

# CURVE E SUPERFICI

## 1 Generalità

1. Lo studio delle superfici svolge un ruolo determinante nel campo della rappresentazione grafica, non essendo realizzabile alcuna proiezione – mongiana, prospettica o assonometrica – di una qualsiasi forma dello spazio, senza che se ne conoscano la genesi geometrica e le proprietà configurative. Ci occuperemo dunque dell'una e delle altre in riferimento a quelle superfici che sono più frequenti in architettura, ricordando inoltre che alcune di esse, teoricamente infinite, sono nella realtà limitate dalla presenza di altre superfici, piane o non: donde la necessità di definire ancora quelle linee – generalmente curve – che ne costituiscono le mutue intersezioni.

Ma lo studio delle linee e delle superfici deve necessariamente avvalersi dei metodi della geometria descrittiva, per cui lo stesso strumento di studio si trova a svolgere un duplice ruolo simultaneamente conoscitivo e rappresentativo, fornendo immagini rigorose nei contenuti ed espressive nelle forme.

## 2 Linee piane e sghembe

### 2.1 Definizioni e genesi

1. Le linee geometricamente definite possono considerarsi generate da un punto che si muove nel piano o nello spazio, seguendo precise leggi di moto: nel primo caso la linea è detta appunto *piana*, nel secondo *sghemba* o *gobba* o a *doppia curvatura*. Sono curve sghembe, come già accennato, anche le intersezioni di superfici curve, assai frequenti nell'architettura classica come intradosso di coperture a volta, ma anche nell'architettura moderna che utilizza ogni tipo di superficie, con la grande libertà resa oggi possibile dalle tecnologie più avanzate.

Considerando la genesi dinamica di *una linea*, ricordiamo che, se il moto del punto generatore è uniforme e non muta mai direzione, sia nel piano che nello spazio, la linea descritta è evidentemente *una retta*, che si definisce tuttavia come *la linea più breve tra due punti di un piano*. In generale la linea più breve tra due punti *A, B* di una superficie è detta *geodetica*: così la geodetica del piano è appunto la retta; la geodetica della sfera è l'arco di *cerchio massimo*

passante per *A* e *B*; la geodetica di un cilindro circolare retto è generalmente una curva gobba detta *elica cilindrica* (cfr. 2.3.3.), oppure un *arco di cerchio*, se *A* e *B* appartengono a un piano ortogonale all'asse, la cui sezione con il cilindro è appunto un cerchio; o infine un *segmento di retta* se *A* e *B* appartengono alla stessa generatrice.

Il movimento generatore ha, in ogni punto di una linea curva, una diversa direzione, e la retta passante per il punto e avente quella direzione è detta *tangente* alla curva in quel punto, che a sua volta dicesi *punto di contatto* della tangente con la curva.

2. *Punti singolari di una curva*. Una generica linea curva, nel piano o nello spazio, che ammette in generale una tangente in ogni suo punto, può presentare dei *punti singolari*: se il punto mobile, nel descrivere la curva, passa due (o più) volte per una stessa posizione *P*, assume in quella posizione il nome di *punto doppio* (o *multiplo*) o *nodo* della curva e in esso la curva ammette due (o più) tangenti distinte; ancora due tangenti ammette la curva nel punto

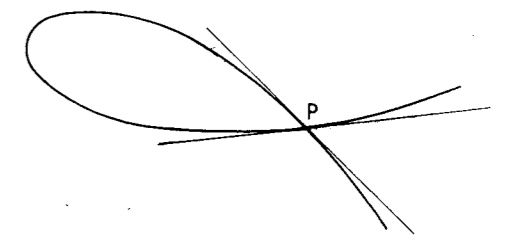


Fig. 1a

doppio anche se il secondo passaggio segue immediatamente il primo, se il punto cioè cambia bruscamente la direzione del moto: ma se tale direzione viene invertita, in esso la curva ammette una sola tangente e quel punto dicesi *punto di regresso*, o *cuspidale* o *punto stazionario* (figg. 1a, b).

Dualmente, la tangente a una curva durante il moto del punto descrive un *inviluppo*, di cui la curva è il luogo dei punti di contatto; se durante il movimento la tangente tocca la curva una seconda volta (o più

volte) dicesi *tangente doppia* (o *multipia*); e se la retta inverte il senso di rotazione prende il nome di *tangente d'inflexione* e il punto di contatto *punto di flesso* della curva. (fig. 1c).

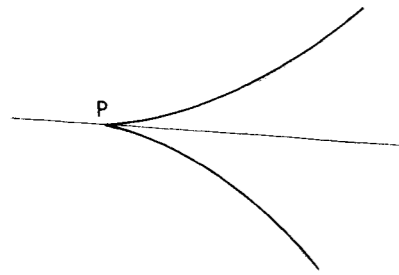


Fig. 1b

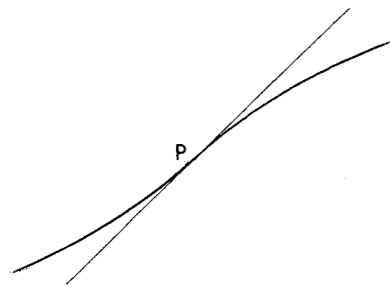


Fig. 1c

## 2.2 Curve piane

1. Tra le curve piane, di particolare interesse appaiono le *coniche*, le *spirali* e le *cicloid*i. Le coniche si possono ottenere come *sezioni di un piano con un cono circolare*; ma, invertendo la genesi, proiettando cioè il cerchio direttore dal vertice del cono su di un piano, la conica si può considerare come *proiezione del cerchio*. Le *spirali* e le *cicloid*i sono generate dal moto composto di rotazione e di traslazione di un punto, diversificandosi tuttavia per la direzione della traslazione, variabile (radiale) per le prime, costante per le seconde.

2. *Le sezioni coniche: genesi geometrica.* Curve notevoli, per essere come abbiamo accennato le proiezioni del cerchio, dunque ad esso proiettivamente equivalenti, le *coniche* – più precisamente dette *sezioni coniche*, in quanto storicamente scoperte come intersezioni di un piano con un cono circolare (S.-V., p. 170 segg.) –, sono definite nel proprio piano come *curve del secondo ordine*, perché rappresentate

analiticamente da equazioni di secondo grado; tale condizione si traduce nella proprietà geometrica di tutte le coniche di avere in comune con una generica retta del piano due punti, e nella proprietà duale di potersi condurre da un punto del piano due rette tangenti alla curva, gli uni e le altre (secondo la posizione rispetto alla conica) reali e distinti, reali e coincidenti, o complessi coniugati.

In rapporto alla giacitura del piano rispetto alle generatrici del cono di origine, la conica sezione può essere una *ellisse* (in particolare un *cerchio*), una *parabola*, o un'*iperbole* (S.-V., pp. 170-173).

Se invece consideriamo la genesi dinamica di ciascun tipo di conica nel proprio piano, osserviamo che l'*ellisse* (l'*iperbole*) è generata da un punto che si muove mantenendo fissa la *somma* (rispettivamente la *differenza*) delle distanze da due punti fissi del piano  $F_1, F_2$ , detti *fuochi*, che si trovano all'interno della conica, e precisamente sull'asse maggiore (sull'asse trasverso) (figg. 2a, b); la *circonferenza*, una particolare ellisse i cui fuochi coincidono nel *centro*, è generata da un punto che si muove nel piano mantenendo fissa la distanza da quel centro; la *parabola* è generata da un punto che si muove nel piano mantenendo uguali le distanze da un punto, detto *fuoco*, e da una retta, detta *direttrice*: il fuoco appartiene all'unico asse della parabola (fig. 2 c).

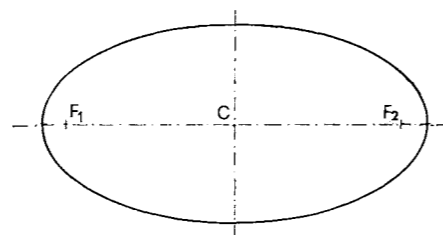


Fig. 2a

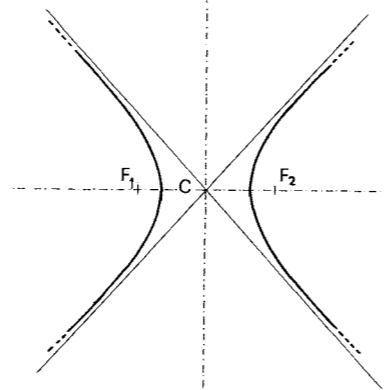


Fig. 2b

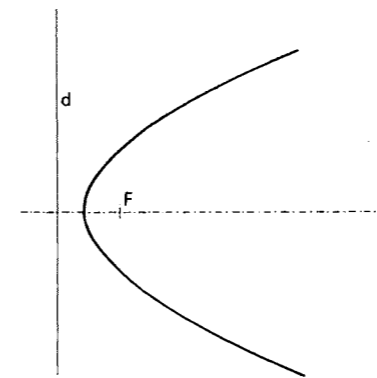


Fig. 2c

L'*ellisse* è costituita da soli punti propri; l'*iperbole* da infiniti punti propri e due punti impropri, che definiscono i due rami infiniti della curva; la *parabola* da infiniti punti propri e da un punto improprio, e pertanto da un solo ramo infinito.

3. *Polarità rispetto a una conica.* Le relazioni proiettive tra figure di due piani, eventualmente sovrapposti, sono dette *omografie* quando i *punti* (e le *rette*) dell'uno sono in corrispondenza biunivoca con i *punti* (e le *rette*) dell'altro: l'*omologia* è una particolare omografia tra piani sovrapposti (S.-V., p. 72). Una relazione proiettiva tra due piani, distinti o sovrapposti, è detta invece *reciprocità* quando ai *punti* di un piano corrispondono le *rette* dell'altro e viceversa: se la reciprocità tra due piani sovrapposti  $\alpha \equiv \alpha'$  è *involutoria* – se cioè, dato un punto  $P$  di  $\alpha$ , cui corrisponde una retta  $p'$  di  $\alpha'$ , avviene che allo stesso punto  $P \equiv M'$ , considerato appartenente ad  $\alpha'$ , corrisponde in  $\alpha$  la stessa retta  $m \equiv p'$  – la relazione viene detta *polarità piana*, e i relativi enti vengono denominati con le sole lettere, prive di apici: ogni punto  $P$  (oppure  $M$ ) è detto *polo* della retta  $p$  (o  $m$ ), e la retta  $p$  ( $m$ ) è detta *polare* del punto  $P$  ( $M$ ).

Due punti distinti  $P, Q$  si dicono *coniugati* quando ciascuno appartiene alla polare dell'altro, quando cioè  $P$  appartiene a  $q$  e  $Q$  appartiene a  $p$ ; analogamente si dicono *conjugate* due rette  $p$  e  $q$  quando ciascuna passa per il polo dell'altra, quando cioè  $p$  passa per  $Q$  e  $q$  passa per  $P$ . Se in una polarità esistono inoltre *punti autoconiugati* (*rette autoconjugate*) – punti cioè che appartengono alla propria polare (rette passanti per il proprio polo) – la polarità è detta *non uniforme* e quei punti appartengono (quelle rette sono tangenti) a una conica, detta *conica fondamentale della polarità*: nel primo caso, *conica*

*luogo* (di punti), nel secondo *conica involuppo* (di rette).

Si hanno allora le definizioni tra loro duali: *ogni conica è il luogo dei punti autoconiugati in una polarità piana non uniforme*; *ogni conica è l'involuppo delle rette autoconjugate in una polarità piana non uniforme*.

Così ogni conica stabilisce nel proprio piano una polarità, e pertanto viene detta *conica fondamentale della polarità*: tra le infinite coppie punto-retta corrispondenti vale allora la relazione di reciprocità sopra detta: se un punto  $Q$  appartiene a una retta  $p$ , la sua polare  $q$  passa per il polo  $P$  di  $p$ . Più in generale, se un punto  $Q$  descrive una retta  $p$ , la sua polare  $q$  descrive un fascio di rette, il cui centro è il punto  $P$ , polo della retta  $p$ .

Ogni punto  $T$  della conica, in quanto autoconiugato, appartiene alla propria polare  $t$ , che a sua volta, in quanto autoconjugata contiene il proprio polo e dunque è la tangente in  $T$  alla conica; evidentemente ogni tangente  $t$  alla conica è la polare del punto di contatto  $T$  con la conica stessa: è allora possibile costruire nel piano della conica la polare di un qua-

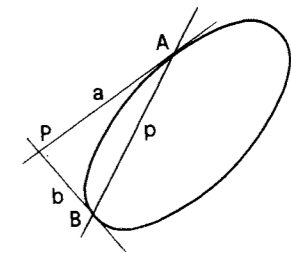


Fig. 3

lunque punto e il polo di qualunque retta. Supponiamo dapprima che il punto dato  $P$  sia esterno alla conica e conduciamo per  $P$  le due tangenti  $a$  e  $b$  alla conica stessa (fig. 3): la retta  $p$  che congiunge i punti di contatto  $A$  e  $B$  di quelle tangenti è la polare di  $P$ ; infatti, per il principio di reciprocità le rette  $a$  e  $b$ , polari di  $A$  e di  $B$  (punti che appartengono a  $p$ ) passano per  $P$ , che dunque è il polo della retta  $p$ . La relazione di reciprocità appare più chiara se espressa in simboli:  $P \equiv ab$  e  $p \equiv AB$  (cfr. fig. 3). Se il punto  $P$  è interno alla conica, tracciate per  $P$  due corde  $a$  e  $b$  e condotte le tangenti negli estremi di ciascuna, i punti  $A$  e  $B$ , rispettivamente comuni a ogni coppia di tangenti, sono i poli delle rette  $a$  e  $b$ , mentre la retta  $AB$  è la polare  $p$  del punto  $P$  (fig. 4): infatti, in quanto centro di un fascio di rette definito da  $a$  e  $b$ , che hanno i poli sulla retta  $p$ , il punto  $P$  è il polo di quella retta.

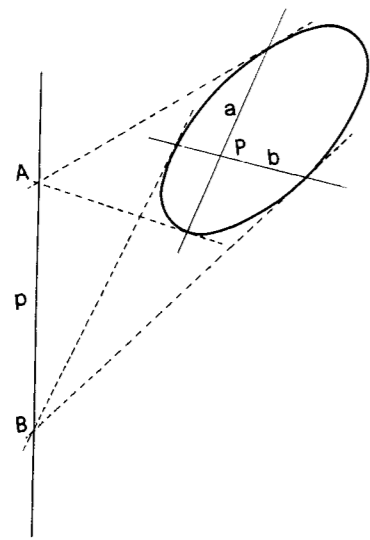


Fig. 4

4. Centro, diametri, assi di una conica. Nel caso di un punto improprio  $P_\infty$ , le tangenti condotte da  $P_\infty$  toccano la conica negli estremi di una particolare corda, che dunque assume il ruolo di polare di  $P_\infty$ : definiamo *diametro di una conica la polare di un punto improprio del suo piano* (fig. 5). Inoltre si dimostra che un diametro biseca tutte le corde aventi la direzione coniugata (quella cioè del proprio polo nonché delle tangenti nei suoi estremi) e dunque ogni diametro è *asse di simmetria*, generalmente *obliqua*, per la conica secondo la direzione coniugata. E, in conformità al caso generale, se  $P_\infty$  descrive una retta (la retta impropria  $i_\infty$  del piano) la sua polare descrive un fascio di rette (i diametri della conica), il cui centro  $C$  è il polo della retta  $i_\infty$ ; ma in quanto centro del fascio di diametri, il punto  $C$  è anche il centro della conica, per cui vale la definizione: *il centro di una conica è il polo della retta impropria del suo piano*.

In un'ellisse o in una iperbole, dette *coniche a centro proprio*, o semplicemente *a centro*, ogni coppia di *diametri* tali che ciascuno passi per il polo dell'altro sono detti *coniugati*: allora la conica è simmetrica rispetto a ciascuno di essi secondo la direzione dell'altro, ogni punto della conica ha cioè un simmetrico rispetto a ogni diametro, secondo la direzione del diametro coniugato (figg. 6a, b). In particolare l'ellisse è inscrivibile in infiniti parallelogrammi, le coppie di lati opposti di ciascuno dei quali sono rette parallele a una coppia di diametri coniugati.

Nelle coniche e centro, tra le infinite coppie di dia-

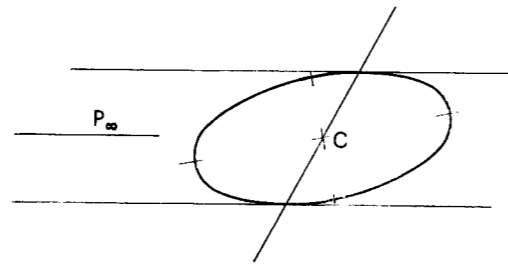


Fig. 5

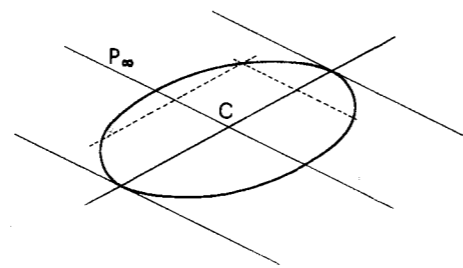


Fig. 6a

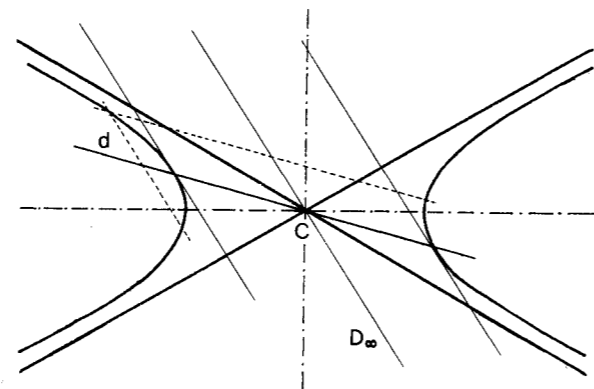


Fig. 6b

metri coniugati, una sola è costituita da rette ortogonali, tale cioè che ciascun diametro sia ortogonale al proprio diametro coniugato: questi due diametri, rispetto a ognuno dei quali i punti della conica sono in simmetria ortogonale, prendono il nome di *assi*. Si definiscono allora *assi di una conica a centro i due diametri coniugati e ortogonali* (figg. 7 a, b): evidentemente il centro, interno alla curva per l'ellisse, esterno per l'iperbole, è un punto di simmetria per la conica; inoltre gli *assi dell'ellisse*, detti *asse maggiore* (o *asse focale*) e *asse minore*, rispettivamente diametro massimo e diametro minimo, secano entrambi la curva in coppie di punti detti *vertici*, in ciascuna delle quali il raggio di curvatura è rispettivamente minimo e massimo<sup>1</sup>. Nei vertici della conica la tangente è ortogonale al relativo asse, e dunque l'ellisse, che ha quattro vertici, è ancora inscrivibile in un rettangolo, le cui coppie di lati opposti hanno lunghezze uguali agli assi.

Gli *assi dell'iperbole*, detti *asse trasverso* e *asse non trasverso*, sono rispettivamente secante e esterno, e di conseguenza i vertici dell'iperbole sono due; inoltre l'iperbole ammette due tangenti  $a$  e  $b$  nei punti impropri, dette *asintoti*, che in quanto tali sono rette polari di quegli stessi punti impropri  $A_\infty$  e  $B_\infty$ , dunque diametri e pertanto passano per il centro, e inoltre sono simmetrici rispetto agli assi (gli assi bisecano gli angoli degli asintoti).

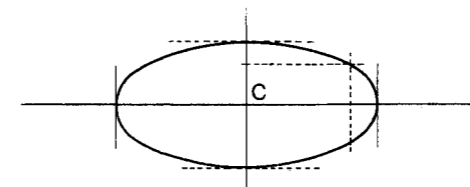


Fig. 7a

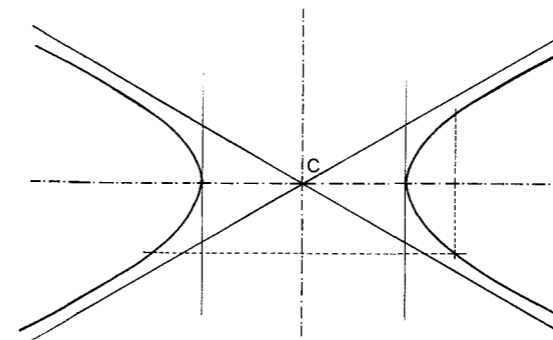


Fig. 7b

La *parabola*, avente un solo punto improprio, cioè un solo punto in comune con la retta impropria  $i_\infty$  (S.-V., p. 170), ammette  $i_\infty$  come tangente: allora in quanto tale,  $i_\infty$  è una retta autoconiugata nella polarità e pertanto contiene il proprio polo  $C_\infty$  che è dunque il punto di contatto della retta  $i_\infty$  con la conica; ma, in quanto polo della retta impropria, quel punto per definizione è detto *centro della conica*, conservando tale denominazione benché per la parabola non sia un punto di simmetria (fig. 8); i diametri, tutti passanti per  $C_\infty$ , sono evidentemente paralleli, né esistono coppie di diametri coniugati, ma ciascun diametro (come per le altre coniche) è coniugato alla direzione della tangente nel suo estremo, ed è inoltre asse di simmetria obliqua per la parabola secondo quella direzione. La parabola ha dunque un solo *asse*, la cui direzione coniugata, quella della tangente nell'unico *vertice*, è ad esso ortogonale.

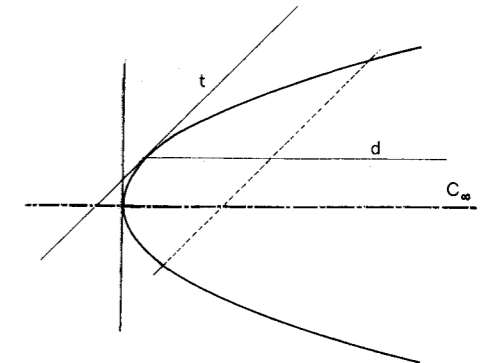


Fig. 8

5. Costruzioni delle coniche. 1. Costruire una ellisse dati i due assi: a) Ricordando che per ciascun punto  $P$  della ellisse la somma delle distanze dai fuochi è costante e uguale alla misura dell'asse maggiore  $AB$  (vale cioè la relazione  $PF_1 + PF_2 = AB$ ), con centro in uno degli estremi dell'asse minore si tracci la circonferenza di raggio uguale al semiasse maggiore: i punti d'intersezione con l'asse maggiore (detto perciò anche *asse focale*) sono i fuochi  $F_1$  e  $F_2$ ; per costruire altri punti dell'ellisse, con centro alternativamente in  $F_1$  e in  $F_2$  si traccino archi di cerchio con raggi rispettivamente uguali a un segmento  $A_1A_2$ ,  $A_3$  dell'asse maggiore e al segmento residuo  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ : i punti di intersezione delle coppie di tali cerchi appartengono alla ellisse (fig. 9a). Per costruire poi

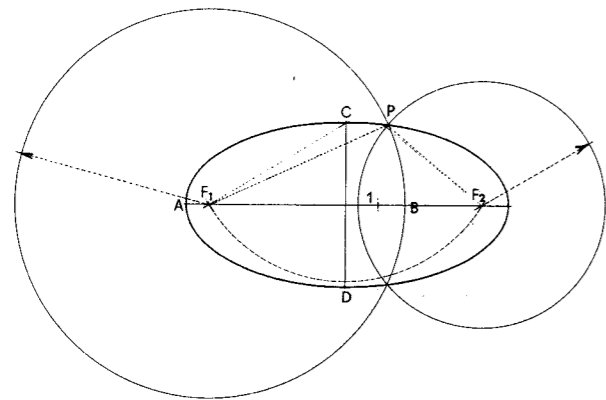


Fig. 9a

le tangenti all'ellisse (già disegnata) da un punto esterno  $P$ , tracciati il cerchio di centro  $P$  e raggio  $PF_2$  (o  $PF_1$ ), e il cerchio di centro  $F_1$  (o  $F_2$ ) e raggio uguale all'asse maggiore  $AB$ , e tracciate le rette che congiungono i punti comuni a tali due cerchi con  $F_1$  (con  $F_2$ ), le due intersezioni di queste rette con l'ellisse sono i punti di contatto delle tangenti richieste che così possono essere tracciate (fig. 9b).

