola per EE, si consideri la regola di vE.
  - Data una disgiunzione A v B, se possiamo ricavare C sia da A che da B.
  - Si puo` derivare C direttamente da A v B.

- Analogamente, supponiamo sempre di avere solo tre oggetti:

  m, n, o.

- E consideriamo la disgiunzione:

  F(m) v F(n) v F(o)

  Se possiamo ricavare C da ciascuno di essi, possiamo ricavare C, direttamente dalla disgiunzione.

- Quindi, dato che

  $F(m) \vee F(n) \vee F(o)$

  è equivalente a $\exists x\, F(x)$

- se C può essere derivato da ognuno di F(m), F(n), F(n),

  allora C può essere derivato da $\exists x\, F(x)$.

- Per evitare di dover considerare ogni singolo disgiunto, possiamo di nuovo ricorrere a nomi arbitrari.

- Invece di dimostrare che C segue da Fm, Fn, Fo, uno per uno,

  dimostriamo che C segue da un singolo F(*a*), dove "*a*" è il nome un oggetto scelto arbitrariamente.

- Come in vE,

  La conclusione C (come nel caso di vE) si basa sulle assunzioni, riportate quindi a sinistra:

  - Su cui poggia la formula esistenziale $\exists x F(x)$,

  - e sulle assunzioni utilizzate per ricavare C da F(a) (a parte F(a) stesso, che poi viene scaricata).

- Sul lato destro citiamo tre righe:

    1. Quella della formula esistenziale;

    2. Quella in cui si assume il disgiunto arbitrario;

    3. Quella in cui C è derivata dal disgiunto arbitrario.

- Come nel caso del quantificatore universale, anche EE impone che si rispettino alcune restrizioni sui nomi arbitrari.

- Per EE, il nome arbitrario NON deve comparire:

1. Nelle **assunzioni utilizzate** per ricavare C dal disgiunto arbitrario.

(come in UI)

2. Nella **conclusione** C.

→ Non abbiamo avuto questa seconda restrizione in UI, perché li` abbiamo introdotto, non eliminato, il quantificatore. Quindi abbiamo inserito 'x', e nessun nome.

- Se non vengono effettuate restrizioni, si può dimostrare, per esempio, l'affermazione errata che:

Se qualcosa è F, allora tutto è F.

Esempio errato:

1	(1)	$\exists x\, F(x)$	A
2	(2)	$F(a)$	A
1	(3)	$F(a)$	1,2 EE
1	(4)	$\forall x\, F(x)$	3 UI

- Il passo di EE non è corretto perché F(*a*) in (2) (utilizzata per ottenere (3)), **contiene '*a*'**.

Un'altra derivazione sbagliata:

1	(1) $F(a)$	A
2	(2) $\exists x\ G(x)$	A
3	(3) $G(a)$	A
1,3	(4) $F(a)\ \&\ G(a)$	1,3 &I
1,3	(5) $\exists x\ (F(x)\ \&\ G(x))$	4 EI
1,2	(6) $\exists x\ (F(x)\ \&\ G(x))$	2,3,5 EE

Esempio corretto:

$\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x)),\ \exists x\ F(x) \vdash \exists x\ G(x)$

1	(1)	$\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x))$	A
2	(2)	$\exists x\ F(x)$	A
3	(3)	$F(a)$	A
1	(4)	$F(a) \rightarrow G(a)$	1 UE
1,3	(5)	$G(a)$	3,4 MPP
1,3	(6)	$\exists x\ G(x)$	5 EI
1,2	(7)	$\exists x\ G(x)$	2,3,6 EE

- Si noti che nella derivazione finale di $\exists x\ F(x)$, l'assunzione $F(a)$ viene scaricata.

Regole di derivazione per l'identità

=

- L'identità è solitamente considerata una nozione logica, vicina a &, v o ∃.

- Con le proprie regole di derivazione.

Introduzione all'identità =I

- Per qualsiasi costante individuale c, la regola =I ci permette di introdurre in una derivazione, in qualsiasi riga, c=c, senza assunzioni.

Eliminazione dell'identità =E

- Siano t e s delle costanti individuali, e sia A(t) una fbf che contiene occorrenze di t.

- sia A(s) il risultato della sostituzione di almeno una occorrenza di t con s in A(t),

- Allora, date le premesse t=s e A(t), la regola =E ci permette di trarre A(s) come conclusione,
- Basandosi sulle assunzioni delle due premesse.

- Esempio

a=b |- b=a

1	(1)	a=b	A
	(2)	a=a	=I
1	(3)	b=a	1,2 =E

- Si consideri "a=b" come la premessa "t = s", e "a=a" come A(t);
- allora (3) 'b=a' è una A(s) appropriata, poiché risulta da (2) sostituendo la prima occorrenza di "a" in (2) con "b".

- $F(a) \vdash \exists x\,((x=a) \,\&\, F(x))$

1	(1)	$F(a)$	A
	(2)	$a=a$	=I
1	(3)	$(a=a) \,\&\, F(a)$	1,2 &I
1	(4)	$\exists x\,((x=a) \,\&\, F(x))$	3 EI

Teoremi notevoli sull'identità

$\vdash \forall x\,(x=x)$

- Tutto è identico a se stesso, tutto è auto-identico.
- Riflessività.