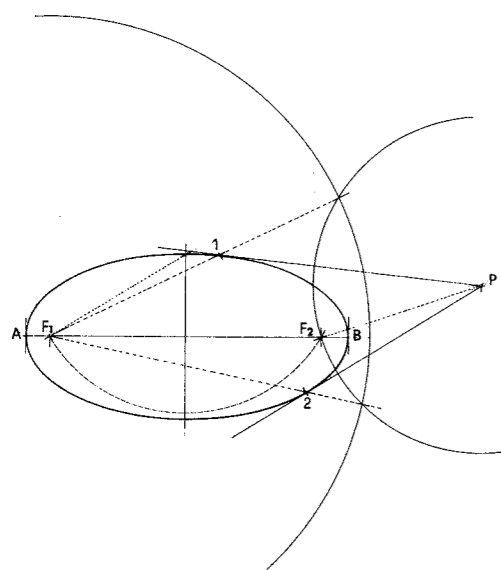


Fig. 9b

b) Descritto il cerchio con centro in  $C$  e raggio uguale al semiasse maggiore, trasformare un certo numero di punti del cerchio nell'affinità omologica ortogonale avente per asse la retta  $s$ , asse maggiore dell'ellisse, e punti corrispondenti  $\bar{D}, D$  estremi rispettivamente del raggio del cerchio normale ad  $s$  e del semiasse minore dell'ellisse (fig. 10). Evidentemente basta determinare solo alcuni punti di un quarto della curva e costruirne poi i simmetrici rispetto a cia-

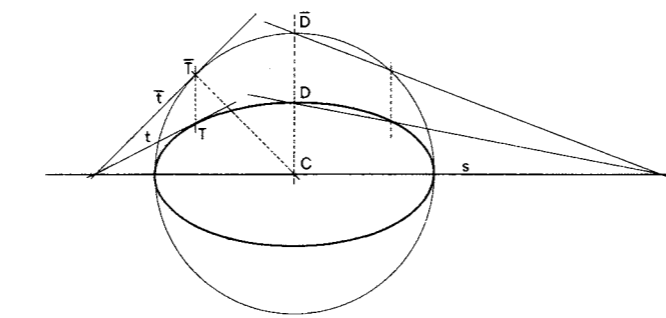


Fig. 10

scuno degli assi. Per facilitare il tracciamento dell'ellisse è utile costruire in ogni punto la relativa tangente: per l'esatta individuazione della tangente, ad esempio in un punto  $T$  già determinato, è opportuno, dopo aver costruito il punto  $\bar{T}$  del cerchio, omologo di  $T$  nell'affinità (inversa) di punti corrispondenti  $D, \bar{D}$ , tracciare la tangente  $\bar{t}$  in  $\bar{T}$  (ricordando che la tangente  $\bar{t}$  al cerchio è ortogonale al raggio passante per  $\bar{T}$ ) e trasformare  $\bar{t}$  nella tangente  $t$  della ellisse mediante la data affinità.

c) Tracciati due cerchi di centro  $C$  e di raggi rispettivamente uguali al semiasse minore e al semiasse maggiore, e secati entrambi con un numero  $n$  di raggi passanti per i punti  $1; 2; \dots; \bar{1}; \bar{2}; \dots$  rispettivamente dell'uno e dell'altro cerchio, si traccino dai primi le rette parallele all'asse maggiore e dai secondi le parallele all'asse minore (fig. 11): i punti comuni a tali coppie di rette appartengono all'ellisse. Anche in questo caso, si può completare la curva determinandone ulteriori punti mediante le note proprietà di simmetria, e/o costruendone le tangenti nei punti trovati.

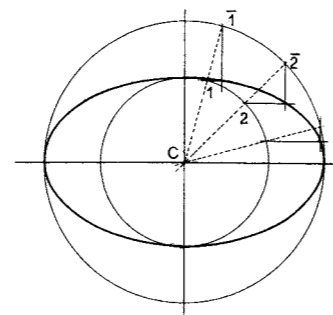


Fig. 11

II. Costruire l'ellisse dati l'asse maggiore e i fuochi. I punti della curva si costruiscono come in I.a); in particolare gli estremi  $C, D$  dell'asse minore - perpendicolare all'asse maggiore nel suo punto medio - si determinano come intersezioni, con quella perpendicolare del cerchio di centro  $F_1$  (o  $F_2$ ) e raggio uguale al semiasse maggiore (fig. 12)<sup>2</sup>

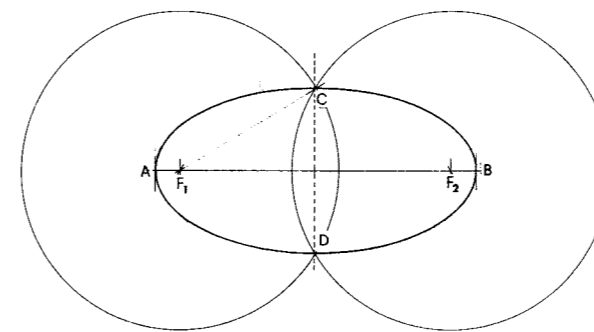


Fig. 12

III. Costruire l'ellisse, per punti e per tangenti, data una coppia di diametri coniugati. a) Tracciato il cerchio il cui diametro coincida con il diametro maggiore  $AB$ , resta determinata l'omologia affine obliqua avente per asse quel diametro e punti corrispondenti  $\bar{D}, D$  rispettivamente estremi del semidiametro del cerchio ortogonale ad  $AB$  e del semidiametro minore dell'ellisse: il centro dell'affinità è evidentemente il punto improprio della retta  $\bar{D}D$ . Trasformati allora alcuni punti del cerchio nei corrispondenti punti dell'ellisse, è possibile individuare ulteriori punti utilizzando le proprietà di simmetria obliqua rispetto ai due diametri, e così tracciare la curva (fig.13). Per costruire le tangenti in quegli stessi punti, prima che la curva sia tracciata, si operi come nel caso I.b).

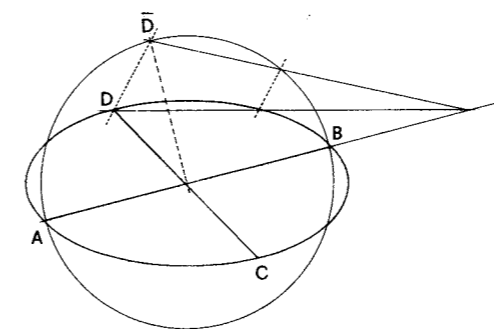


Fig. 13

b). Dall'estremo  $A$  del semidiametro minore si conduca la perpendicolare al diametro maggiore e su questa si stacchino i segmenti  $AE$  e  $A\bar{E}$  di lunghezza uguale al semidiametro maggiore  $OB$  (fig. 14); congiunti gli estremi  $E$  ed  $\bar{E}$  con il centro  $O$ , le bisettrici degli angoli delle rette  $OE$  e  $O\bar{E}$  sono gli assi dell'ellisse, le cui lunghezze si assumono rispettivamente uguali alla somma e alla differenza dei segmenti  $OE$  e  $O\bar{E}$ . Costruiti gli assi, è possibile, con uno dei procedimenti suindicati, costruire altri punti dell'ellisse, di cui sono ora noti i quattro estremi dei due diametri dati e i quattro vertici (estremi degli assi).

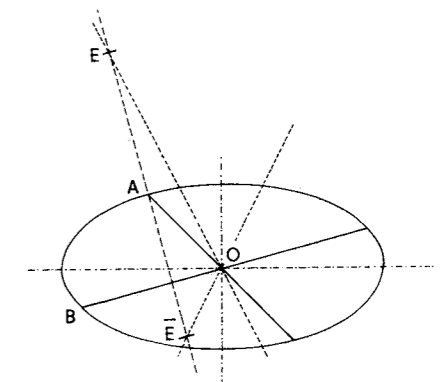
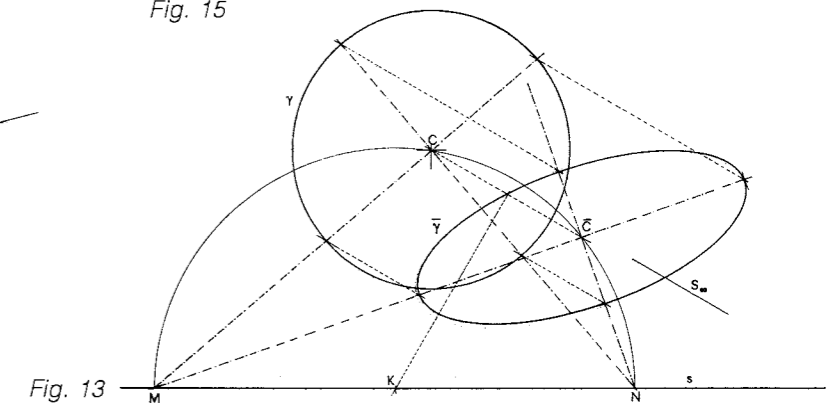


Fig. 14

IV. Costruire gli assi di un'ellisse omologa di un dato cerchio in un'affinità omologica. Assegnati il cerchio  $\gamma$  e l'omologia di asse  $s$ , centro  $S_\infty$  e punti omologhi  $C, \bar{C}$  rispettivamente centri del cerchio e dell'ellisse, si tracci la normale al segmento  $C\bar{C}$  per il suo punto medio e sia  $K$  il punto d'intersezione con la retta  $s$ ; con centro in  $K$  si descriva il cerchio di raggio  $KC$  ( $K\bar{C}$ ) e siano  $M, N$  i punti d'intersezione con  $s$ : gli assi dell'ellisse sono le rette  $CM, CN$  (fig. 15). Infatti

Fig. 15



queste, in quanto rispettivamente omologhe delle rette  $\overline{CM}$ ,  $\overline{CN}$  – che sono diametri ortogonali del cerchio (perché il loro angolo è inscritto in una semicirconferenza) – costituiscono una coppia di diametri coniugati dell'ellisse; inoltre, essendo retto anche l'angolo  $\overline{MCN}$ , perché inscritto nella stessa semicirconferenza, quei due diametri coniugati essendo anche ortogonali sono gli assi dell'ellisse richiesti.

V. *Costruire l'iperbole dati l'asse trasverso e i fuochi.* Nell'iperbole è costante la differenza delle distanze di ogni suo punto  $P$  dai fuochi ed è uguale alla misura dell'asse trasverso (vale  $PF_1 - PF_2 = V_1V_2$ ), i cui estremi sono i vertici  $V_1$  e  $V_2$ , mentre i fuochi  $F_1$  e  $F_2$  sono simmetrici rispetto al centro  $C$ , punto medio del segmento  $V_1V_2$ ; per costruire gli *asintoti*, si conducano le normali all'asse per i punti  $V_1$  e  $V_2$ , e con centro nel punto  $C$  si tracci il cerchio di raggio uguale a  $CF_1$  ( $CF_2$ ): gli asintoti sono le rette passanti per  $C$  e per i punti d'incontro di quelle normali con il cerchio, mentre l'asse non trasverso è la perpendicolare al primo condotta per  $C$ . Per la costruzione dei due rami della curva, ricordando le proprietà metriche suddette, si stacchino in un verso e nell'altro su uno dei prolungamenti dell'asse trasverso un numero di punti equidistanti  $1, 2, \dots$ ; con centro alternativamente in  $F_1$  e in  $F_2$  si traccino coppie di circonferenze di raggi uguali ai segmenti  $V_11, V_21; V_12, V_22, \dots$ ; i punti di intersezione delle coppie di circonferenze individuano un ramo dell'iperbole (fig. 16). Per costruire l'altro ramo si può scambiare la successione dei centri  $F_1$  e  $F_2$  delle circonferenze ausiliarie; oppure costruire i simmetrici, rispetto all'asse non trasverso, dei punti del primo ramo già individuati.

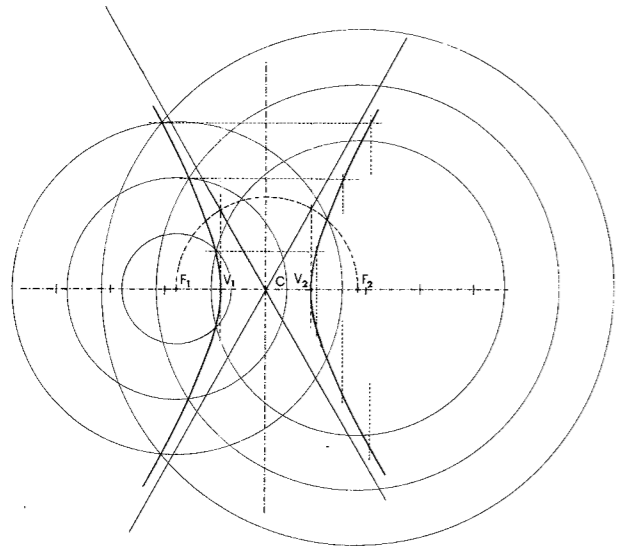


Fig. 16

VI. *Costruire l'iperbole dati i fuochi e gli asintoti.* Tracciato il cerchio di centro  $C$  – punto comune degli asintoti – e raggio uguale alla metà del segmento  $F_1F_2$  che definisce l'asse trasverso, si determinano i vertici  $V_1$  e  $V_2$  come intersezioni con quell'asse delle rette ad esso ortogonali e passanti per i punti comuni al cerchio e agli asintoti. La costruzione prosegue come nel caso precedente (cfr. fig. 16).

VII. *Costruire la parabola dati il vertice  $V$  e il fuoco.* L'asse è la semiretta di origine  $V$  a cui appartiene il fuoco  $F$ , mentre la direttrice  $d$  – rispetto alla quale la distanza di ciascun punto della curva deve essere uguale a quella dal fuoco – è la perpendicolare all'asse passante per il punto  $H$ , simmetrico del fuoco  $F$  rispetto al vertice  $V$  (fig. 17); allora, scelti sull'asse a partire da  $F$  un certo numero di punti  $1, 2, \dots$ , e condotte per essi le normali all'asse stesso, con centro in  $F$  e raggi successivamente uguali a  $FH, H1, H2, \dots$ , si traccino archi di circonferenze che tagliano nell'ordine ciascuna delle normali in coppie di punti della parabola.

VIII. *Costruire la parabola dati il fuoco e la direttrice.* Costruito l'asse come retta passante per il fuoco  $F$  e perpendicolare alla direttrice  $d$ , e determinato il vertice  $V$  quale punto medio del segmento  $FH$  che misura la distanza di  $V$  da  $d$ , si proceda come nel caso precedente (cfr. fig. 17).

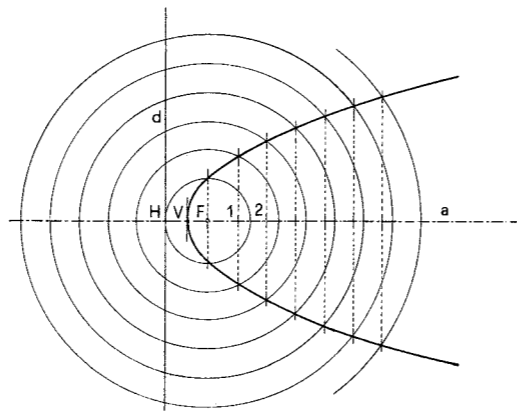


Fig. 17

IX. *Costruire la parabola-inviluppo (di tangenti) dati l'asse e una tangente con il suo punto di contatto.* Costruiti la retta  $\bar{t}$  e il punto  $\bar{P}$  simmetrici, rispetto all'asse della tangente assegnata  $t$  e del punto di contatto  $P$ , e detto  $K$  il punto comune a  $t$  e  $\bar{t}$ , si dividano i segmenti  $KP$  e  $K\bar{P}$  in  $n$  parti uguali, ma con

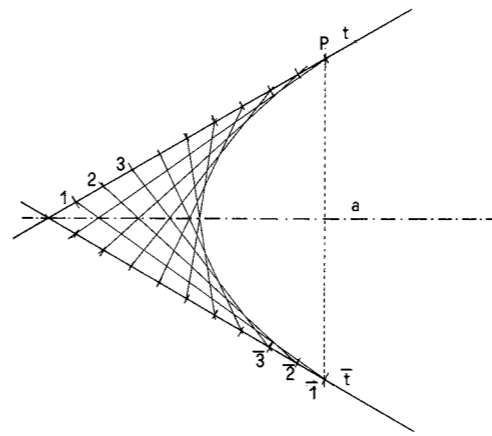


Fig. 18

numerazione inversa, rispettivamente  $1; 2; \dots; n-1$  e  $\bar{n}; \bar{n-1}; \dots; \bar{2}; \bar{1}$ : le congiungenti le coppie di punti  $1, \bar{1}; 2, \bar{2}; \dots; n-1, n-1$  sono altrettante tangenti della parabola-inviluppo (fig. 18).

6. *Le spirali.* Le spirali sono curve piane infinitamente estese, assai note e frequenti nell'architettura classica come elemento decorativo, basti pensare alle curve direttrici delle volute caratterizzanti i diversi tipi di capitelli, in particolare il capitello ionico. Tali curve sono generate da un punto che compie nel piano un moto composto: di *rotazione intorno a un centro* e di *traslazione lungo una semiretta* (raggio) uscente dal centro; le diverse relazioni tra i due moti determinano l'andamento di ciascun tipo di spirale. Nella *spirale di Archimede* il moto del punto è uniformemente composto, e la *distanza tra due spire successive è costante*, cioè i punti di ciascuna *spira*, segmento di curva relativo al percorso di un intero angolo giro, sono equidistanti dai corrispondenti punti – quelli sullo stesso raggio – della spira successiva. Esistono numerosi procedimenti empirici per la costruzione di questa spirale, che assimilano tratti di curva ad archi di cerchi mutuamente tangenti e di raggi progressivamente crescenti; la costruzione è tanto più approssimata, quanto più brevi siano quegli archi di cerchio: da soli due centri  $A, B$  – estremi di un segmento da cui tracciare alternativamente semicerchi di raggio via via crescente –, a tre, quattro o più centri, vertici di un poligono di tre, quattro o più lati, da cui tracciare archi di cerchio, nei diversi casi e nell'ordine, di lunghezze decrescenti (figg. 19a, b, c).

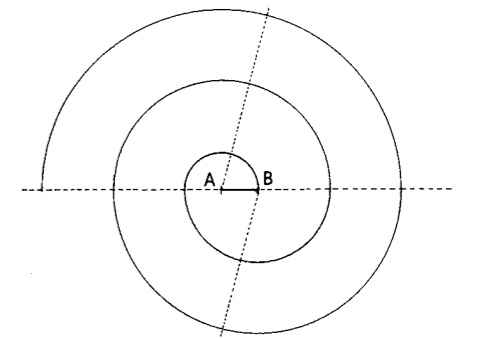


Fig. 19a

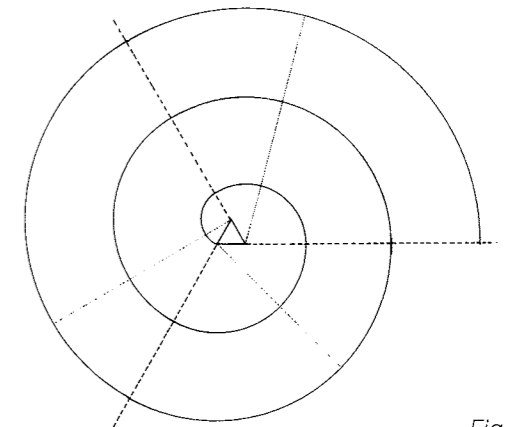


Fig. 19b

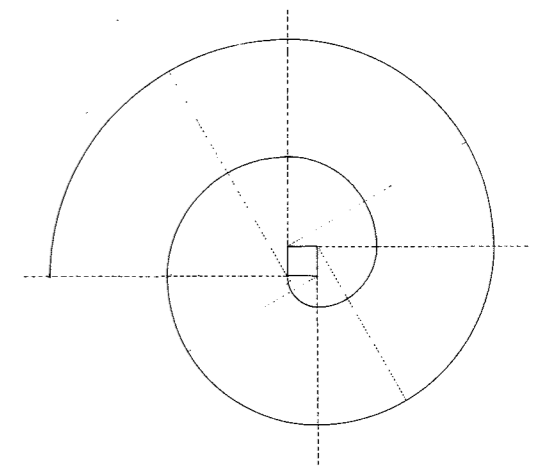


Fig. 19c

Una costruzione più aderente alla genesi della spirale di Archimede è quella che si realizza tracciando, per ciascuna spira, un certo numero  $n$  di cerchi concentrici e lo stesso numero di raggi: i punti della spirale sono quelli comuni a ciascun raggio e al relativo cerchio (fig. 20); evidentemente il tracciamento della curva risulta tanto più corretto quanto, per uno stesso tratto di curva, sia più alto il numero  $n$ .

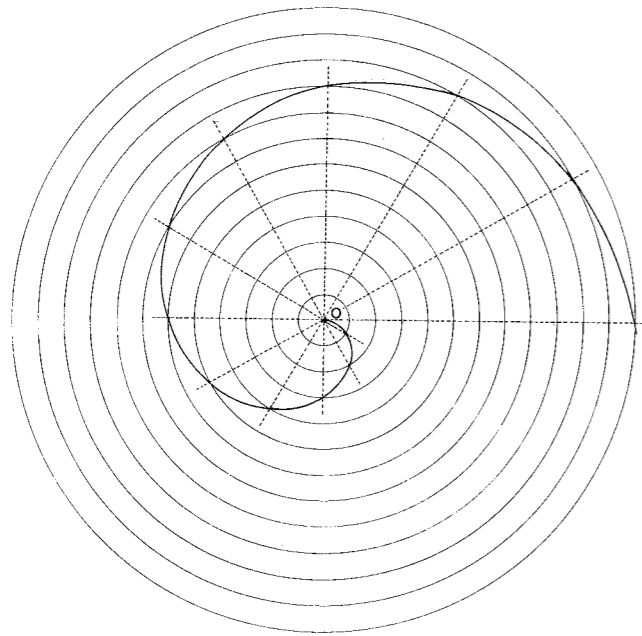


Fig. 20

Nella spirale logaritmica invece la distanza tra le spire cresce secondo una legge appunto logaritmica, proprietà che rende la curva estremamente dinamica. Un metodo che comporta una buona approssimazione è quello che prevede il tracciamento di un elevato numero di semirette di origine  $O$  formanti angoli uguali e dello stesso numero di cerchi di centro  $O$  e raggio crescente con legge esponenziale; ciascuno di tali cerchi si costruisce nel modo seguente (fig. 21): scelto un punto  $1$  di una prima semiretta, molto vicino al centro  $O$ , si tracci un segmento  $1A$  tale che formi con la semiretta un angolo più o meno prossimo a  $90^\circ$ , secondo l'andamento previsto per la curva (che risulterà tanto più rapidamente crescente quanto più tale angolo sia inferiore ai  $90^\circ$ ), essendo l'estremo  $A$  il punto d'intersezione con la semiretta successiva; con centro in  $O$  e raggio  $OA$ , si tracci il primo cerchio, la cui intersezione con la semiretta  $O1$  sia il punto  $2$ ; da questo si conduca il segmento  $2B$  parallelo al precedente  $1A$ , e con raggio  $OB$  si tracci il cerchio successivo, e così procedendo si traccino

tutti gli altri cerchi: la spirale si ottiene (come nell'ultima costruzione della spirale di Archimede) congiungendo nell'ordine i punti comuni a ciascun raggio e al corrispondente cerchio. Nella figura 21 i primi numeri e le corrispondenti lettere, per maggior chiarezza, sono spostati in una posizione più esterna.

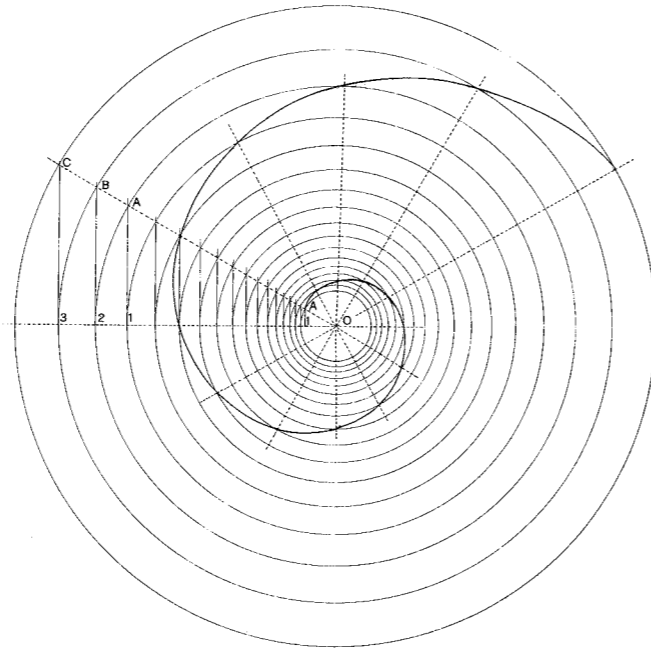


Fig. 21

Altra curva piana con andamento analogo alle spirali è la *evolvente del cerchio*; premettiamo che viene detta *evoluta* (o *svilupata*), di una data linea curva, un'altra linea luogo dei centri dei cerchi di curvatura<sup>3</sup> nei diversi punti della curva data, curva che viene detta pertanto *evolvente* (o *svilupante*) della evoluta. L'*evolvente del cerchio* – che ammette appunto come evoluta un cerchio – può considerarsi generata da un punto che percorre una tangente del cerchio mentre il cerchio stesso ruota, nel verso opposto, intorno al proprio centro. Anche per l'evolvente esiste una costruzione empirica che la assimila a una successione di archi di cerchio mutuamente tangenti (fig. 22): allo scopo, suddiviso il cerchio-evoluta in un numero  $n$  di archi uguali mediante i punti  $1, 2, \dots, n$ , e condotte le semirette tangenti in ciascun estremo, con centro nel punto  $1$  e raggio  $1n$  si tracci l'arco di cerchio fino ad incontrare in  $1'$  la prima tangente; con centro in  $2$  e raggio  $21'$  si tracci un secondo arco fino al punto d'incontro  $2'$  con la seconda tangente, così procedendo fino alla costruzione di

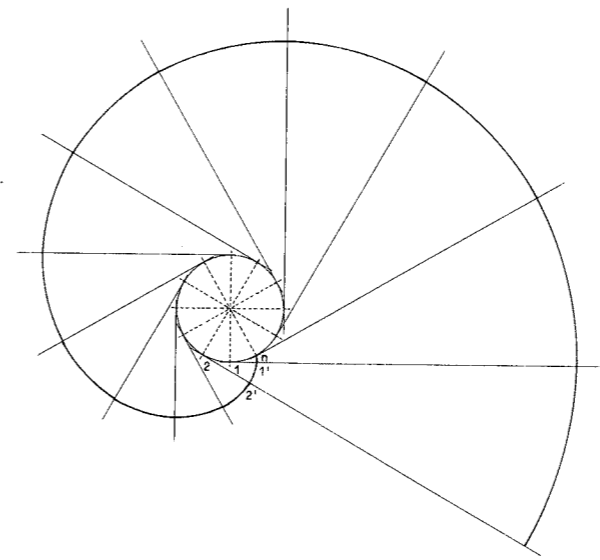


Fig. 22

una o più spire dell'evolvente. Anche in questo caso l'approssimazione al modello ideale risulta tanto più vicina quanto maggiore sia il numero delle suddivisioni del cerchio. È una evolvente del cerchio la curva d'intersezione di un *elicoide sviluppabile* (cfr. 3.4.2.) con un piano perpendicolare all'asse.

6. La *cicloide* è una curva piana infinitamente estesa, generata dal moto che compie un punto  $P$  appartenente a una circonferenza mentre questa ruota intorno al proprio centro e il centro stesso si sposta lungo una retta dello stesso piano, il punto  $P$  cioè compie nel piano un *moto composto di rotazione intorno a un centro e di traslazione in una determinata direzione*: se a un'intera rotazione del punto corrisponde una traslazione di lunghezza uguale alla misura della circonferenza, la cicloide è detta *normale*; se la traslazione ha lunghezza inferiore, la cicloide è detta *accorciata*; se maggiore *allungata*. Nel primo caso la curva ammette una *cuspid*e in ogni punto corrispondente a un'intera rotazione del cerchio; nel

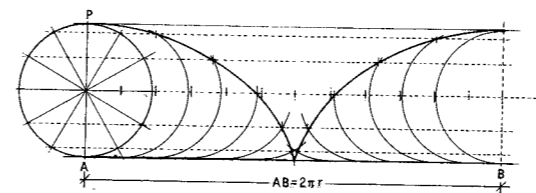


Fig. 23 a

secondo ammette *un nodo* per ogni rotazione; nel terzo *due punti di flesso* per ogni rotazione (figg. 23a, b, c). La cicloide è particolarmente interessante poiché in ciascuna delle tre versioni può costituire l'immagine assonometrica (ortogonale) o l'ombra portata di un'elica cilindrica (cfr. Parte IV., 3.1.16.)

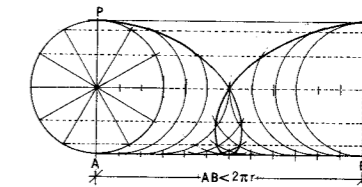


Fig. 23b

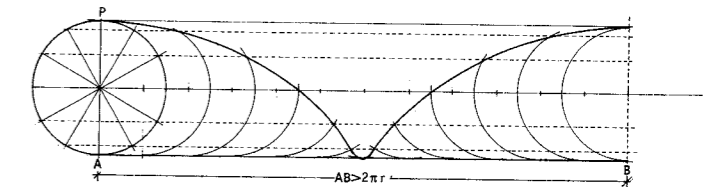


Fig. 23c

### 2.3 Curve sghembe

1. Quando il punto generatore si muove nello spazio in modo che quattro punti successivi del suo percorso non siano contenuti in un piano, la linea descritta è denominata *curva gobba* o *sghemba*. Come per le curve piane, viene detta *tangente* a una curva sghemba la retta che passa per due posizioni successive del punto mobile (per due punti della curva infinitamente vicini); è detto *piano osculatore* della curva il piano che passa per tre posizioni successive del punto mobile (per tre punti della curva infinitamente vicini). Un tale piano è definito da due tangenti successive della curva, mentre l'insieme delle tangenti individua una superficie rigata detta *svilupabile osculatrice* della curva: le tangenti alla curva costituiscono le rette generatrici della svilupabile e i piani osculatori della stessa curva sono piani tangenti della svilupabile. Dunque in generale *una superficie rigata è detta svilupabile quando due generatrici successive sono complanari*: ci occuperemo più avanti di superfici rigate, svilupabili e non svilupabili (cfr. 3.4.).

2. Esempi di *curve sghembe* sono le intersezioni di due superfici curve, e se queste sono due *quadriche* (cfr. 3.7.2.) – definite come superfici del secondo ordine perché ciascuna rappresentata analiticamente da un'equazione di secondo grado – la curva, costituita in generale da due rami distinti, è detta *quartica* o *curva del quarto ordine*, essendo rappresentata da un sistema di due equazioni di secondo grado che definiscono le quadriche date, sistema dunque di quarto grado: questa condizione si traduce nella proprietà geometrica della quartica di essere intersecata da un piano in quattro punti<sup>4</sup>.

In particolare la quartica intersezione di *due coni circolari* (detti *coni quadrici* in quanto superfici di secondo ordine, che insieme con i *cilindri quadrici* sono considerati *quadriche specializzate*) può anche essere costituita da un solo ramo, con o senza un punto doppio, secondo le posizioni reciproche dei due coni; se i coni hanno una generatrice in comune, la quartica si spezza in *una retta* (la generatrice comune) e in una *curva del terzo ordine*, detta perciò *cubica sghemba*; o ancora, se i coni hanno in comune una conica, la quartica intersezione si spezza in *due coniche*, di cui una è appunto quella comune. Nel caso di due cilindri (coni a vertice improprio) aventi le direttrici circolari di uguale diametro, la quartica intersezione è costituita da *due ellissi*: è il caso delle volte a padiglione e a crociera (cfr. 4.3.2.). La quartica si spezza infine in quattro rette se i coni hanno in comune il vertice.

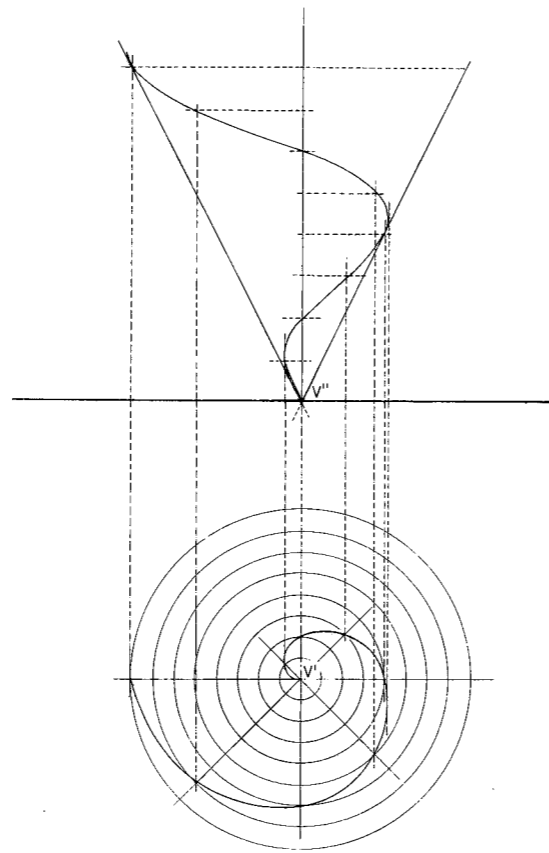


Fig. 24

3. *Elica conica e elica cilindrica*. Le *eliche*, curve sghembe infinitamente estese, sono generate da un punto che compie nello spazio un moto composto, di *rotazione intorno a un asse e di traslazione lungo una retta*: se tale retta è parallela all'asse si ha l'*elica cilindrica*; se interseca l'asse, l'*elica conica*. Quest'ultima, piuttosto rara in architettura (è presente nella lanterna della cupola di S. Ivo alla Sapienza), va ricordata anche perché la sua proiezione ortogonale su un piano perpendicolare all'asse è una *spirale di Archimede* (fig. 24). La prima è invece di fondamentale importanza per la costruzione e la rappresentazione di *rampe e scale elicoidali*, queste ultime volgarmente dette 'a chiocciola' (cfr. 3.4.4.).

L'*elica cilindrica* è una curva sghemba infinita, generata da un punto che si muove uniformemente lungo una circonferenza, mentre il centro di questa scorre lungo una retta perpendicolare al piano del cerchio: si tratta di un *moto composto di rotazione in un piano e di traslazione nella direzione ortogonale al piano*. Possiamo anche dire, in accordo con la sua

genesì, che si tratta di una curva che si avvolge sulla superficie di un cilindro circolare retto.

La rappresentazione grafica di questa, come delle altre curve sghembe, si realizza individuandone le proiezioni di un certo numero di punti, considerati come altrettante posizioni del punto mobile generatore.

Assegnato nel *metodo di Monge* un cilindro retto indefinito, se ne operi una sezione orizzontale a una quota uguale al *passo dell'elica* – cioè alla distanza tra i due punti dell'elica corrispondenti a un intero giro del punto mobile –, la prima proiezione  $\epsilon'$  della curva coincide con il *cerchio direttore* del cilindro, mentre la seconda è costituita da una *sinusoide*  $\epsilon''$ , che si costruisce nel modo seguente (fig. 25): diviso il cerchio in un certo numero di archi uguali e la seconda proiezione del cilindro nello stesso numero di sezioni orizzontali, e stabilito un verso di rotazione del punto mobile, le seconde proiezioni dei punti,

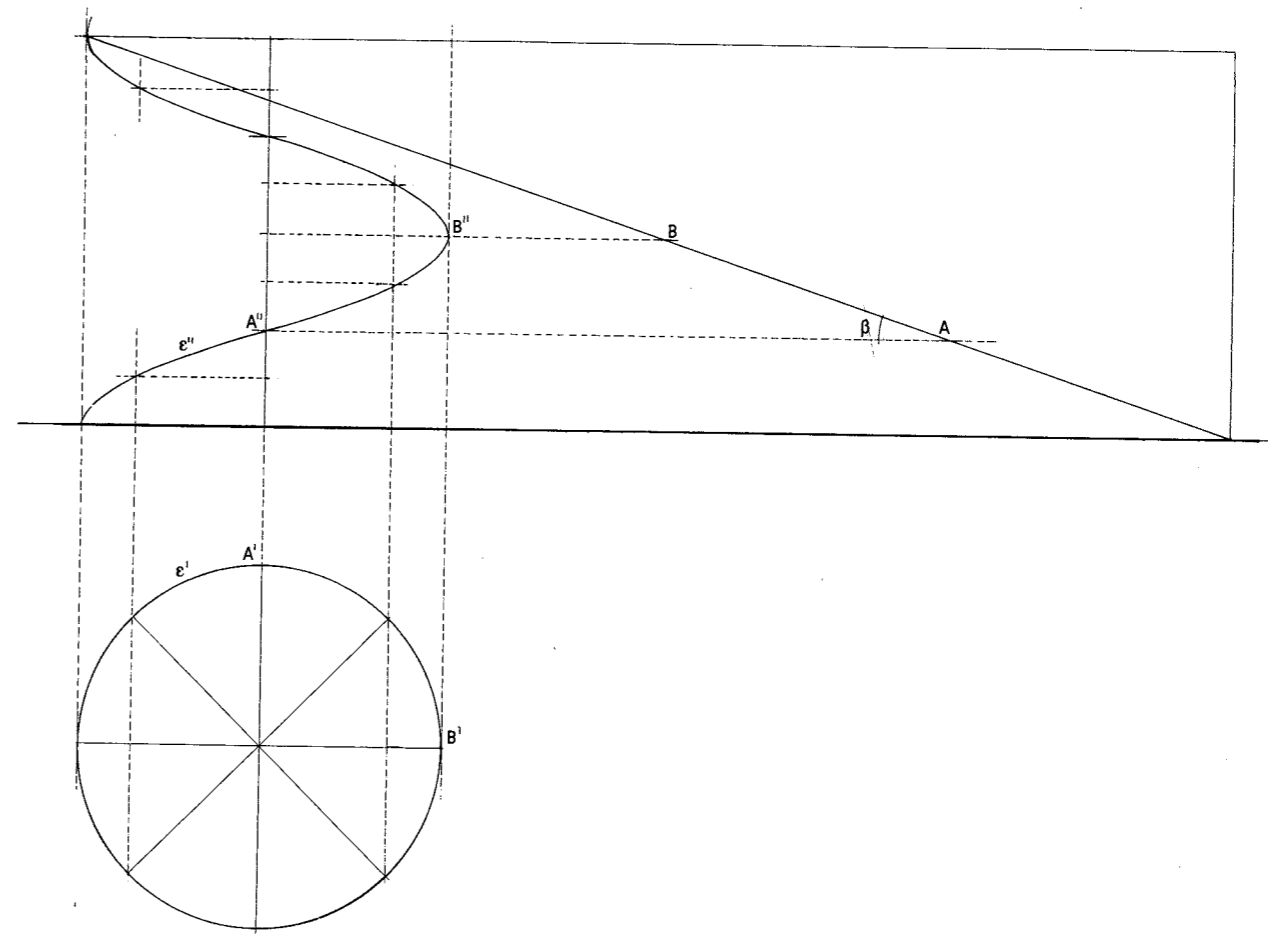


Fig. 25

che in prima proiezione sono gli estremi degli archi di cerchio, cadono ciascuna sulla corrispondente sezione orizzontale.

Se riportiamo due punti  $A, B$  dell'elica sullo sviluppo del cilindro (costituito da un rettangolo avente la base uguale alla lunghezza  $2\pi r$  della circonferenza di raggio  $r$ , e l'altezza uguale a quella del cilindro), il segmento della retta cui appartiene  $AB$  è una diagonale del rettangolo-sviluppo del cilindro e costituisce lo sviluppo dell'elica stessa – relativamente al tratto corrispondente al passo – e l'angolo  $\beta$  che  $AB$  forma con una retta orizzontale dicesi *inclinazione dell'elica* (cfr. fig. 25). La *sinusoide*  $\epsilon''$  assume la massima curvatura (cfr. nota 1) nei punti di contatto con le due generatrici del secondo contorno del cilindro, e presenta un *punto di flesso* ogni volta che

la curva incontra l'asse, mentre la tangente in questo punto, in quanto parallela alla retta-sviluppo della curva (o all'altra diagonale del rettangolo), ne fornisce evidentemente l'inclinazione. Per la costruzione di altre spire dell'elica, si procede in modo analogo sulle successive sezioni del cilindro, ciascuna di altezza uguale alla prima.

L'*assonometria cavaliere* dell'elica si può costruire (fig. 26) trasformandone il cerchio  $\epsilon'_1$  prima proiezione mongiana, mediante la nota relazione di *omologia affine*, nella corrispondente ellisse  $\epsilon'_1$  prima proiezione assonometrica, e staccando poi sulle semirette verticali (generatrici dell'ideale cilindro) le altezze dei diversi punti dell'elica, come traslazioni nella direzione dell'asse  $y'$  delle corrispondenti suddivisioni dell'ellisse  $\epsilon'_1$ .

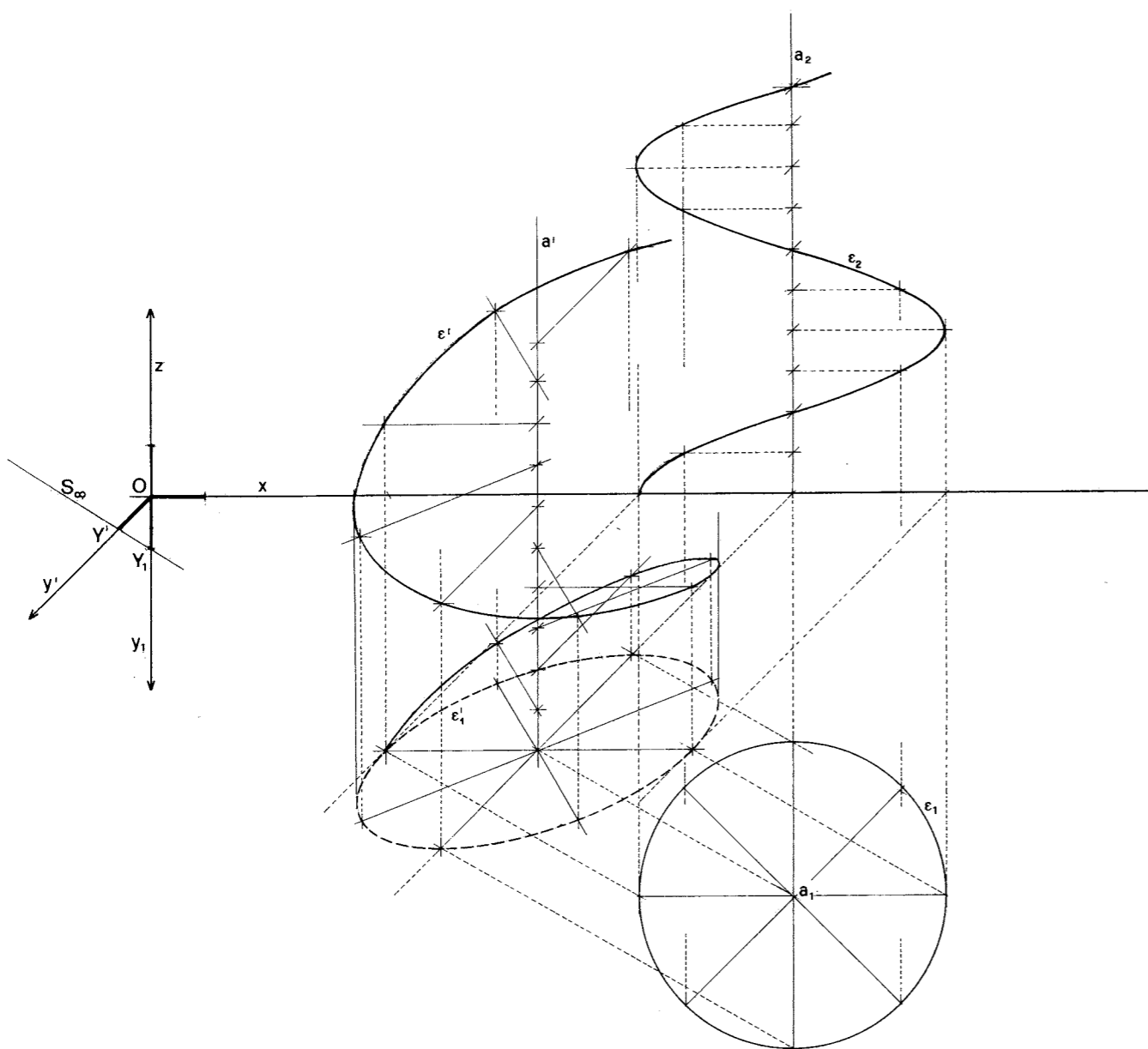


Fig. 26

La rappresentazione prospettica dell'elica si esegue preferibilmente con il metodo del ribaltamento del cerchio prima proiezione mongiana: determinati i punti di fuga dei diametri del cerchio-base e la prospettiva  $a'$  dell'asse, si stacchino su  $a'$  i successivi punti relativi alle sezioni orizzontali mongiane (equidistanti nel caso della prospettiva a quadro verticale; a distanze decrescenti oppure crescenti se la prospettiva è a quadro inclinato, verso l'osservatore o rispettivamente verso l'oggetto); le prospettive delle semirette condotte per tali punti, e nella realtà paral-

lele ai corrispondenti diametri del cerchio-base, devono evidentemente concorrere nei punti di fuga di quei diametri; nelle figure 27 e 28 tali punti sono nell'ordine:  $V_o$  (rispettivamente  $K$ ), fuga delle normali alla fondamentale  $f$ ;  $D_1$  e  $D_2$ , fughe dei diametri inclinati di  $45^\circ$  rispetto ad  $f$ ; il punto improprio della retta di orizzonte  $o$ , fuga del diametro parallelo ad  $f$ ; le intersezioni di ciascuna di quelle semirette con la verticale ( $o$  con la retta per  $F'_n$ ) condotta per il corrispondente punto  $\epsilon'_1$  sono punti dell'immagine prospettica  $\epsilon'$  dell'elica.

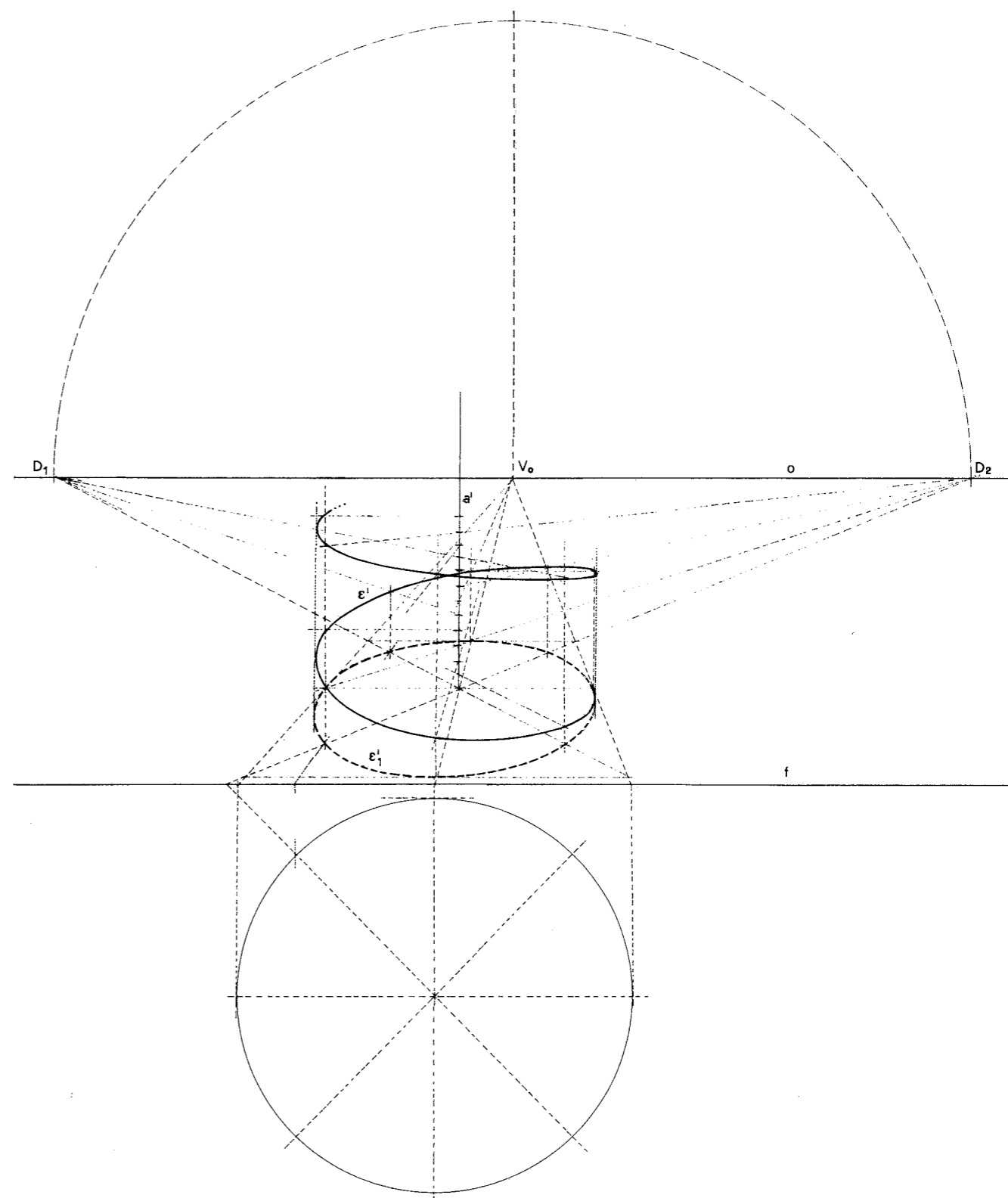


Fig. 27



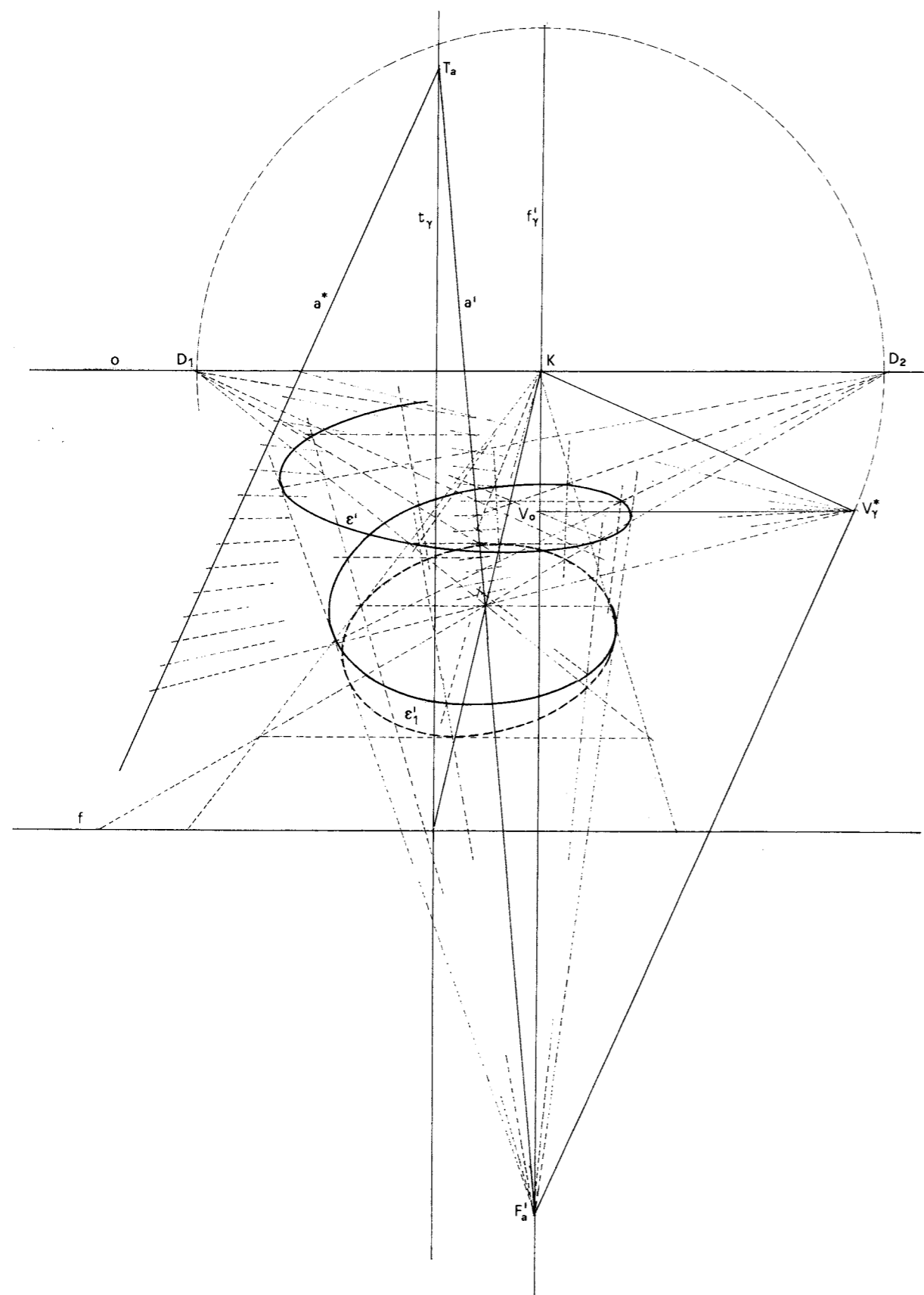


Fig. 28

### 3 Superfici

#### 3.1 Definizioni e genesi

1. Ogni superficie geometricamente definita può considerarsi generata da una linea, retta o curva, che si muove nello spazio seguendo una determinata legge di moto. I *coni* (e i *cilindri*) sono generati dal moto di una retta, detta appunto *generatrice*, che mantenendo fisso un suo punto proprio (o improprio) detto *vertice*, si appoggia a una curva piana – non complanare con la generatrice – oppure a una curva sghemba, detta *direttrice*: se tale curva è una conica, il cono (o il cilindro) è detto *quadrico* (cfr. 2.3.2.). Le *superfici di rotazione* sono generate appunto dalla *rotazione di una linea retta o curva intorno a un asse*. Nel caso di una retta, se questa è sghemba rispetto all'asse si ha una quadrica rigata, precisamente un *iperboloide iperbolico di rotazione* (cfr. 3.3.1.), se complanare con l'asse si ha il *cono circolare retto*, oppure il *cilindro circolare retto*, secondo che la retta *generatrice* abbia in comune con l'asse rispettivamente un punto proprio o un punto improprio.