$\vdash \forall x \forall y\,((x=y) \rightarrow (y=x))$ *Simmetria*

$\vdash \forall x \forall y \forall z\,((x=y)\ \&\ (y=z) \rightarrow (x=z))$ Transitività

- Una relazione che ha queste tre proprietà (riflessività, simmetria, transitività) è una "relazione di equivalenza".

- Quindi l’identita` è una relazione di equivalenza.

  → Infatti = è la più piccola relazione di equivalenza.

- Alcuni **sequenti degni di nota** nel calcolo dei predicati

$\rightarrow$

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \forall x\,(F(x) \rightarrow \forall x\, G(x))$$

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x)) \vdash \exists x\,(F(x) \rightarrow \exists x\, G(x))$$

- $\forall x$ si distribuisce su $\rightarrow$

&

- $\forall x\ (F(x)\ \&\ G(x))$ -| |- $\forall x\ (x)\ \&\ \forall x\ G(x)$

  $\forall x$ si distribuisce su &

  Data l'analogia tra A e &, ciò non sorprende.

Mentre in una sola direzione:

$\exists x\ (F(x)\ \&\ G(x)) \vdash \exists x\ (F(x)\ \&\ \exists x\ G(x)$

V

$\exists x\ (F(x) \vee G(x))$ -|├ $\exists x\ F(x) \vee Ex\ G(x)$

$\exists x$ si distribuisce su v

- Data l'analogia tra $\exists x$ e v, questo non è sorprendente.

Mentre in una sola direzione:

$\forall x\ F(x) \vee \forall x\ G(x) \vdash \forall x\ (F(x) \vee G(x))$

-

$\exists x\, F(x) \vdash -\forall x\, -F(x)$

$\forall x\, F(x) \vdash -\exists x\, -F(x)$

→ Abbiamo già notato queste equivalenze. Ora possiamo dimostrarle anche nel calcolo.

variabili

$\forall x\, F(x) \vdash \forall y\, F(y)$

$\exists x\, F(x) \vdash \exists y\, F(y)$

Quantificatori e relazioni

- Finora abbiamo considerato le argomentazioni relative a **proprietà**. Ovvero i predicati ad un posto.

- Consideriamo ora argomenti con le relazioni. Ovvero i predicati a piu` posti.

Quantificatori e relazioni

- Le regole sono le stesse.
- Si richiede solo maggior attenzione, visto il maggior numero di variabili.

- $\forall x\, \forall y\, F(x,y)$ -| |- $\forall y \forall x\, F(x,y)$

1	(1) $\forall x\, \forall y\, F(x,y)$	A
1	(2) $\forall y\, F(a,y)$	1,UE
1	(3) $F(a,b)$	2,UE
1	(4) $\forall x\, F(x,b)$	3, UI
1	(5) $\forall y \forall x\, F(x,y)$	4, UI

→ Simile nell'altra direzione.

- Si noti che dalla (2) avremmo potuto ricavare:

  $F(a,a)$

  e poi:

  $\forall x\, F(x,x)$ per UI

  → Questo è intuitivamente giusto perché cio che vale per tutto, vale anche per se stesso.

Ma non possiamo passare da

$F(a,a)$

a

$\forall x \, \forall y \, (x,y)$

- Analogamente per $\exists$:

- $\exists x\ \exists y\ F(x,y) \quad \dashv\vdash \quad \exists y\ \exists x\ F(x,y)$

- È possibile dimostrare anche quanto segue, coinvolgendo due tipi di quantificatori:

$$\exists x\, \forall y\, F(x,y) \vdash \forall x\, \exists y\, F(x,y)$$

$\rightarrow$ Ma l'altra direzione fallisce!

(Si pensi a "*Ogni marinaio ama una ragazza bruna*")

I tentativi naturali di dimostrare l'altra direzione $\forall y\ \exists x\ F(x,y) \vdash \exists x\ \forall y\ F(x,y)$ sono bloccati dalle restrizioni delle nostre regole.

1	(1)	$\forall y \exists x\ F(x,y)$	A
1	(2)	$\exists x\ F(x,a)$	1 UE
3	(3)	$F(b,a)$	A
3	(4)	$\forall y\ F(b,y)$	3 UI?
3	(5)	$\exists x\ \forall y\ F(x,y)$	4 EI
1	(6)	$\exists x\ \forall y\ F(x,y)$	2,3,5 EE

- Il passo 4 è sbagliato per via della (3).

- Utilizzando il calcolo dei predicati possiamo dimostrare che alcuni argomenti non banali sono validi:
  - *Tutto ciò che è una testa di cavallo è una testa di animale.*
  - *Ad alcuni ragazzi piacciono tutti i giochi; a nessun ragazzo piacciono le cose noiose; quindi nessun gioco è noioso.*
  - *Alcuni botanici sono eccentrici; ad alcuni botanici non piace nessun eccentrico; quindi alcuni botanici non piacciono a tutti i botanici.*