La *sfera* – definita come insieme dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso – può essere generata dalla rotazione di un cerchio (più precisamente un semicerchio) rispetto a ciascuno dei suoi diametri, di volta in volta assunto come asse; la superficie della sfera, largamente adottata in architettura come intradosso di numerose coperture a volta (cfr. 4.5.), come elemento decorativo o come padiglione fieristico, è espressione di numerose altre proprietà: è una superficie ovunque convessa (il piano tangente in ogni suo punto lascia l'intera superficie da una stessa parte); è una superficie a doppia curvatura e perciò non sviluppabile (non distensibile sul piano); dal punto di vista proiettivo è un particolare *ellissoide* cioè una *superficie quadrica* (cfr. 3.3.).

Oltre alla sfera, anche altre *quadriche* – che in quanto superfici del *secondo ordine* sono l'equivalente nello spazio delle sezioni coniche – possono configurarsi come superfici di rotazione, quando siano generate dalla rotazione di una conica intorno a un suo asse (cfr. 3.3.1.).

Un'altra famiglia è quella delle *superfici rigate* (cfr. 3.4.) a cui appartengono anche alcune quadriche, quali l'iperboloide iperbolico, il paraboloido iperbolico, i coni e i cilindri; le superfici rigate sono generate dal *moto di una retta*, detta appunto *generatrice*, che si appoggia a una o più altre linee, curve oppure rette, di cui una eventualmente impropria.

L'elemento generatore di particolari superfici, dette *elicoidi cerchiati*, è appunto un *cerchio* il cui centro percorre un'elica, mentre il suo piano mantiene una determinata posizione rispetto all'asse o rispetto all'elica (cfr. 3.5.).

La rappresentazione delle superfici viene estesa ai *poliedri regolari*, solidi convessi limitati da facce costituite da poligoni regolari e uguali (cfr. 3.6.) e infine a una serie di superfici frequenti in architettura come gli archi e le volte (cfr. 4.2., 4.3., 4.4.).

#### 3.2 Le superfici di rotazione

1. *Genesi configurativa*. La legge configurativa di queste superfici è appunto la *rotazione di una linea, retta o curva, intorno a un asse*: se la linea è una retta complanare oppure sghemba rispetto all'asse, come abbiamo accennato, si hanno rispettivamente il *cono* (o il *cilindro*) *circolare retto*, o l'*iperboloide iperbolico di rotazione*. Più in generale la linea generatrice è una curva, e se tale curva è una conica (per l'esattezza, la metà di una conica sezionata lungo uno dei suoi assi), si hanno le *quadriche di rotazione* (cfr. 3.3.1.); se in particolare è un semicerchio, la *sfera*; se infine è una curva qualsiasi, generalmente piana, le infinite possibili *superfici di rotazione*. Durante la rotazione, ogni punto della curva generatrice descrive, in un piano perpendicolare all'asse, una circonferenza il cui centro appartiene all'asse: ognuna di tali circonferenze costituisce un *parallelo della superficie*. Una superficie di rotazione ha in generale un parallelo massimo e un parallelo minimo, detti rispettivamente *equatore* e *linea* (o *cerchio*) *di gola*. Ogni piano passante per l'asse interseca la superficie secondo due posizioni della curva generatrice che differiscono per una rotazione di 180°, curve che insieme costituiscono un *meridiano della superficie* e il cui piano è detto *piano meridiano*. Per ciascun punto della superficie passano un solo parallelo e un solo meridiano.

2. Nel *metodo di Monge* una superficie di rotazione, con l'asse  $a$  ( $a''$ ,  $a'$ ) perpendicolare a  $\pi_1$ , è rappresentata in prima proiezione dal cerchio-equatore  $e$ , se esiste, da quello di gola, entrambi in vera forma, con il centro nel punto  $S_a \equiv a'$  – in cui coincidono la prima traccia e la prima proiezione dell'asse  $a$  –, e in seconda proiezione dalla retta  $a'$  e dal meridiano contenuto nel piano di fronte passante per l'asse, che prende il nome di *meridiano principale*; tale cerchio (o tali due cerchi) e tale meridiano costituiscono rispettivamente il *primo* e il *secondo contorno appa-*

rente della superficie (fig. 29).

Ogni altro *parallelo* è rappresentato in prima proiezione, come l'equatore e la gola, da un cerchio di centro  $S_a'$  e di raggio uguale a quello del parallelo obiettivo; la seconda proiezione del parallelo è un segmento di retta orizzontale di lunghezza uguale al suo diametro e avente il punto medio sulla retta  $a''$ .

Fig. 29

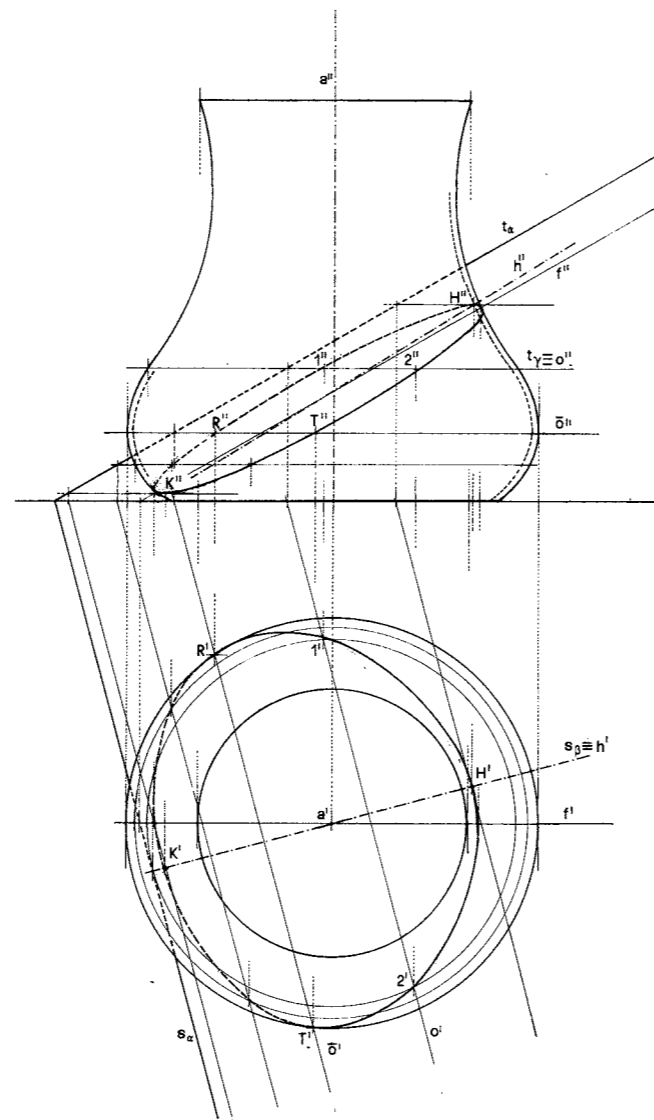
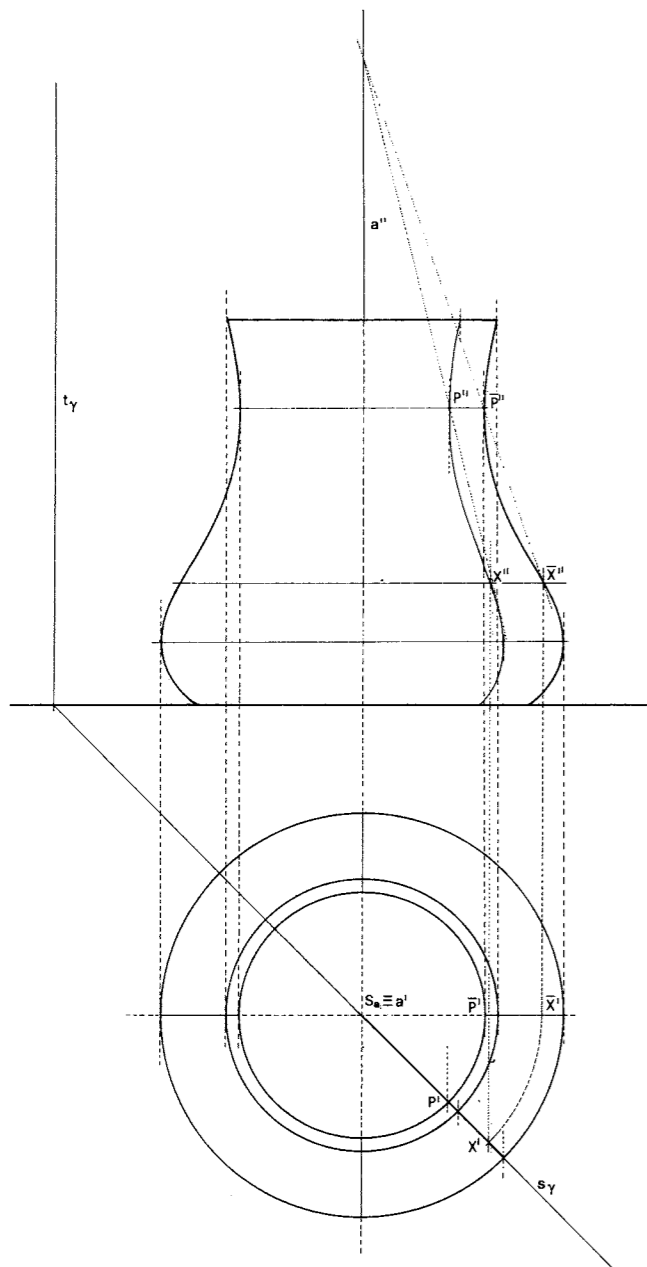


Fig. 30

Un generico *meridiano* è rappresentato in prima proiezione da un diametro o da due segmenti di diametro (cfr. Parte IV. 2.3.4.) del cerchio-equatore; in seconda proiezione un meridiano passante per un punto della superficie può costruirsi come omologo del meridiano principale in un'*affinità omologica ortogonale* avente per asse la retta  $a''$ : infatti tali meridiani (come due qualunque altri meridiani) si possono considerare nello spazio l'uno la proiezione dell'altro secondo la direzione ortogonale al piano bisettore del diedro dei rispettivi piani, la cui retta comune è appunto l'asse  $a$  (oppure ciò che è lo stesso l'uno il ribaltato dell'altro nel ribaltamento del pri-

mo dei rispettivi piani meridiani sul secondo); allora il meridiano passante per un punto  $P(P'', P')$  della superficie si costruisce per punti mediante la suddetta omologia, in cui sono punti corrispondenti  $\bar{P}$  (appartenente al meridiano principale e allo stesso parallelo cui appartiene  $P$ ) e  $P''$ , nella figura 29 è evidenziata la costruzione del punto  $X''$ , come omologo di un punto  $\bar{X}''$  del primo meridiano. Si noti che ciascun punto, esclusi quelli del meridiano principale, rappresenta in seconda proiezione due punti distinti della superficie, precisamente quelli che appartengono a uno stesso parallelo e le cui prime proiezioni stanno su un'unica retta di richiamo.

3. Ogni *sezione* della superficie con un piano generico  $\alpha$  è una linea curva, che si determina costruendone (coppie di) punti ottenibili secondo con una serie di piani orizzontali la superficie stessa e il piano  $\alpha$ ; ognuno di tali piani, ad esempio  $\gamma$ , seca la superficie secondo un parallelo e il piano  $\alpha$  secondo una retta  $o$ , evidentemente orizzontale: i punti 1, 2 comuni al cerchio e alla retta appartengono alla curva-sezione cercata (fig. 30).

Per la determinazione di punti particolari della curva-sezione, come gli eventuali *punti più alto e più basso*, e quelli di *contatto con il primo e con il secondo contorno apparente*, si ricorre a procedimenti diversi. I punti del primo tipo sono quelli in cui la curva ammette come tangenti rette orizzontali: costruita la retta  $h(h'', h')$  di massima pendenza di  $\alpha$ , come intersezione dello stesso piano  $\alpha$  con il piano meridiano  $\beta$  perpendicolare ad  $\alpha$ : i punti più alto e più basso, rispettivamente  $H(H'', H')$  e  $K(K'', K')$ , sono quelli comuni alla retta  $h$  e al meridiano della superficie contenuto in  $\beta$ ; per costruire questo meridiano se ne determini un punto  $P(P'', P')$  come intersezione della retta che  $\beta$  ha in comune ad esempio con l'equatore e si trasformino alcuni punti del meridiano principale mediante la suddetta affinità di punti corrispondenti  $\bar{P}'', P''$ . I punti di contatto con il secondo contorno sono quelli in cui la seconda proiezione  $f''$  della retta di fronte  $f$ , intersezione del piano  $\alpha$  con il piano meridiano principale, incontra quel contorno; i punti di contatto  $R', T'$  con il primo contorno, sono quelli comuni alla prima proiezione  $\bar{o}'$  della retta orizzontale  $\bar{o}$  - intersezione di  $\alpha$  con il piano equatoriale - e al cerchio-equatore.

Un piano  $\alpha$  tangente in un punto  $P(P'', P')$  della superficie è determinato dalle due rette  $o(o'', o')$  e  $t(t'', t')$ , tangenti rispettivamente al parallelo e al meridiano passanti per  $P$ : la tangente  $o$  è evidentemente una retta orizzontale la cui prima proiezione  $o'$  passa

per  $P'$  (fig. 31); la seconda proiezione  $t''$  di  $t$  si costruisce come trasformata della retta  $\bar{t}$ , tangente al meridiano principale in  $\bar{P}''$  (punto omologo di  $P''$  nell'affinità tra le seconde immagini di questo meridiano e di quello per  $P$ ) mentre la prima proiezione  $t'$  coincide con il raggio passante per  $P'$ : le tracce del piano  $\alpha$  sono quelle che congiungono le tracce omonime delle rette  $o$  e  $t$ .

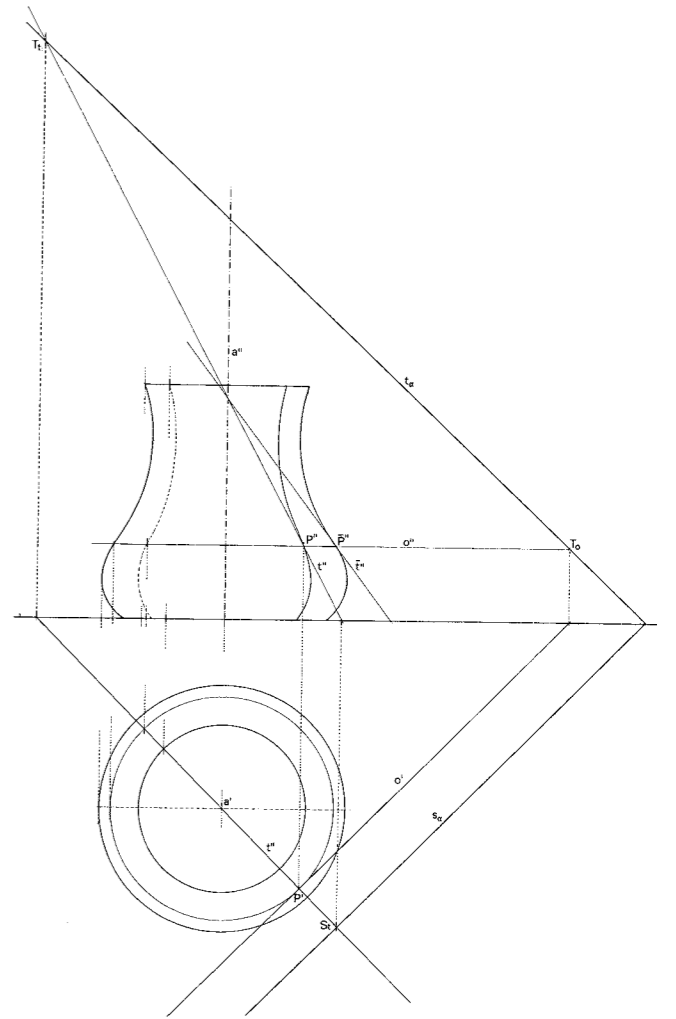


Fig. 31

4. *Superfici di rotazione a profilo non continuo*. In architettura abbiamo un esempio di superfici di questo tipo nella *base di una colonna*. La rappresentazione assonometrica come quella prospettica si possono costruire, determinando in entrambi i casi un

certo numero di meridiani, raccordandoli poi mediante le curve involuppo.

Nel caso dell'*assonometria cavaliera*, data la rappresentazione mongiana della parte di colonna interessata (fig. 32), si proceda come di consueto alla trasformazione della pianta mongiana nella corrispondente prima proiezione assonometrica; trasformato poi mediante traslazione il meridiano principale (della seconda proiezione mongiana) nel relativo meridiano assonometrico, si costruiscano altrettanti meridiani come corrispondenti ciascuno del precedente, a partire da quello principale, nelle diverse *affinità omologiche*, generalmente oblique, aventi per asse l'immagine  $a'$  dell'asse della colonna e per centro di

volta in volta la direzione  $\bar{S}_\infty$  della retta che congiunge due punti corrispondenti dell'ellisse, immagine di uno stesso parallelo: queste affinità costituiscono l'equivalente delle affinità ortogonali tra le seconde proiezioni mongiane degli stessi meridiani, tuttavia variando qui di volta in volta la direzione del centro; disegnate le immagini di alcuni meridiani più esterni, se ne traccino infine le curve-inviluppo.

Per la *rappresentazione prospettica*, costruite le ellissi che costituiscono la proiezione geometricale della colonna, i diversi meridiani si rappresentano ricordando che in questo caso le relazioni tra le coppie di immagini dei meridiani stessi sono *omologie a centro proprio*, centro che coincide di volta in volta

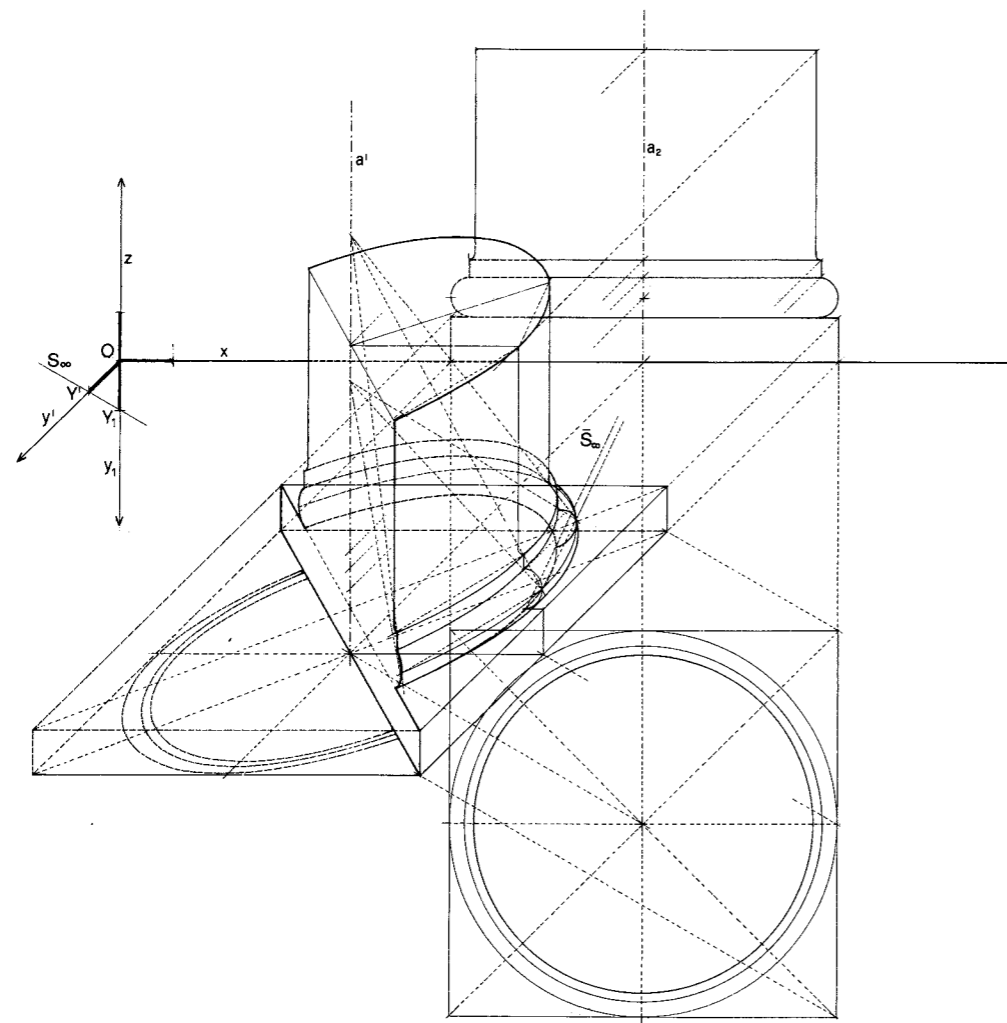


Fig. 32

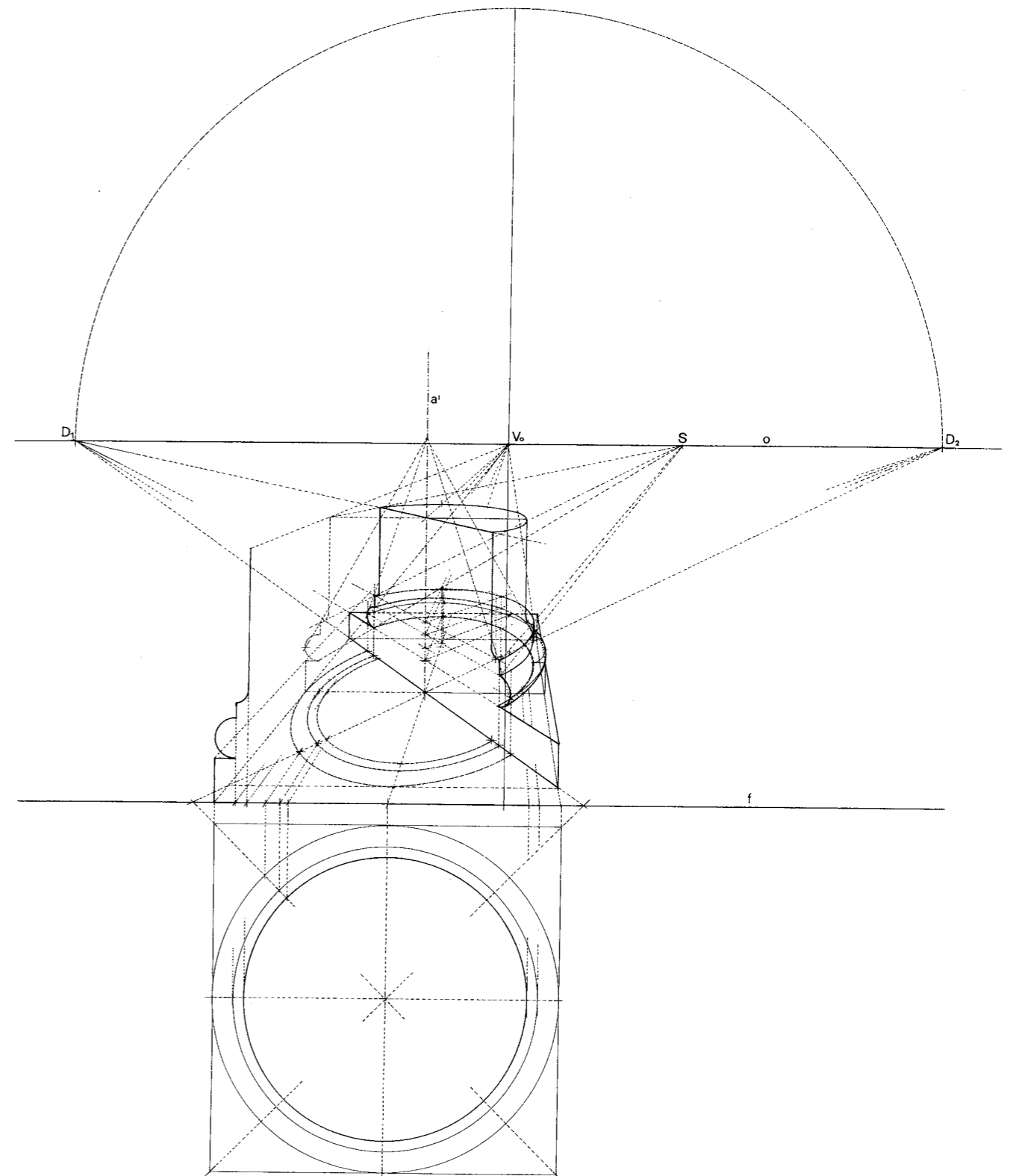


Fig. 33

con il punto di fuga delle rette orizzontali passanti per le coppie di punti corrispondenti dello stesso parallelo, come ad esempio il punto  $S$ , che coincide con la fuga della retta che congiunge una coppia di punti corrispondenti (fig. 33); si proceda infine con il tracciamento della linea-inviluppo.

### 3.3 Le superfici quadriche

1. *Definizioni e proprietà.* Si definiscono *superfici quadriche* o semplicemente *quadriche* le superfici algebriche del *secondo ordine*, cosiddette perché rappresentate analiticamente da equazioni di secondo grado (in tre variabili): tale condizione si traduce nella proprietà geometrica dell'avere tali superfici in comune con una generica retta due punti, condizione e proprietà che accomunano le quadriche alle coniche (cfr. 2.2.2.); e come per le coniche, se quei due punti sono reali e distinti, la retta è secante; se reali e coincidenti, è tangente; se complessi coniugati, esterna. Di queste proprietà godono anche i *coni* e i *cilindri quadrici* (o *quadriche specializzate*), quei coni e cilindri che hanno come direttrice una conica o in particolare un cerchio.

Le *quadriche non specializzate* denunciano anche figurativamente rilevanti analogie con le coniche, derivandone le rispettive denominazioni, secondo una prima classificazione, di *ellissoide*, *paraboloide*, *iperboloide*.

Ancora un importante aspetto consente di considerare le quadriche come l'equivalente nello spazio delle coniche (cfr. 2.2.3.), precisamente la definizione proiettiva, di cui diremo, secondo la quale *una quadrica è l'insieme dei punti autoconiugati in una polarità nello spazio*.

Le analogie con le coniche appaiono evidenti se consideriamo un particolare tipo di quadriche, le *quadriche di rotazione*, generate appunto dalla rotazione di una conica intorno a uno dei propri assi; più precisamente la conica costituisce un intero meridiano della superficie, mentre funge da curva generatrice una sola delle due metà della conica stessa, sezionata lungo un asse. Secondo che la conica di origine sia un'ellisse, un'iperbole o una parabola, la quadrica risulta nell'ordine un *ellissoide*, un *iperboloide*, un *paraboloide*.

E ancora, nel caso dell'*ellisse*, secondo che l'asse della rotazione coincida con l'asse minore o con l'asse maggiore, viene generata una delle due famiglie di *ellissoidi*, che differiscono tuttavia solo per la giacitura delle sezioni circolari, essendo tali sezioni normali all'asse minore negli ellissoidi del primo tipo,

all'asse maggiore in quelli del secondo: tali superfici vengono denominate rispettivamente *ellissoide schiacciato* ed *ellissoide allungato* (figg. 34 a, b). Se la quadrica è generata dalla rotazione di una *circonferenza* (che è una particolare *ellisse*), tutte le sezioni piane sono circolari e dunque questo ellissoide è una *sfera*.

La rotazione di un'*iperbole* invece può generare due superfici assai diverse, secondo che l'asse della rotazione coincida con l'asse trasverso o con quello non trasverso: la quadrica assume nell'ordine la denominazione di *iperboloide ellittico* o *a due falde*, e di *iperboloide iperbolico* o *a una falda* o *rigato*; nel primo caso le sezioni circolari sono quelle dei piani normali all'asse trasverso, nel secondo all'asse non trasverso (figg. 35a, b): in entrambi i casi si tratta di superfici infinitamente estese in due versi opposti

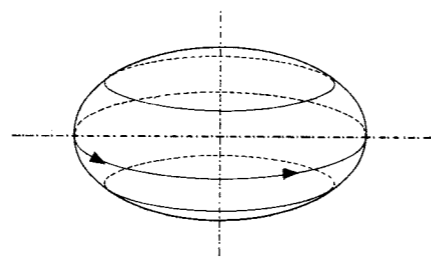


Fig. 34a

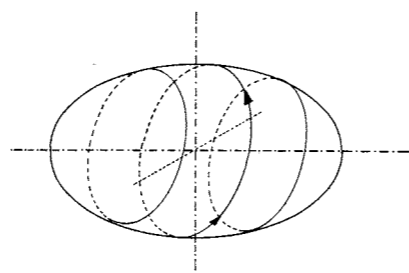


Fig. 34b

dello spazio. Nell'*iperboloide iperbolico* di rotazione esiste una sezione circolare minima, la *linea di gola*; inoltre la rotazione simultanea degli asintoti dell'*iperbole* di origine genera il *cono asintotico*, che risulta esterno alla superficie nel caso dell'*iperboloide ellittico*, interno in quello *iperbolico*.

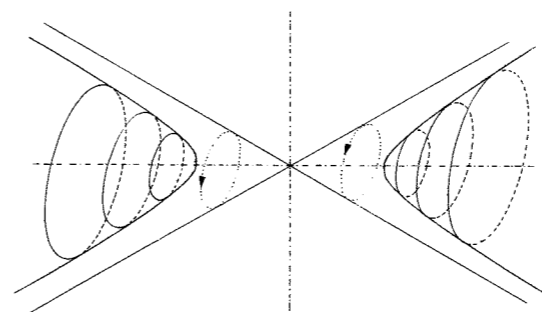


Fig. 35a

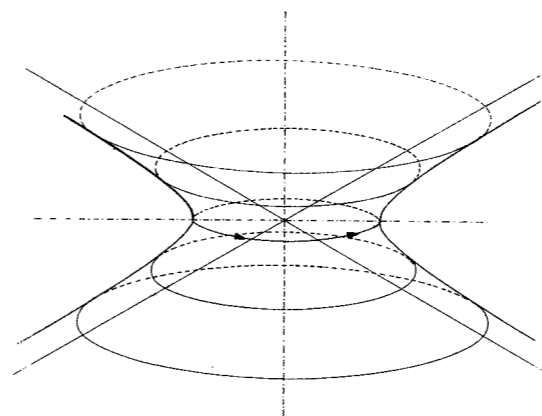


Fig. 35b

La superficie generata dalla rotazione di una *parabola* intorno al proprio asse è detta *paraboloide ellittico* e le sezioni circolari sono evidentemente quelle dei piani normali all'asse stesso (fig. 36).

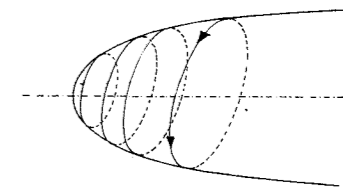


Fig. 36

Ma esiste ancora un paraboloide che non può ottenersi per rotazione della parabola, precisamente il *paraboloide iperbolico*: è possibile supporre che questa superficie sia generata dal moto di una parabola che si sposti parallelamente al proprio piano mentre il suo vertice scorre lungo un'altra parabola appartenente a un piano diverso (fig. 37). In entrambi i casi si tratta di superfici infinitamente estese in un solo verso dello spazio.

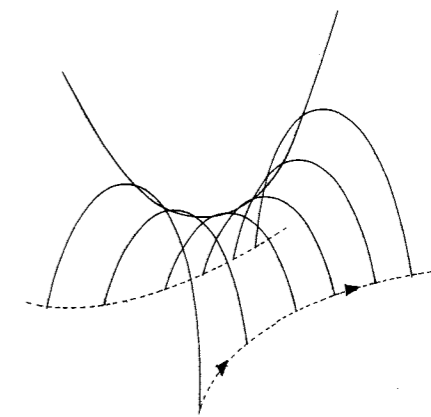


Fig. 37

Una seconda classificazione distingue dunque ancora le quadriche in due famiglie: quella delle quadriche la cui superficie è ovunque concava e caratterizzata dalla presenza di rette, dette appunto *rigate*, e quella delle quadriche la cui superficie è ovunque convessa, ed evidentemente priva di rette, dette *non rigate*; come vedremo, le due famiglie di quadri-

che sono anche dette rispettivamente a punti iperbolici e a punti ellittici.

Le prime possono essere generate secondo le leggi di tutte le superfici rigate (cfr. 3.4.3.), ma anche mediante un processo più generale comune anche alle quadriche non rigate, vale a dire dal moto di una conica variabile lungo un'altra conica (come abbiamo visto generarsi il *paraboloide iperbolico*): data allora una conica fissa, la conica variabile deve avere due punti in comune con essa, mantenendo il proprio piano parallelo a se stesso mentre il centro si sposta lungo quel diametro della conica fissa che è coniugato alla direzione delle corde determinate in essa dal piano mobile: l'*iperboloide* (sia iperbolico che ellittico) può essere generato da una ellisse fissa e un'iperbole mobile, o viceversa; il *paraboloide iperbolico* da una parabola fissa e una iperbole mobile o viceversa, oppure, come abbiamo visto, da una parabola fissa e una mobile: i due punti comuni sono in questo caso il vertice di quella mobile e il punto improprio di entrambe; il *paraboloide ellittico*, da una parabola e una ellisse; l'*ellissoide* infine, da due ellissi. Se l'ellisse mobile è un cerchio variabile, il cui centro si sposta lungo un asse dell'altra conica mantenendo il proprio piano perpendicolare a quell'asse, si tratta di un ellissoide di rotazione (cfr. 3.3.1.).

2. *Polarità rispetto a una quadrica.* Come una polarità piana (non uniforme) pone in corrispondenza biunivoca punti e rette - enti duali nel piano - rispetto a una conica (cfr. 2.2.3.), che viene definita "conica fondamentale della polarità" essendone il luogo dei punti autoconiugati, è possibile stabilire una relazione analoga nello spazio, vale a dire la *polarità rispetto a una quadrica*: in questa relazione si corrispondono punti e piani - enti duali nello spazio (S.- V., pp. 70-71) -, ciascuna coppia  $P, \pi$  definendosi come polo  $P$  del piano  $\pi$ , e inversamente piano polare  $\pi$  del punto  $P$ .

Se il punto  $P$  è esterno alla quadrica, il piano polare  $\pi$  interseca la superficie secondo una curva, che in quanto sezione piana di una quadrica è una conica<sup>5</sup>. Tale conica, in analogia con la costruzione della retta polare di un punto in una polarità piana (cfr. 2.2.3.), si può costruire come luogo dei punti di contatto delle tangenti alla superficie condotte da  $P$ , mentre l'insieme di queste tangenti individua il cono di vertice  $P$  circoscritto alla quadrica (fig. 38).

Se il polo è un punto improprio  $P_\infty$ , il cono circoscritto di vertice  $P_\infty$  diviene un cilindro, e il piano polare, che contiene la conica dei punti di contatto, passa per il centro della quadrica, e pertanto è detto piano

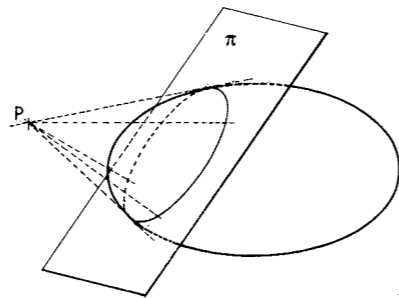


Fig. 38

diametrale; possiamo dunque dire che i piani diametrali di una quadrica sono i piani polari dei punti impropri. (fig. 39)

Se il punto  $P$  appartiene alla quadrica, il piano polare  $\pi$  passa per il proprio polo  $P$  ed è tangente alla quadrica in  $P$ : punto e piano diconsi *autoconiugati*. Si hanno dunque, in analogia con le coniche, le definizioni proiettive, tra loro duali: una quadrica è il luogo dei punti dello spazio autoconiugati in una polarità non uniforme; una quadrica è l'involuppo dei piani autoconiugati in una polarità non uniforme.

Se infine il punto  $P$  è interno alla quadrica, il piano polare è esterno e può essere determinato dai poli di tre piani passanti per  $P$ ; e se in particolare tale punto è il centro  $C$  della quadrica i tre piani passanti per  $C$  hanno come poli tre punti impropri, dunque il piano polare di  $C$ , individuato da quei tre punti impropri, è il piano improprio  $\pi_\infty$ ; possiamo quindi affermare che il centro  $C$  di una quadrica è il polo del

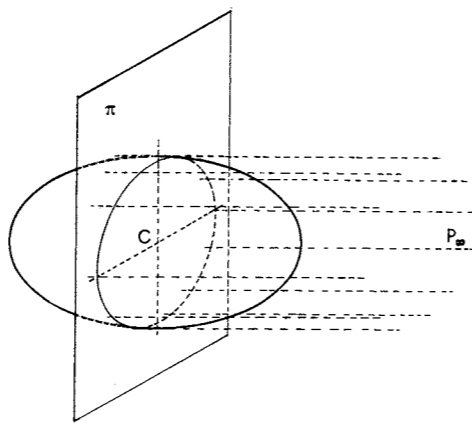


Fig. 39

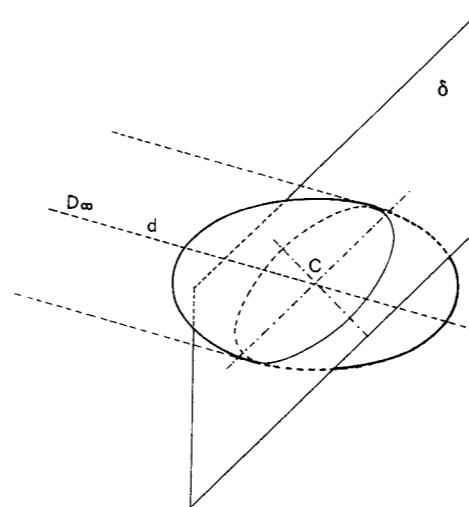


Fig. 40

piano improprio. Le rette passanti per  $C$  sono i diametri della quadrica: un diametro  $d$  dicesi coniugato di un piano diametrale  $\delta$  quando passa per il (ha cioè la direzione del) polo  $D_\infty$  di quel piano (fig. 40); sono detti assi di una quadrica i diametri ortogonali ai relativi piani diametrali coniugati (fig. 40). Sono detti ancora piani diametrali principali o piani assiali i piani ortogonali ciascuno alla propria direzione coniugata: nelle quadriche a centro - ellipsoidi e iperboloidi - esistono tre piani assiali e tre assi, questi ultimi coincidendo due a due con gli assi di quelle coniche secondo cui i piani assiali secano la quadrica (fig. 41).

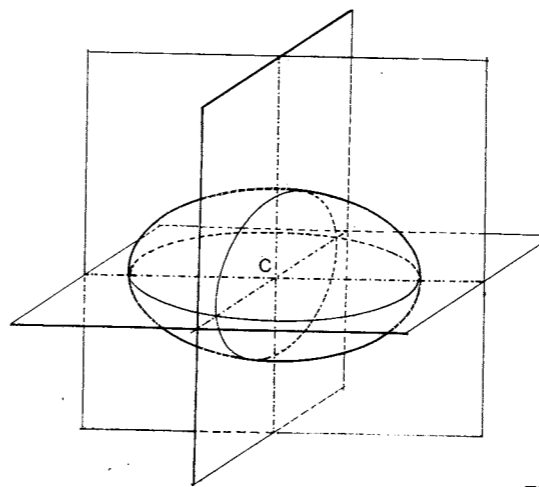


Fig. 41

Nei *paraboloide* il polo del piano improprio è un punto  $C_\infty$  autoconiugato, appartenente cioè al proprio piano polare  $\pi_\infty$ , piano che infatti è tangente alla quadrica in  $C_\infty$  (cfr. 3.3.4.); tale punto, evidentemente improprio, conserva, come nella parabola, il nome di "centro" pur non essendo un punto di simmetria per il paraboloide. Tutti i diametri, passanti per  $C_\infty$ , sono dunque paralleli, ma uno solo è asse, quello ortogonale al piano  $\gamma$  tangente alla quadrica nel vertice; i piani assiali sono due, entrambi ortogonali al piano  $\gamma$ ; mentre i piani paralleli a  $\gamma$  intersecano il paraboloide secondo coniche i cui assi sono le intersezioni di quei piani con i due piani assiali (fig. 42).

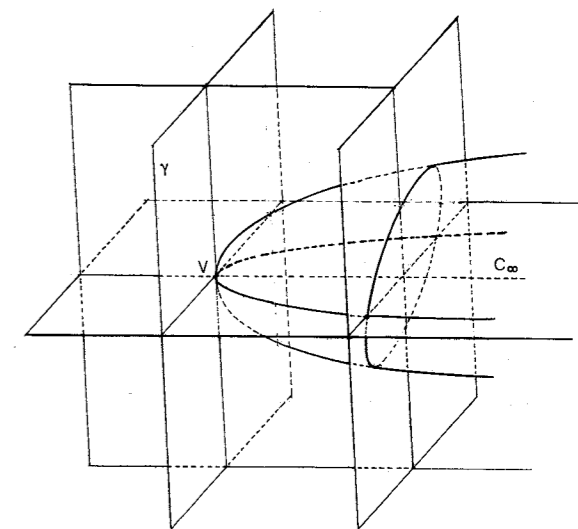


Fig. 42

3. *Punti delle quadriche.* Dalle denominazioni loro assegnate si evince, come accennato, l'esistenza di una classificazione delle quadriche secondo la natura dei punti e del loro intorno, e dunque al tipo di curvatura delle superfici stesse.

Ricordando che un piano e una quadrica hanno in comune una conica, nell'intersezione di un piano e una quadrica possono darsi tre casi: la conica sezione è reale e irriducibile (cioè non degenera), allora il piano è secante; la conica è degenera, cioè si spezza in due rette, e il piano è tangente; la conica è totalmente immaginaria e il piano è esterno alla quadrica.

Consideriamo ora un piano tangente la quadrica: può verificarsi che la curvatura della superficie sia ovunque positiva e dunque che la superficie stessa (convessa) resti interamente in uno dei semispazi definiti dal piano; oppure che la curvatura sia negativa, e allora la superficie (concava) è attraversata dal piano tangente. Nel primo caso le due rette (immaginarie) che il piano tangente ha in comune con la quadrica sono complesse coniugate e pertanto è reale il solo punto comune che costituisce il punto di contatto del piano con la superficie: la quadrica è detta *a punti ellittici*, sulla sua superficie non esistono rette reali e dunque non può trattarsi di una quadrica rigata. Sono quadriche a punti ellittici l'*ellissoide*, l'*iperboloide ellittico* (o *a due falde*) e il *paraboloide ellittico* (cfr. figg. 34a, b; 35a; 36).

Nel secondo caso, quando la superficie è attraversata dal piano tangente, le due rette sono reali e distinte e il loro punto comune è quello in cui il piano tocca la superficie; la quadrica è detta *a punti iperbolici* e pertanto per ciascun punto di essa passano due rette reali e distinte appartenenti alla quadrica – dette rispettivamente *generatrice* e *direttrice* –, rette che definiscono il piano tangente in quel punto (cfr. figg. 35 b, 37); la quadrica è allora una *superficie rigata* costituita da due schiere di rette, essendo sghembe tra loro le rette di una schiera, mentre ciascuna retta è complanare con tutte quelle dell'altra schiera. Le quadriche a punti iperbolici sono l'*iperboloide iperbolico* (o *rigato* o *a una falda*) e il *paraboloide iperbolico* (o *rigato*).

Se infine le due rette che il piano tangente ha in comune con la quadrica sono reali e coincidenti, le due schiere di generatrici coincidono, ogni generatrice è complanare con ciascuna delle altre e tutte s'intersecano in un unico punto, proprio o improprio: la quadrica, detta *specializzata*, è *a punti parabolici* e si tratta di un *cono* (o un *cilindro*) *quadrico*.

4. *Classificazione affine delle quadriche*. In analogia con la classificazione di una conica rispetto alla retta impropria del suo piano (S.-V., pp. 170-171), esiste una classificazione delle quadriche rispetto al piano improprio  $\pi_\infty$ , essendo tale piano l'insieme di tutti i punti impropri e di tutte le rette improprie dello spazio: l'*ellissoide*, superficie chiusa al finito, ha in comune con il piano improprio una *conica totalmente immaginaria*, essendo  $\pi_\infty$  esterno alla quadrica; i due *iperboloidi*, superfici infinitamente estese, hanno in comune con il piano improprio  $\pi_\infty$  una *conica reale e irriducibile* (evidentemente impropria), essendo tale piano secante (fig. 43a); il *paraboloide am-*

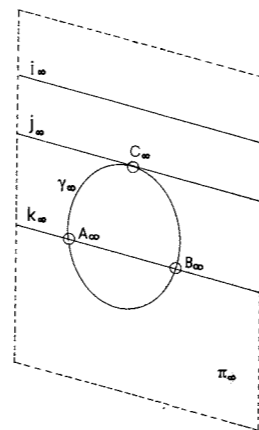


Fig. 43a

mette il piano improprio come tangente nel punto  $C_\infty$ , centro della superficie, e pertanto ha in comune con  $\pi_\infty$  due rette (evidentemente improprie): tali rette sono *complesse coniugate*, dunque immaginarie, nel caso del *paraboloide ellittico*, che infatti ha in  $\pi_\infty$  un solo punto reale, il punto improprio  $C_\infty$  dell'asse (fig. 44a); nel caso del *paraboloide iperbolico* invece, le due rette  $g_\infty$  e  $d_\infty$  che la superficie ha in comune con il piano improprio sono *reali e distinte*, e costituite ciascuna dall'insieme dei punti impropri di una delle due schiere di rette del paraboloide (fig. 45a); da ciò deriva la proprietà secondo la quale

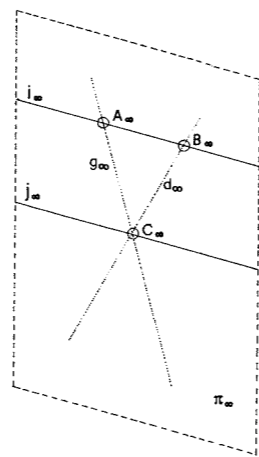


Fig. 44a

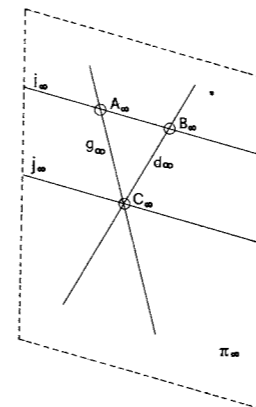


Fig. 45a

le rette di ciascuna delle due schiere, pur sghembe tra loro, sono parallele a un piano, dei quali piani essendo  $g_\infty$  e  $d_\infty$  le rette improprie ne definiscono le giaciture.

5. *Sezioni piane delle quadriche*. Osservando la conica che una quadrica ha in comune con il piano improprio, è possibile conoscere il tipo di sezioni piane esistenti sulla sua superficie. Le sezioni piane dell'*ellissoide* sono tutte e solo *ellissi*: infatti la retta impropria  $i_\infty$  di un qualunque piano  $\alpha$  secante, retta che può essere esterna o tangente oppure secante la conica (tutta immaginaria) che l'*ellissoide* ha in comune con il piano improprio, la interseca comunque in punti (impropri) evidentemente immaginari: non avendo alcun punto reale all'infinito, tutte le sezioni piane dell'*ellissoide* sono dunque sempre e soltanto ellissi, in particolare *cerchi* (in tutte le quadriche a punti ellittici, anche non di rotazione, esistono giaciture di piani che producono sezioni circolari).

Nei due *iperboloidi* sono presenti tutti i tre tipi di sezioni piane, *ellissi*, *parabole*, *iperboli*: infatti secondo che la retta impropria  $i_\infty$  ( $j_\infty$ ,  $k_\infty$ ) di un piano  $\alpha$  ( $\beta$ ,  $\gamma$ ) secante la superficie sia esterna, tangente o secante rispetto alla conica  $\gamma_\infty$  reale e irriducibile che la quadrica ha in comune con il piano improprio, la sezione del piano con la quadrica, avendo in  $\pi_\infty$  rispettivamente nessun punto (più correttamente, due punti complessi coniugati), due punti (impropri) reali e coincidenti, due punti (impropri) reali e distinti  $A_\infty$  e  $B_\infty$  in comune con  $\gamma_\infty$ , è nell'ordine un'*ellisse*, una *parabola*, un'*iperbole* (figg. 43a, b)

Le sezioni del *paraboloide ellittico* sono *parabole* ed *ellissi*: ricordando che tale quadrica ha nel piano improprio due rette complesse coniugate (immagina-

rie), se la retta impropria  $i_\infty$  di un piano  $\alpha$  secante la quadrica interseca quelle due rette in punti (impropri) evidentemente immaginari, la curva sezione non ha punti reali all'infinito e dunque è un'*ellisse*; se invece la retta impropria  $j_\infty$  di un piano  $\beta$  passa per il punto improprio reale  $C_\infty$ , comune alla due rette complesse coniugate, quel punto appartiene alla conica sezione della quadrica con il piano  $\beta$ , conica che avendo un punto all'infinito è una *parabola* (figg. 44a, b).

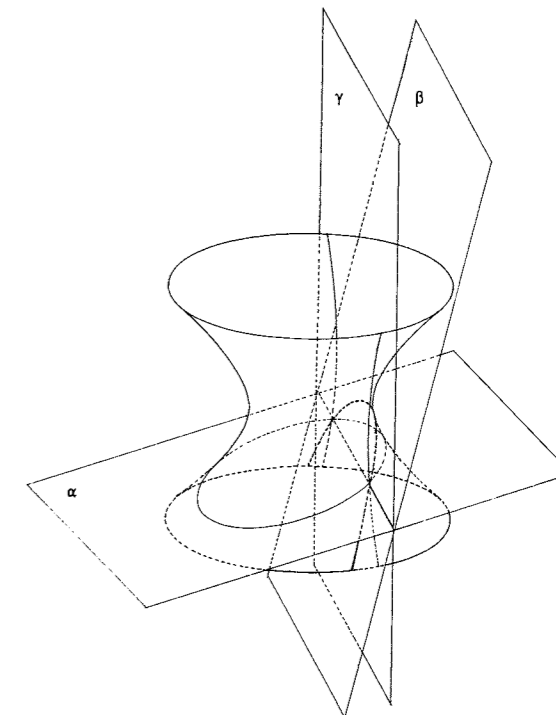


Fig. 43b

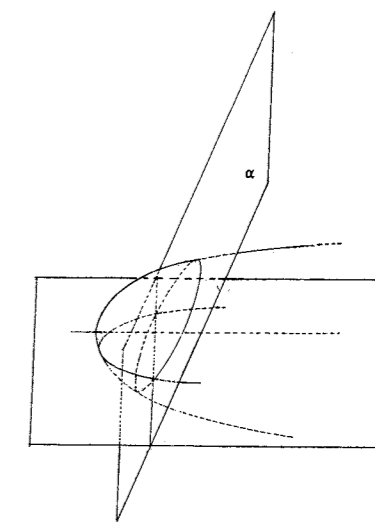


Fig. 44b

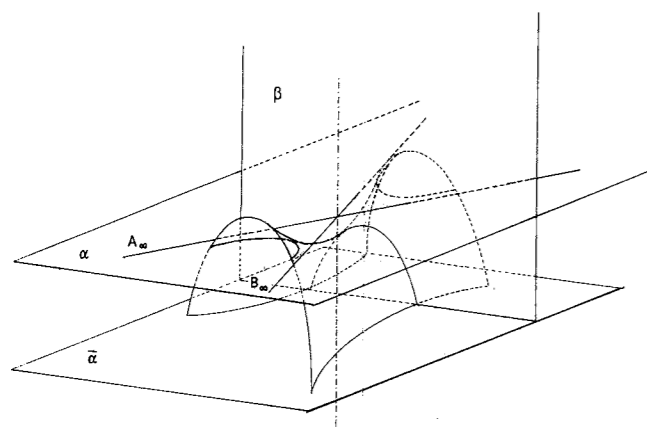


Fig. 45b

Le sezioni del *paraboloide iperbolico* sono *iperboli* e *parabole*: si ottengono le prime se la retta impropria  $i_\infty$  del piano  $\alpha$  secca le due rette (improprie) reali e distinte, che la quadrica ha in comune con il piano improprio, in due punti reali  $A_\infty$  e  $B_\infty$ ; nel secondo caso la retta impropria  $j_\infty$  di un piano  $\beta$  passa per il punto  $C_\infty$  comune a quelle due rette, e la curva sezione, avendo un solo punto improprio, è una *parabola* (figg. 45a, b). Non esistendo ellissi sulla sua superficie non possono esservi neppure cerchi, e dunque, come già osservato (cfr. 3.3.1.), non può esistere un *paraboloide iperbolico di rotazione*.

6. *Quadriche specializzate: coni e cilindri*. Anche nel cono – come sappiamo – esistono i tre tipi di sezioni, poiché questa superficie come gli iperboloidi ha nel piano improprio una conica  $\gamma_\infty$  reale e irriducibile: infatti, ricordando che solo i piani passanti per il vertice secano il cono secondo coppie di generatrici (coniche degeneri), poiché  $\pi_\infty$  non passa per il vertice essendo questo un punto proprio, la conica sezione  $\gamma_\infty$  non è degenera: allora anche in questo caso secondo che la retta impropria del piano secante abbia in comune con  $\gamma_\infty$  due punti reali e distinti, reali e coincidenti, complessi coniugati (immaginari) la conica sezione con  $\alpha$  risulta nell'ordine un'iperbole, una parabola, un'ellisse.

Nel caso del *cilindro* invece, che è un cono il cui vertice  $V_\infty$  è un punto improprio, il piano  $\pi_\infty$  contiene il vertice, e in quanto tale secca la superficie secondo due rette: se tali rette (improprie) sono complesse coniugate, può accadere che la retta  $j_\infty$  del piano  $\beta$  passi per il punto improprio reale  $V_\infty$  comune a quelle

due rette, e allora la sezione di  $\alpha$  con il cilindro è costituita da *due generatrici* (che essendo parallele s'incontrano in quel punto improprio); se invece la retta  $i_\infty$  di un piano  $\alpha$  interseca le due rette immaginarie, evidentemente in punti immaginari, la sezione, non avendo alcun punto improprio reale, è una *ellisse*: la superficie è dunque un *cilindro a direttrice ellittica* e tutte le sezioni piane sono costituite da coppie di generatrici oppure da *ellissi* (eventualmente *cerchi*) (fig. 46). Se il cilindro ha nel piano improprio due rette reali e distinte, secondo che la retta  $i_\infty$  di un piano  $\alpha$  sechi quelle rette in due punti distinti  $A_\infty$ ,  $B_\infty$ , oppure che la retta  $j_\infty$  di un piano  $\beta$  passi per il loro punto comune  $V_\infty$ , la sezione del piano con  $\pi_\infty$  è costituita rispettivamente da un'iperbole, i cui punti impropri sono appunto  $A_\infty$  e  $B_\infty$ , oppure da *due generatrici*: in questo caso il cilindro è a *direttrice iperbolica* e tutte le sezioni piane sono coppie di generatrici o *iperboli* (fig. 47). Se infine il cilindro ha

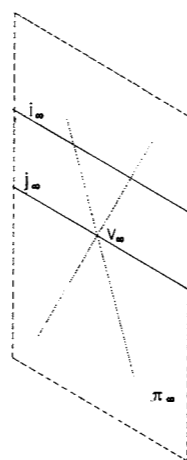


Fig. 46

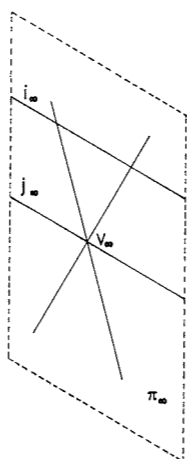


Fig. 47

nel piano improprio due rette reali e coincidenti, avendo la retta  $i_\infty$  di qualunque piano secante in comune con quelle due rette coincidenti un solo punto (improprio), la sezione è costituita da *due generatrici* se quel punto è  $V_\infty$ , negli altri casi da una *parabola*: il cilindro è a *direttrice parabolica*, tutte le sezioni piane sono coppie di generatrici oppure *parabole* (fig. 48).

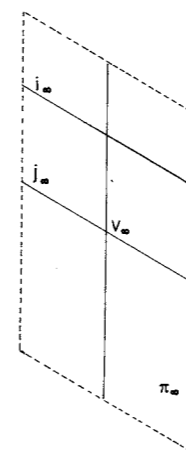


Fig. 48

7. *Rappresentazione di una quadrica*. Per quanto riguarda le *quadriche rigate*, dette anche a *punti iperbolici*, ricordando che un *piano tangente* secca la superficie secondo una conica degenera, cioè secondo due rette – rispettivamente *generatrice* e *direttrice* –, che hanno in comune il punto di contatto del piano con la quadrica; e ricordando ancora che le rette di ciascuna schiera sono sghembe tra loro mentre ogni retta di una schiera interseca tutte le rette dell'altra schiera, si possono costruire le immagini della quadrica mediante quante si voglia generatrici e/o direttrici. Osserviamo infatti che, *dato tre rette di una schiera* (tre *direttrici* secondo la genesi delle superfici rigate, cfr. 3.4.3.) ogni *generatrice* si può determinare come quella retta dell'altra schiera, che passa per un punto di una delle tre direttrici e si appoggia a due rette sghembe (S.-V., pp. 139 e 244), cioè alle altre due direttrici. Scegliendo alcuni punti sulla prima direttrice e costruendo per ciascuno di essi la retta che si appoggia alle altre due direttrici, si hanno altrettante generatrici; per costruire invece ulteriori direttrici, si possono fissare tre delle generatrici trovate e, invertendo i ruoli, ripetere le operazioni. È questo un procedimento per la costru-

zione nel metodo di Monge di un *iperboloide iperbolico*: la conica-traccia su  $\pi_1$  si può costruire congiungendo i punti prime tracce di un certo numero di generatrici e/o direttrici.

La costruzione è notevolmente semplificata nel caso dell'*iperboloide iperbolico di rotazione*: infatti, dati in prima proiezione un cerchio, in cui coincidono due paralleli della superficie disposti simmetricamente rispetto alla linea di gola, a sua volta rappresentata in prima proiezione da un cerchio minore concentrico al primo, e fissate le seconde proiezioni dei due paralleli mediante due segmenti orizzontali, ogni coppia di rette – generatrice e direttrice – individua un piano tangente, la cui prima traccia è tangente alla prima proiezione del cerchio di gola, e corda del cerchio maggiore, e in questa traccia coincidono le prime immagini delle due rette poiché ciascuno di tali piani, che tocca l'iperboloide lungo la linea di gola, è un piano verticale, cioè perpendicolare a  $\pi_1$ . La seconda proiezione di ciascuna coppia direttrice-generatrice è costituita dalle rette che congiungono le seconde proiezioni degli estremi delle corde prime proiezioni, estremi alternativamente considerati appartenenti all'uno e all'altro dei due paralleli dati. Nella figura 49 – ove è anche presente la *rappresentazione assonometrica* – ad esempio la corda  $A_1B_1 \equiv C_1D_1$ , prima traccia di un piano tangente  $\alpha$ , ha come seconde proiezioni le rette  $A_2B_2$  e  $C_2D_2$ , il cui punto comune è la seconda proiezione  $T_2$  del punto di contatto  $T$  del piano  $\alpha$  con l'iperboloide, mentre la prima proiezione  $T_1$  è il punto di contatto della traccia  $s_\alpha$  di  $\alpha$  con il cerchio-gola.

Un *paraboloide iperbolico* è invece determinato da un *quadrilatero sghembo*, cioè non contenuto in un piano, di cui ciascuna coppia di lati opposti siano rette della stessa schiera, dunque rispettivamente *due direttrici* e *due generatrici*: in ogni vertice concorrono così una direttrice e una generatrice, che sono infatti complanari, e inoltre le due direttrici (come le due generatrici) individuano la giacitura di un piano a cui tutte le rette della stessa schiera saranno parallele, condizione richiesta perché una quadrica rigata sia un *paraboloide* (cfr. 3.3.4.). Assegnato dunque nel *metodo di Monge* un siffatto quadrilatero e divisi due lati opposti, ad esempio  $d_1$  e  $d_2$ , nello stesso numero di segmenti uguali, le rette che congiungono i punti dell'uno con i corrispondenti dell'altro, sono rette dell'altra schiera, cioè generatrici; operando in modo analogo con l'altra coppia di lati opposti  $g_1$  e  $g_2$  si costruiscono altre rette della prima schiera, cioè direttrici. Con una particolare scelta del riferimento, in prima proiezione il quadri-

latero sghembo, mediante il quale è assegnato il paraboloide, si proietta in un quadrato (fig. 50), mentre in seconda proiezione le coppie di lati opposti sono rappresentate da due segmenti di rette obliqui ri-

spetto alla linea di terra. Costruite un certo numero di rette delle due schiere come sopra descritto, e determinati i punti prime tracce, la linea che li congiunge è un'iperbole, traccia su  $\pi_1$  del paraboloide;

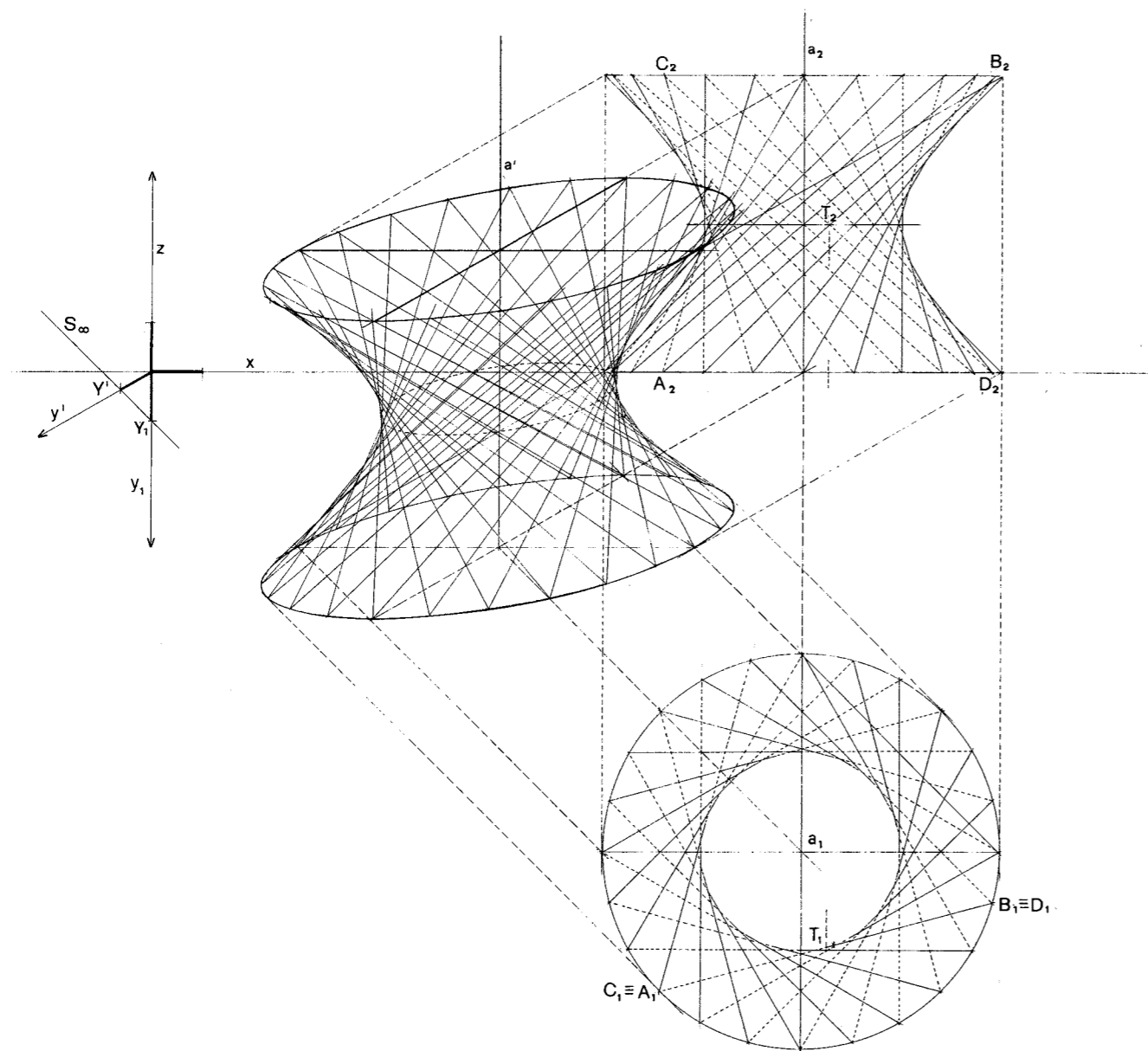


Fig. 49

la superficie infine è delimitata lateralmente dalle sezioni con due piani verticali di profilo. La stessa figura 50 comprende anche la rappresentazione in *assonometria cavaliera* che rende visibili le due parabole, sezioni con i due piani di profilo. Per rappresentare una quadrica a punti ellittici se ne possono assegnare le due coniche, sezioni diametrali rispettivamente con un piano orizzontale e un piano di fronte che abbiano in comune un diametro orizzontale (cfr. 8. seg.).

8. *Intersezione di una quadrica con un piano.* Nel caso di una *quadrica rigata*, dato un piano generico  $\alpha$ , si possono costruire un certo numero di punti della conica sezione, determinando le intersezioni del piano  $\alpha$  con altrettante generatrici e/o direttrici. Ricordiamo che una conica, determinata da cinque elementi (soli punti oppure punti e tangenti), richiede tuttavia, per il suo corretto tracciamento, che ne siano individuati un numero maggiore di punti, eventualmente con tangenti.

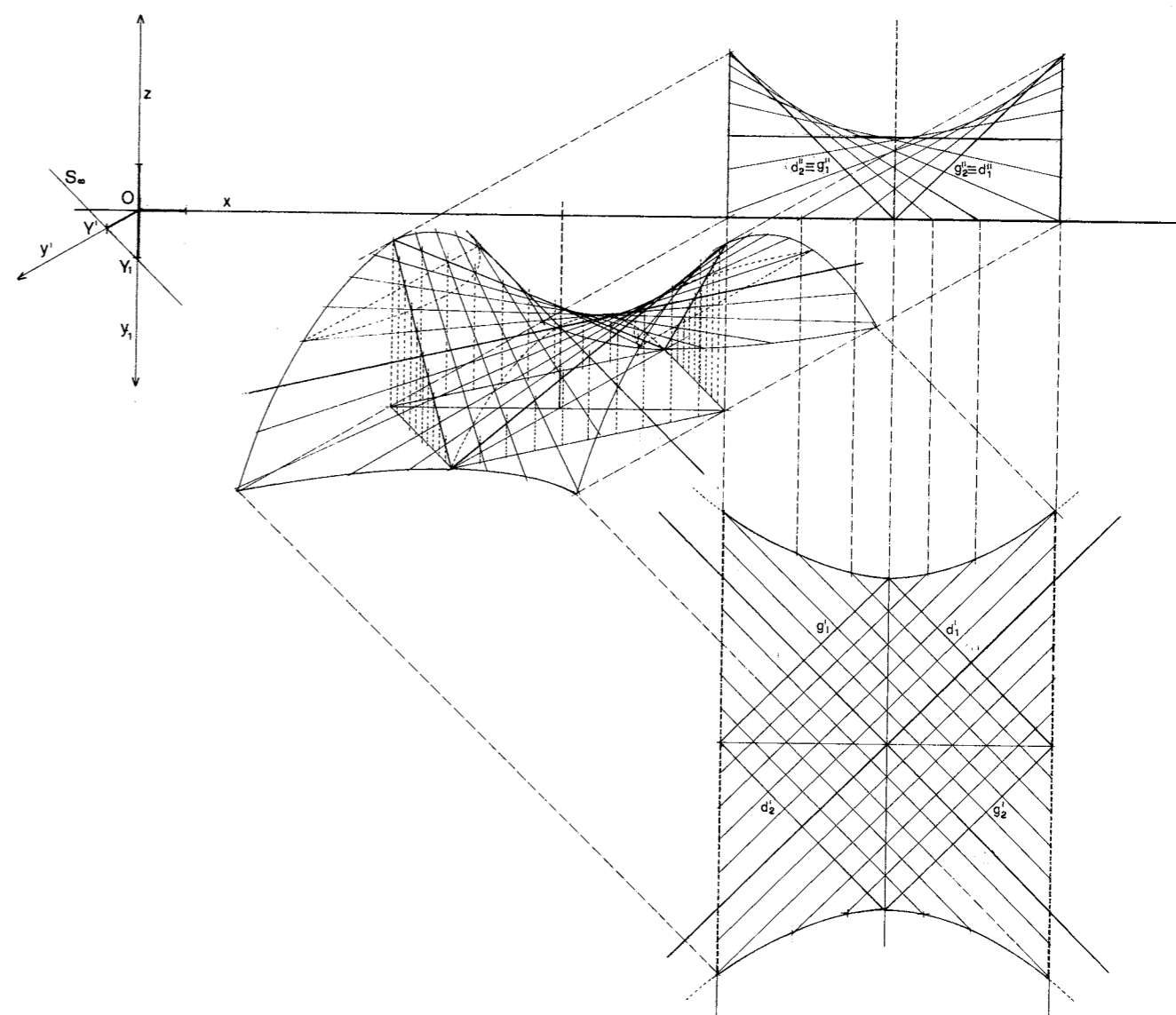


Fig. 50



Riferendoci alla genesi delle quadriche (cfr. p. 3.3.1.), un *ellissoide* può essere assegnato nel *metodo di Monge* mediante un'ellisse fissa in un piano di fronte, e un'ellisse mobile (in un piano orizzontale) avente in comune con la prima un diametro  $AB$  parallelo alla linea di terra e passante per il centro della ellisse fissa (fig. 51); i diametri coniugati ad  $AB$  siano, per le due ellissi, rispettivamente i segmenti  $FG$  e  $DE$ , dati ciascuno nelle due proiezioni.

Assegnato un piano  $\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$ , si può costruirne la sezione (evidentemente ellittica, essendo tali tutte le sezioni piane dell'ellissoide) (cfr. 3.3.5.), facendo variare il piano orizzontale  $\beta$  della conica mobile  $\gamma$  e, determinata la retta  $o$  intersezione dei piani  $\alpha$  e  $\beta$ , individuare le coppie di punti 1, 2; 3, 4;... comuni di volta in volta alla conica  $\gamma$  nelle diverse posizioni e alla relativa retta  $o$ ; inoltre, poiché l'ellisse-sezione richiesta, come tutte le coniche, è determinata da

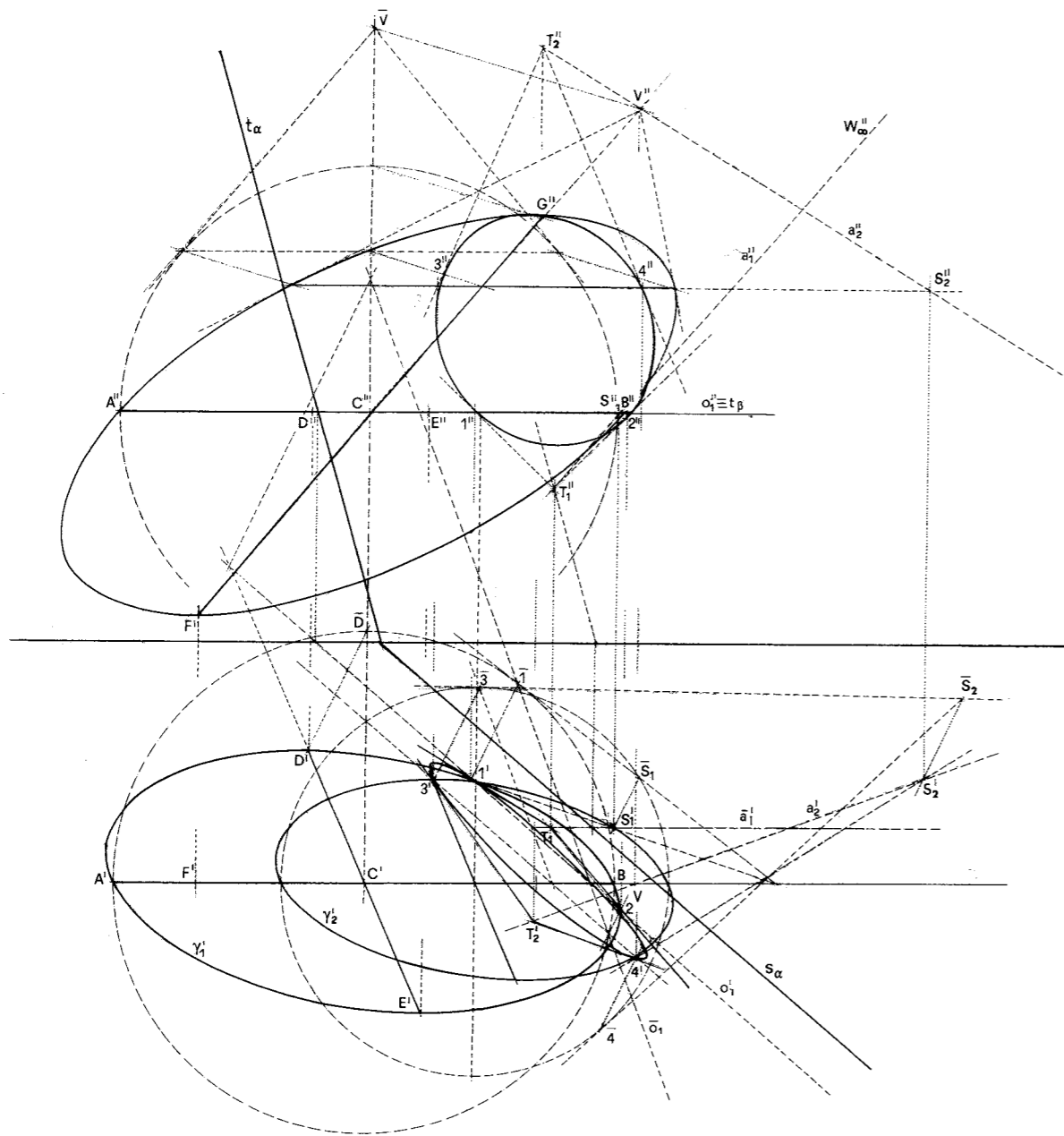


Fig. 51

cinque punti, oppure da quattro punti e dalla tangente in uno di essi, scegliendo due sole posizioni di  $\gamma$  e costruendo anche le tangenti nelle due coppie di punti individuati, si ottengono quattro punti e le relative tangenti, elementi più che sufficienti a determinare l'ellisse-sezione.

Allo scopo possiamo utilizzare come prima posizione  $\gamma_1$  dell'ellisse mobile quella data nel piano diametrale orizzontale  $\beta_1(t_{\beta_1})$ , mediante la coppia di diametri coniugati  $AB$  e  $CD$ : la retta  $o_1$  comune ad  $\alpha$  e  $\beta$  (con  $o''_1 \equiv A''B''$  e  $o'_1$  parallela alla prima traccia  $s_\alpha$  di  $\alpha$ ) interseca l'ellisse  $\gamma_1$  nei punti 1, 2. Per determinare con precisione tali punti (potendosi anche non costruire  $\gamma_1$ , che invece nella figura è presente) si può ricorrere al cerchio  $\bar{\gamma}_1$  affine a  $\gamma_1$  - nell'affinità omologica il cui asse è il diametro  $A'B'$  e la direzione del centro è quella della retta  $D'D$  (cfr. 2.2.5.III.a) - per trasformare la retta  $o'_1$  in  $\bar{o}_1$  e quindi, mediante l'affinità inversa determinare i punti 1', 2' corrispondenti dei punti 1, 2 in cui la retta  $\bar{o}_1$  interseca il cerchio (nella figura 51 per costruire l'omologa  $\bar{o}_1$  di  $o'_1$  si è trasformato il punto  $K$ , in cui  $o'_1$  interseca la retta  $D'E'$ , nel punto  $\bar{K}$ : la retta  $\bar{o}_1$  è quella che congiunge  $\bar{K}$  con il punto in cui  $o'_1$  incontra l'asse  $A'B'$  dell'affinità).

È inoltre possibile costruire le tangenti in questi due punti alla costruenda ellisse sezione (rette che evidentemente appartengono al piano  $\alpha$ ), osservando la figura 52 e ricordando che tali tangenti sono le

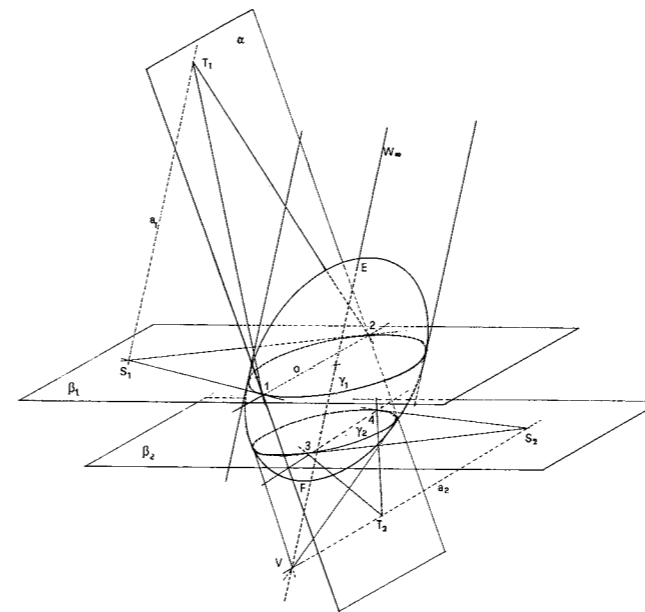


Fig. 52

intersezioni con  $\alpha$  dei piani tangenti la quadrica in quei due punti, piani che si possono individuare in quanto tangenti anche al cono circoscritto alla superficie lungo la conica  $\gamma_1$ ; e poiché  $\gamma_1$  appartiene a un piano diametrale, tale cono è un cilindro. I piani tangenti la quadrica nei punti 1, 2 si intersecano in una retta  $a$  che passa per il punto  $W_\infty$  del cilindro circoscritto e dunque è parallela al diametro  $FG$ ; quei piani (che non è necessario costruire) secano  $\beta_1$  in due rette che sono tangenti all'ellisse  $\gamma_1$  negli stessi punti 1, 2 e dunque passano per il punto  $S_1$  in cui la retta  $a$  incontra il piano  $\beta_1$ ; i piani tangenti secano ancora il piano  $\alpha$  secondo due rette passanti per il punto  $T_1$  in cui la retta  $a$  incontra  $\alpha$ , rette che sono evidentemente le tangenti alla richiesta ellisse, sezione dell'ellissoide con il piano  $\alpha$ , nei punti 1, 2.

La costruzione descritta si traduca ora nella rappresentazione mongiana della figura 51: condotte le tangenti al cerchio  $\bar{\gamma}_1$  affine alla ellisse  $\gamma_1$  nei punti 1, 2, si trasformi nella suddetta affinità il loro punto comune  $S_1$  in  $S'_1$  (allo scopo è sufficiente costruire l'omologa di una sola delle tangenti e su questa proiettare secondo la direzione del centro dell'affinità, il punto  $\bar{S}_1$  in  $S'_1$ ): le tangenti alla ellisse  $\gamma_1$  sono le rette che congiungono  $S'_1$  con i punti 1' e 2'; poiché queste tangenti appartengono al piano orizzontale  $\beta_1$ , la seconda proiezione  $S''_1$  di  $S'_1$  cade sulla retta  $o'' \equiv t_{\beta_1}$ . Le due proiezioni  $a''_1, a'_1$  della retta  $a_1$  sono allora rispettivamente le parallele alle rette  $F''G''$  e  $F'G'$  condotte per i punti  $S''_1$  e  $S'_1$ : il punto  $T_1(T''_1, T'_1)$  si determina come intersezione della stessa  $a_1$  con il piano  $\alpha$  (con l'ausilio del piano di fronte per  $a_1$  e la relativa intersezione  $x(x'', x')$ : infine le rette che congiungono  $T'_1$  e  $T''_1$  rispettivamente con i punti 1', 2' e con 1'', 2'' sono le immagini delle tangenti nei punti 1, 2 della ellisse sezione dell'ellissoide con il piano dato  $\alpha$ .

Per costruire gli altri due punti e le relative tangenti dell'ellisse richiesta, si operi in modo analogo rispetto a una seconda posizione  $\gamma_2$ , della conica mobile, considerata appartenente a un piano ausiliario  $\beta_2(t_{\beta_2})$ , ancora orizzontale: la prima proiezione  $\gamma'_2$  è un'ellisse simile e similmente posta rispetto a  $\gamma'_1$  (di cui si potrebbe evitare il tracciamento, che tuttavia nella figura è presente, e assegnarne i soli diametri coniugati), mentre la seconda proiezione coincide con un segmento orizzontale, appartenente alla seconda traccia  $t_{\beta_2}$  di  $\beta_2$ .

Costruiti in modo analogo al precedente, con l'ausilio del cerchio affine a  $\gamma'_2$ , i punti 3', 4' (secondo cui la retta intersezione  $o'_2$  del piano  $\alpha$  con  $\beta_2$  seca  $\gamma'_2$ ), le relative tangenti e il loro punto comune  $S_2$  (cfr. figg.

51, 52), è necessario determinare il vertice  $V$  del cono circoscritto all'ellissoide lungo la conica  $\gamma_2$ , la cui seconda proiezione è il punto  $V''$  comune alle tangenti alla conica fissa negli estremi della corda (diametro per  $\gamma_2$ ). Per l'esatta determinazione di tali punti e delle tangenti, si ricorre al cerchio  $\gamma_2$  affine alla ellisse fissa trasformando la suddetta corda (mediante il punto in cui questa secca il diametro  $F''G''$ ) nella corrispondente corda del cerchio  $\gamma_2$  per i cui estremi si conducano le tangenti, e infine mediante l'affinità inversa si costruiscano i punti di contatto delle tangenti alla ellisse fissa, le tangenti stesse e il loro punto comune, quest'ultimo essendo l'immagine  $V''$  del vertice  $V$  del cono circoscritto alla ellisse  $\gamma_2$ . Determinata la prima proiezione  $V'$  di  $V$  sulla retta del diametro  $A'B'$ , prima traccia del piano di fronte della ellisse fissa, si costruisca la retta  $a_2$  congiungendo le proiezioni di  $V$  con le proiezioni omonime del punto  $S_2$ , comune alle tangenti a  $\gamma_2$  nei punti 3, 4 (costruite con l'ausilio del cerchio affine a  $\gamma_2$ ) e infine si determini il punto  $T_2$ , intersezione di  $a_2$  con il piano  $\alpha$  (quest'ultima costruzione non appare nella figura 51 perché esorbitante dai limiti del disegno); le tangenti alla conica richiesta nei punti 3, 4 sono le rette che congiungono le proiezioni  $T_2', T_2''$  con le proiezioni omonime degli stessi punti. Gli otto elementi (punti e tangenti) così determinati consentono l'ulteriore determinazione di altri punti<sup>6</sup> e quindi il tracciamento delle due immagini dell'ellisse richiesta.

9. *Rappresentazione e sezioni della sfera.* La sfera è rappresentata nel *metodo di Monge* dai due cerchi massimi contenuti in piani paralleli ai piani di proiezione, detti rispettivamente *equatore* e *meridiano principale*, la prima proiezione dell'equatore essendo un cerchio di raggio  $R$  uguale al raggio della sfera e centro nel punto  $C'$ , prima proiezione del centro  $C$  della sfera, e la seconda proiezione un segmento orizzontale di lunghezza uguale al diametro, il cui punto medio è la seconda proiezione  $C''$  del centro  $C$  dell'equatore stesso e della sfera; viceversa il meridiano si proietta in seconda proiezione in un cerchio uguale al primo con centro in  $C''$ , e in prima proiezione nel diametro parallelo alla linea di terra. Ogni piano, come è noto, secca la sfera secondo un cerchio, che, se il piano passa per il centro della sfera, è un cerchio massimo di centro e raggio uguali ai corrispondenti elementi della sfera, in ogni altro caso è un cerchio di raggio tanto minore quanto maggiore è la distanza del suo piano dal centro. Esclusi i paralleli e i cerchi contenuti in piani di fron-

te, che si proiettano rispettivamente in prima e in seconda proiezione ancora in cerchi, la rappresentazione di ogni altro cerchio della sfera è costituita da due ellissi.

Se il piano  $\alpha$  passa per il centro  $C$  della sfera, nella rappresentazione mongiana le proiezioni  $C'', C'$  appartengono alle proiezioni omonime della retta orizzontale  $o(o'', o')$  di  $\alpha$  ( $t_\alpha, s_\alpha$ ) (fig. 53); ribaltato  $\alpha$  su  $\pi_1$  e con esso il punto  $C$  in  $C^*$ , si tracci il cerchio  $\gamma^*$  di centro  $C$  e raggio uguale a quello della sfera; costruita l'ellisse  $\gamma'$  prima proiezione di  $\gamma$  mediante l'omologia inversa di ribaltamento, se ne costruisca la seconda proiezione  $\gamma''$  come trasformata della prima nell'omologia rappresentatrice del piano, il cui asse

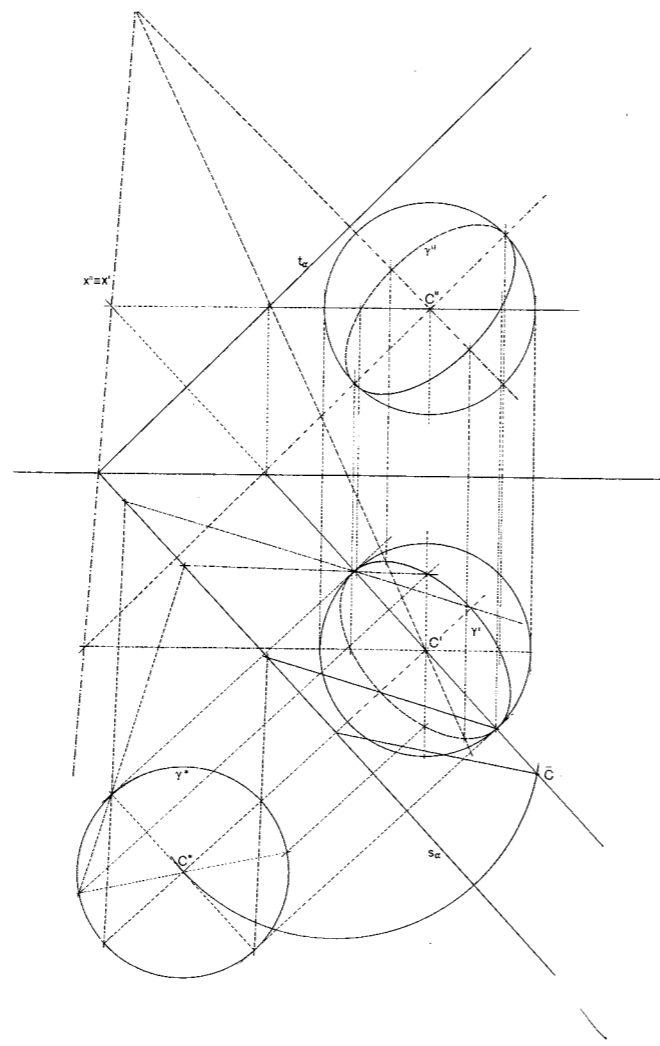


Fig. 53

è la retta  $x'' \equiv x'$ , e il centro è improprio nella direzione ortogonale alla linea di terra (S.-V., pp. 246-247). Se invece il piano  $\alpha$  non passa per il centro  $C$  della sfera, è necessario determinare il centro  $K$  e il raggio  $r$  del cerchio sezione; allo scopo condotta per il punto  $C$  la retta  $n(n'', n')$  ortogonale ad  $\alpha$  e determinato il punto  $K(K'', K')$  d'intersezione, si determini la vera grandezza del segmento  $CK$  (S.-V., p. 230), che misura la distanza del piano  $\alpha$  dal centro della sfera: è evidente che se tale misura risulta maggiore o uguale a quella del raggio  $R$  della sfera, il piano  $\alpha$  non interseca la sfera, e dunque, risultando rispettivamente esterno o tangente, la sezione è immaginaria o ridotta a un unico punto reale, quello di contatto del piano tangente. Se invece il segmento  $CK$  risulta minore di  $R$ , il cerchio sezione  $\gamma$  è reale (fig. 54): per

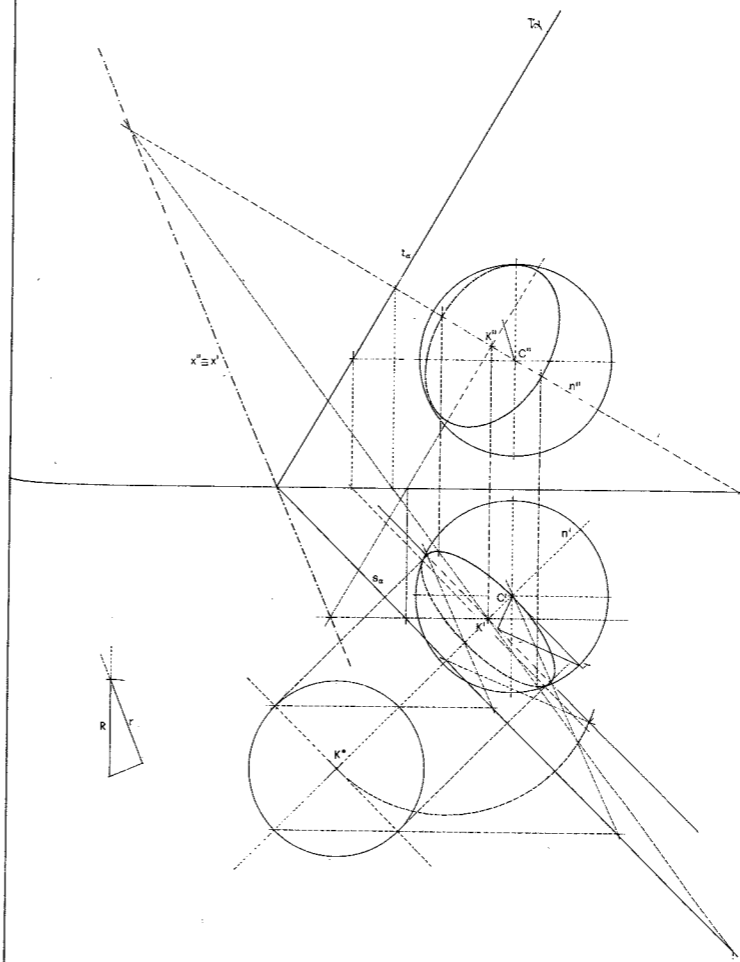


Fig. 54

conoscere la misura  $r$  del raggio si costruisca a parte un triangolo rettangolo di cui un cateto sia uguale a  $CK$  e l'ipotenusa uguale al raggio  $R$  della sfera: l'altro cateto fornisce la misura del raggio  $r$  del cerchio  $\gamma$  richiesto. Allora, ribaltato il piano  $\alpha$  e con esso il punto  $K$  in  $K^*$ , si tracci il cerchio  $\gamma^*$  di centro  $K^*$  e raggio  $r$ , e mediante l'affinità omologica (inversa) di ribaltamento si costruisca l'ellisse  $\gamma'$  prima proiezione di  $\gamma$ , e infine la seconda proiezione  $\gamma''$ .

10. In un'assonometria ortogonale la sfera è rappresentata dal suo cerchio massimo parallelo al quadro, che si proietta in vera forma.

In un'assonometria obliqua, in particolare *cavaliera*, l'immagine della sfera è un'ellisse che ne costituisce il *contorno apparente* dal centro improprio  $R_\infty$  della proiezione. Assegnata dunque la sfera nel metodo di Monge (fig. 55), l'ellisse  $\gamma'_1$  prima proiezione assonometrica della sfera si costruisce come trasformata della corrispondente proiezione mongiana  $\gamma_1$  mediante la consueta *omologia affine* di asse la linea di terra, rette corrispondenti  $y_1, y'$  e centro il punto  $S_\infty \equiv Y_1 Y'$ ; l'ellisse  $\gamma'$ , vera assonometria (o contorno apparente da  $R_\infty$ ) della sfera, si può determinare come curva circoscritta a una serie di altre ellissi, immagini di altrettante sezioni orizzontali, che a loro volta si possono tracciare ciascuna dopo averne costruiti alcuni punti nella prima proiezione assonometrica mediante la suddetta omologia, e aver attribuito agli stessi punti la relativa quota (per la costruzione degli assi dell'ellisse  $\gamma'_1$  vedi 2.2.5.IV. e fig. 15).

Una costruzione più rapida consente tuttavia di determinare direttamente l'immagine assonometrica  $\gamma'$  della sfera, come *intersezione con il quadro del cilindro circoscritto alla sfera dal centro di proiezione  $R_\infty$* , o ciò che è lo stesso, come proiezione dal centro  $R_\infty$  del cerchio massimo  $\gamma$ , - luogo dei punti di contatto di quel cilindro circoscritto: tale cerchio appartiene al piano per il centro della sfera e ortogonale a  $R_\infty$  (è infatti il piano polare del punto  $R_\infty$ ); l'ellisse  $\gamma'$ , immagine assonometrica della sfera, può costruirsi trasformandone le due proiezioni mongiane  $\gamma_2, \gamma_1$ , che sono evidentemente ancora ellissi (fig. 56). Allo scopo è necessario prioritariamente rintracciare, dalla disposizione degli assi assonometrici e dalle relative unità di misura assegnate come di consueto, la direzione del centro  $R_\infty$ , determinandone le due proiezioni mongiane,  $R_{2\infty}, R_{1\infty}$  ove  $R_{2\infty}$  coincide con il punto improprio dell'asse  $y'$  (cfr. Parte I, 3.2.5.); costruito poi il piano  $\alpha$  passante per il centro  $C$  della sfera e perpendicolare alla direzione  $R_\infty$ , e ribaltato

tale piano e con esso il cerchio massimo  $\gamma$  in  $\gamma^*$  (con centro in  $C^*$  ribaltato di  $C$ ), se ne costruisca l'ellisse prima proiezione  $\gamma_1$  come trasformata di  $\gamma^*$  nell'*omologia affine ortogonale* (inversa) di ribaltamento, e la seconda proiezione  $\gamma_2$  mediante l'omologia rappre-

sentatrice del piano  $\alpha$ ; infine, trasformata l'ellisse  $\gamma_1$  nella prima proiezione assonometrica  $\gamma'_1$ , e attribuita a ciascun punto la relativa quota, la curva che congiunge i punti così costruiti è l'ellisse  $\gamma'$  immagine assonometrica della sfera.

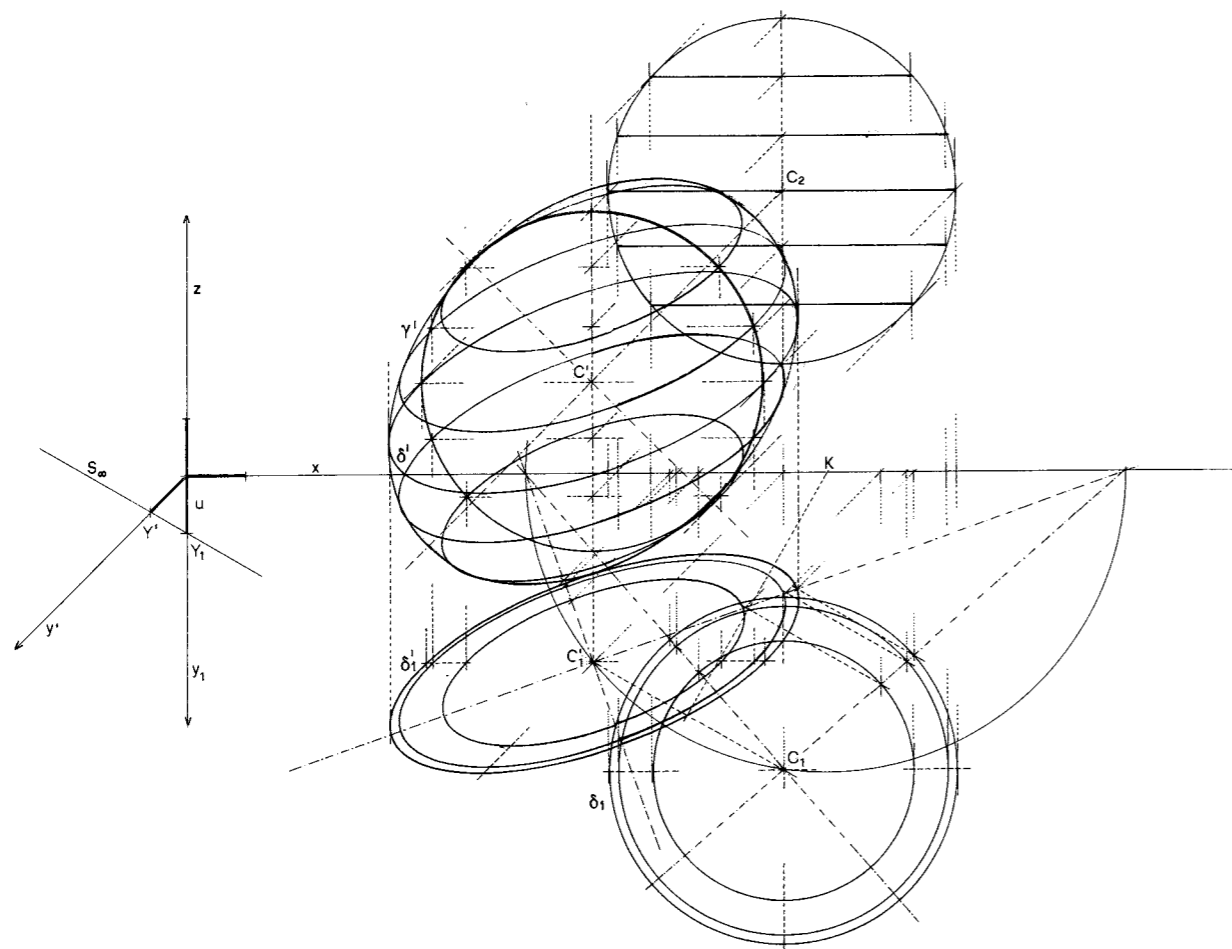


Fig. 55

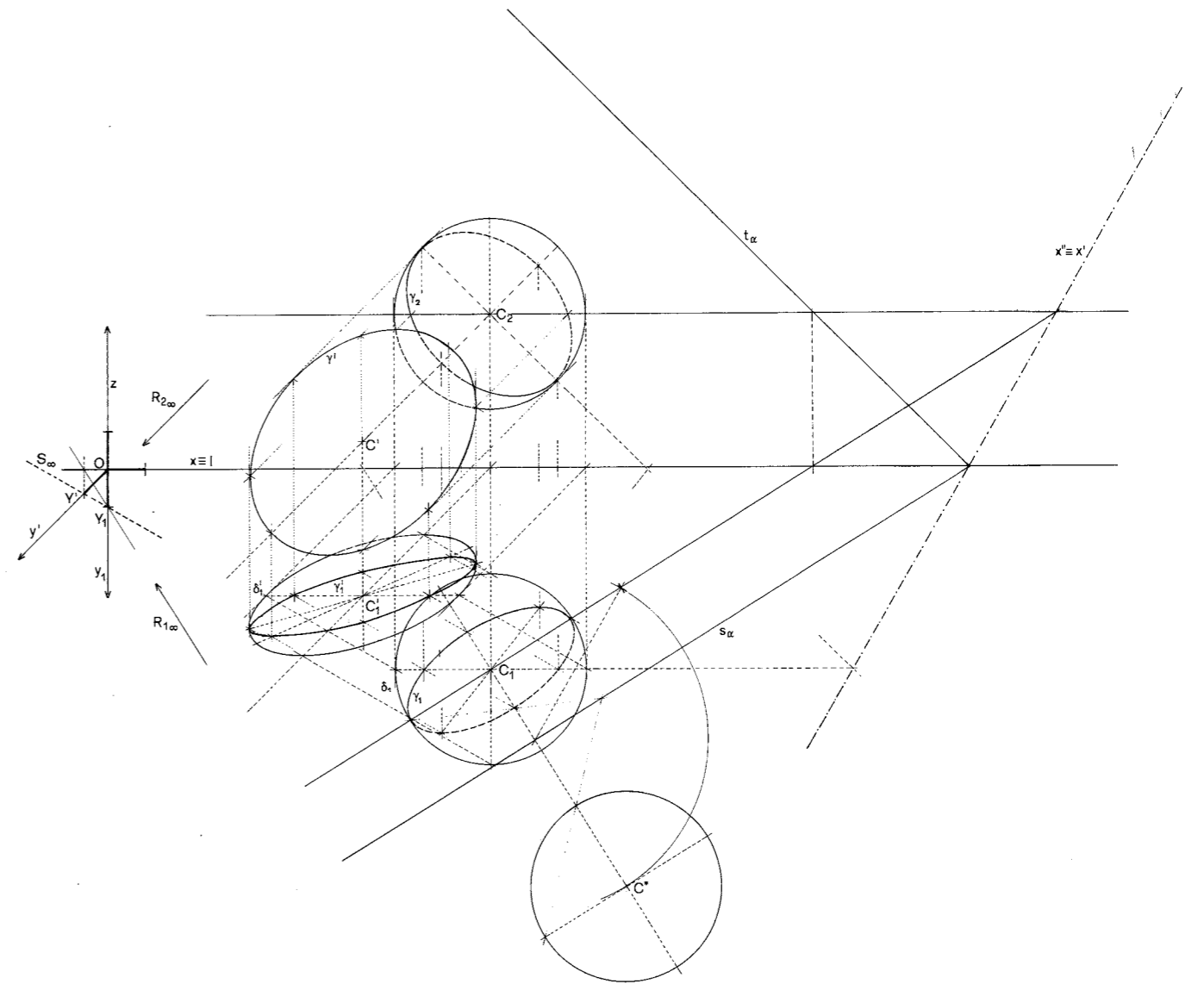
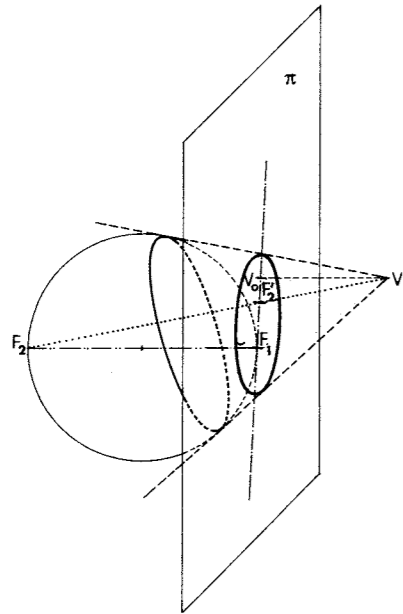


Fig. 56

11. Per costruire la *prospettiva della sfera* si ricordi che il contorno apparente della sfera da un punto proprio - in questo caso il centro di vista  $V$  - è un cerchio di raggio tanto minore quanto più breve è la distanza del punto di vista dalla sfera: questo cerchio è infatti l'insieme dei punti di contatto del cono di vertice  $V$  circoscritto alla sfera (che nelle proiezioni parallele diviene un cilindro) e come tale appartiene al piano polare di  $V$  rispetto alla sfera stessa (fig. 57). L'immagine di quel cerchio, e quindi la pro-

spettiva della sfera, è ancora un *cerchio* solo nel caso in cui il raggio visuale principale, che coincide con la retta  $VV_0$  ortogonale al quadro, passa per il centro della sfera: infatti il cono circolare retto circoscritto alla sfera da  $V$  è sezionato con un piano (il quadro) che in questo caso è perpendicolare all'asse del cono stesso. In ogni altro caso l'immagine della sfera è una *ellisse*, non risultando il quadro ortogonale all'asse di quel cono<sup>7</sup>. La costruzione prospettica si può effettuare determi-



se infine la sezione è una parabola, esiste una sola sfera tangente al piano secante, e il suo punto di contatto coincide con l'unico fuoco della parabola (fig. 58 c).

Se allora il cono del teorema è il cono circoscritto alla sfera con il vertice nel punto di vista  $V$ , e l'ellisse  $\gamma'$ , immagine della sfera, ne è la sezione con il quadro  $\pi$ , uno dei due fuochi dell'ellisse-immagine, ad esempio  $F'_1$ , in quanto punto di contatto con  $\pi$  della sfera, è l'estremo del raggio che appartiene alla retta perpendicolare a  $\pi$ ; ma poiché dal teorema di *Dandelin* deriva che ogni fuoco è anche la proiezione da  $V$  su  $\pi$  dell'altro estremo di quel diametro di ciascuna delle due sfere che è perpendicolare a  $\pi$ , possiamo determinare il secondo fuoco  $F'_2$  proiettando sul quadro l'altro estremo del diametro  $d$  della sfera data (cfr. fig. 57).

Dunque più in generale, se cioè il quadro  $\pi$  non è tangente alla sfera, possiamo dire che i fuochi dell'ellisse  $\gamma'$ , immagine della sfera, sono le proiezioni da  $V$  degli estremi del diametro  $d$  perpendicolare a  $\pi$ .

Fig. 57

nando dapprima la *rappresentazione mongiana* del cerchio  $\gamma$  di contatto del cono circoscritto alla sfera dal punto  $V$  (o sezione della sfera con il piano polare  $\alpha$  di  $V$ ) e trasformando poi l'ellisse prima proiezione di quel cerchio nella corrispondente ellisse proiezione geometrica  $\gamma'_1$ , e infine attribuendo ai diversi punti di tale curva le relative quote prospettiche, derivandole da quelle obiettive della seconda proiezione mongiana di  $\gamma$ : si ottiene così il contorno ellittico  $\gamma'$ , prospettiva della sfera.

Esiste tuttavia un procedimento assai più breve, che si realizza mediante l'individuazione diretta dell'asse maggiore e dei fuochi dell'ellisse  $\gamma'$ : con questi elementi, come sappiamo, la curva è determinata ed è possibile costruirne un numero di punti che ne consenta un corretto tracciamento (cfr. 2.2.4.II.). Tale procedimento consegue da un teorema (il teorema di *Dandelin*) secondo il quale *i fuochi di una conica, sezione di un cono circolare retto con un piano, sono i punti di contatto del piano con due sfere inscritte nel cono e tangenti a quel piano*. Se la sezione è una ellisse, le due sfere sono contenute entrambe in una delle falde del cono (fig. 58 a); nel caso dell'iperbole le sfere sono situate ciascuna in una delle falde, e perciò da parti opposte rispetto al vertice (fig. 58 b);

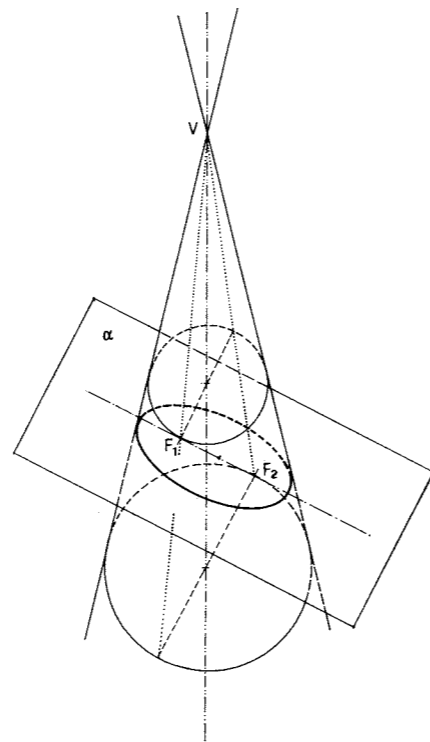


Fig. 58a

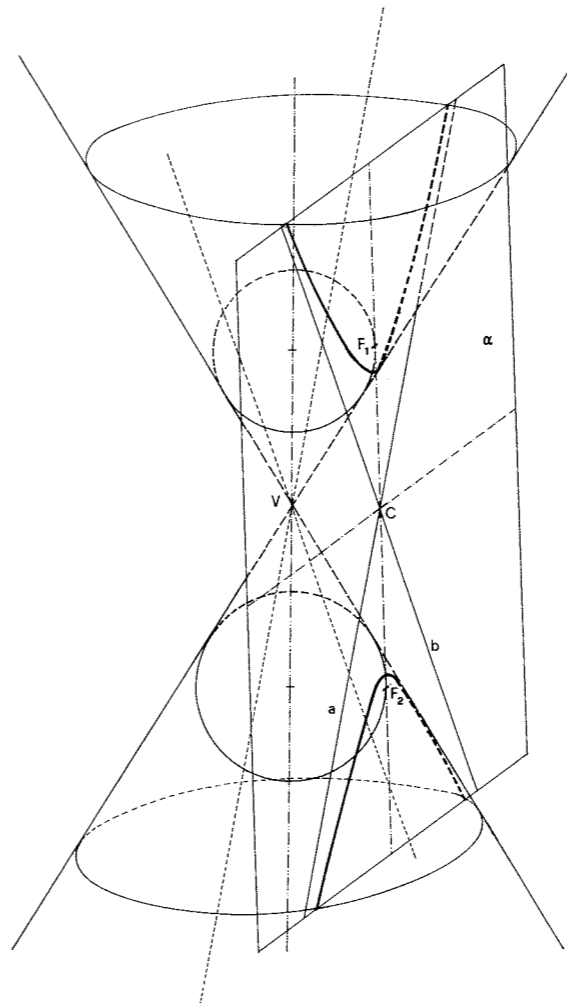


Fig. 58 b

Ricordando che la conica  $\gamma'$  è la proiezione da  $V$  del cerchio  $\gamma$  di contatto con la sfera (oppure la sezione con  $\pi$ ) del cono circoscritto da  $V$ , l'asse maggiore  $A'B'$  di  $\gamma'$ , cui appartengono i fuochi, è la proiezione di quel diametro  $AB$  del cerchio  $\gamma$  che sta nel piano proiettante  $\delta$  ( $f'_\delta \equiv t_\delta$ ) che contiene il diametro  $d$  della sfera (fig. 59): questo piano secca la sfera secondo un cerchio  $\sigma$ , per il quale gli estremi del segmento  $AB$  sono i punti di contatto con  $\sigma$  delle tangenti condotte dal punto  $V$ , tangenti che sono infatti generatrici del cono circoscritto.

Dati dunque sul quadro il centro  $C$  della sfera mediante la coppia  $C', C'_1$  (dove  $C'_1$  è la proiezione geometrica di  $C$ ) e la misura  $r$  del raggio, si costruisca la retta  $d$  passante per  $C$  e ortogonale al quadro – la cui immagine  $d'$  passa per  $C'$  e per il punto di fuga  $F'_d$  coincidente con  $V_0$ , e la cui traccia  $T_d$  cade nell'intersezione della stessa  $d'$  con la traccia del piano verticale che contiene la proiezione geometrica  $d'_1$  per  $C'_1$ , e ribaltato il piano  $\delta$  (la cui traccia-fuga  $f'_\delta \equiv t_\delta$  coincide con  $d'$ , fig. 60) e con esso il punto  $V$  in  $V^*_\delta$ , si costruisca il ribaltato  $\sigma^*$  del cerchio massimo  $\sigma$  della sfera contenuto in  $\delta$  (il cui centro  $C^*$  cade sulla ribaltata  $d^*$  e il cui raggio è uguale a  $r$ ); condotte da  $V^*_\delta$  le tangenti a  $\sigma^*$ , che sono le ribaltate delle generatrici del cono di vertice  $V$  appartenenti a  $\delta$ , i punti di contatto  $A^*, B^*$  (ribaltati degli estremi del diametro  $AB$  del cerchio  $\gamma$ ) si proiettano mediante quelle tangenti sulla traccia-fuga di  $\delta$  in  $A', B'$ , estremi dell'asse focale dell'ellisse  $\gamma'$ . I punti  $F'_1$  e  $F'_2$ , proiezioni da  $V^*$  su  $d'$  dei punti  $F_1$  e  $F_2$  in cui la retta  $d^*$  secca il cerchio  $\sigma^*$ , sono i fuochi dell'ellisse cercata e, detto  $K$  il punto medio dell'asse maggiore  $A'B'$ , l'asse minore appartiene alla normale

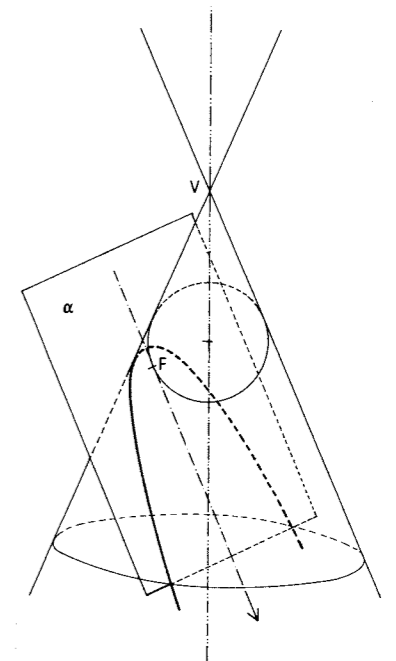


Fig. 58 c

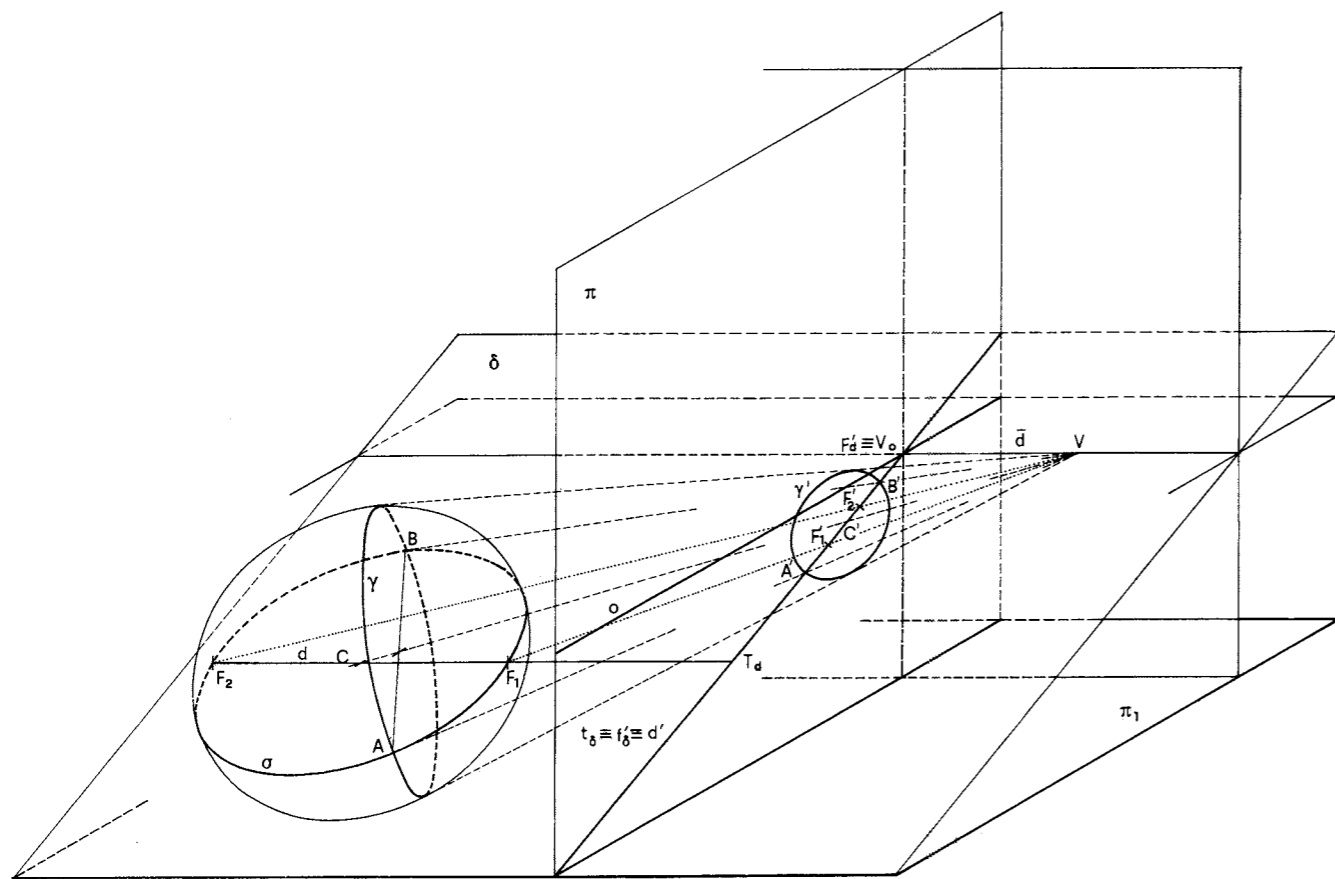


Fig. 59

ad  $A'B'$  passante per  $K$  e i suoi estremi sono le intersezioni con l'arco di cerchio di centro  $F'_1$  (o  $F'_2$ ) e raggio uguale al semiasse maggiore  $KA'$  ( $KB'$ ) (cfr. 2.2.5.II). Noti i due assi, è possibile costruire altri punti di  $\gamma'$ .  
Se, come nel caso di una volta sferica, si debba

limitare la prospettiva alla calotta superiore, è necessario costruire l'immagine del cerchio equatore, il cerchio massimo cioè appartenente al piano orizzontale per  $C$ : allo scopo, ribaltato tale piano e con esso il cerchio  $\epsilon$  in  $\epsilon^*$ , mediante l'inversa dell'omologia di ribaltamento si trasformi  $\epsilon^*$  nell'ellisse-immagine  $\epsilon'$ .

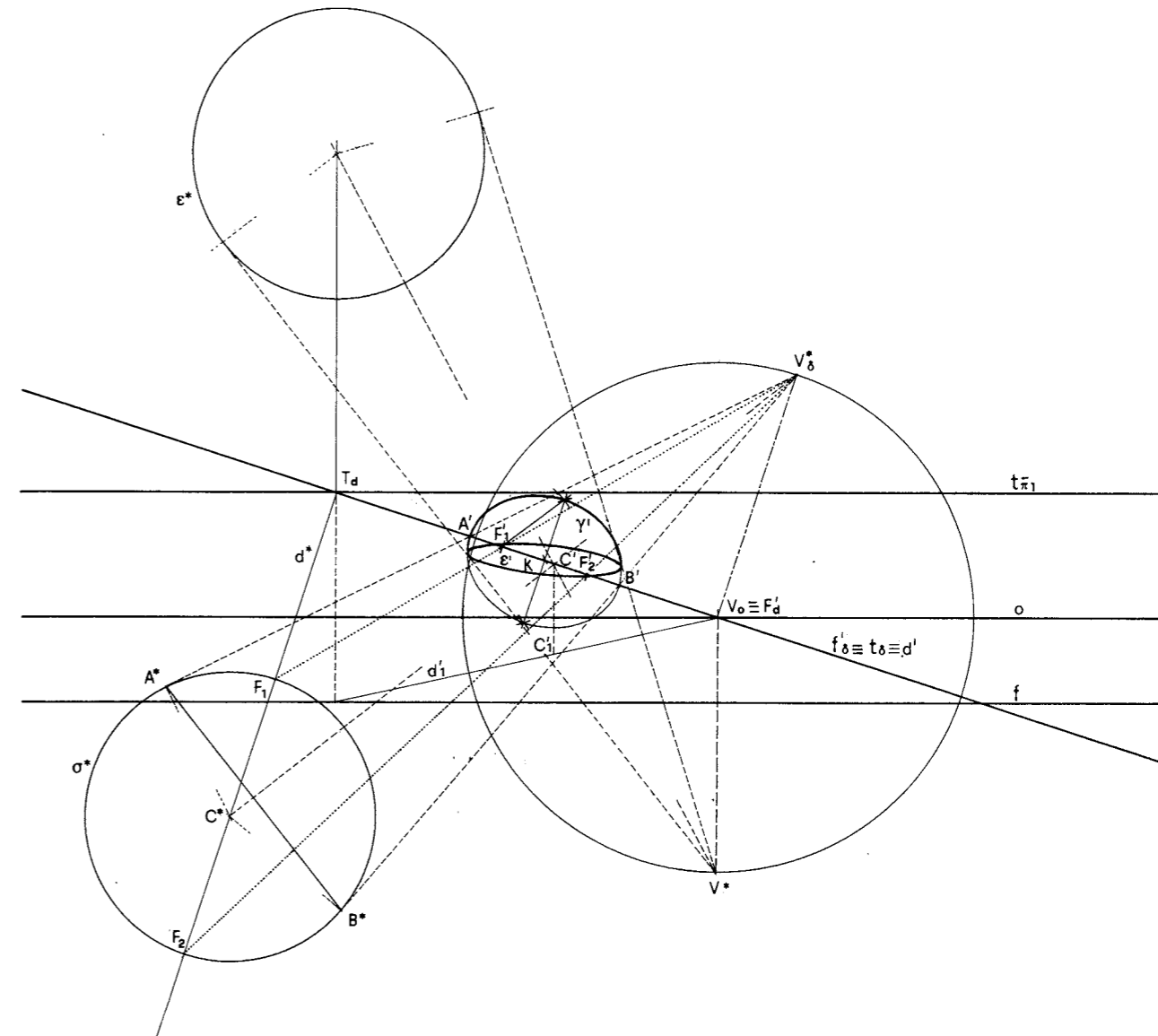


Fig. 60

3.4 Le superfici rigate

1. *Rigate sviluppabili e non sviluppabili.* Abbiamo più volte accennato all'esistenza di superfici generate da una retta – detta appunto *generatrice* – che si muove nello spazio secondo una determinata legge: tali sono le *superfici rigate*, che possono, oppure non, essere distese su un piano; nel primo caso vengono dette *sviluppabili*, nel caso contrario, *non svi-*

*luppabili o gobbe.*

Sono *sviluppabili* quelle superfici rigate in cui due generatrici successive siano complanari: infatti se di una siffatta superficie consideriamo il piano individuato da una prima e da una seconda generatrice, e il piano individuato da quest'ultima e da una terza immediatamente successiva, è possibile, facendo ruotare il secondo piano intorno alla generatrice comune, sovrapporlo al primo; e così operando pro-

gressivamente, facendo ruotare cioè il piano individuato dall'ultima generatrice e dalla successiva fino a sovrapporlo al piano precedente, l'intera superficie risulta distesa su un unico piano.

2. Le più semplici *rigate sviluppabili* sono i *coni* e i *cilindri*, in cui tutte le generatrici passano per un punto, rispettivamente proprio e improprio, e sono dunque due a due complanari: lo studio dei coni riveste particolare interesse per la determinazione e la costruzione grafica delle coniche (S.- V., pp. 259 e segg.), perché queste curve sono le immagini prospettiche del cerchio e dunque dell'arco a tutto sesto; lo studio dei cilindri ancora per la rappresentazione degli archi e di alcune coperture a volta (cfr. 4.3.). Sono ancora rigate sviluppabili quelle superfici determinate dall'insieme delle tangenti a una curva gobba: una tale superficie viene detta *svilupabile osculatrice* di quella curva, e ogni piano individuato da due generatrici successive, dicesi *piano osculatore* di quella stessa curva (cfr. 2.3.1.). In particolare la superficie generata dalle tangenti dell'elica cilindrica è detta *elicoide sviluppabile* e per essa i piani osculatori dell'elica sono i piani tangenti.

3. Le *rigate non sviluppabili* in generale possono definirsi come superfici generate dal moto di una retta (*generatrice*) che si appoggia a tre linee, rette o curve, tra loro non complanari, dette *direttrici*. Se in particolare le tre direttrici sono tutte rettilinee la superficie è una *quadrica rigata*, in generale un *iperboloide a una falda*; oppure, se le direttrici, sempre sghembe tra loro, sono parallele a un piano, un *paraboloide iperbolico*; in questo caso anche le generatrici risultano parallele a un (altro) piano (cfr. 3.3.4.): le quadriche rigate sono dunque superfici non sviluppabili, poiché in esse, come le direttrici, anche due generatrici successive, rette cioè appartenenti all'altra sghemba, sono sghembe.

Le superfici gobbe si distinguono in tre classi secondo la natura delle linee direttrici, e cioè in *rigate con tutte le tre direttrici curvilinee*; con *una direttrice curvilinea e due rettilinee*; con *due direttrici curvilinee e una rettilinea*; e infine, come sopra ricordato, tutte le *tre direttrici rettilinee*.

Le rigate con *una direttrice curvilinea e due rettilinee* vengono denominate *conoidi* quando una delle direttrici rettilinee è impropria: tra i conoidi sono di particolare interesse l'*elicoide a piano direttore*, il *cono-cuneo di Wallis* e l'*arco d'ingresso in una torre cilindrica*.

Nell'*elicoide retto* o a piano direttore la direttrice cur-

vilinea è un'*elica cilindrica*, quelle rettilinee sono l'*asse dell'elica* e la *retta impropria* (giacitura) di un piano normale all'asse: infatti le generatrici si appoggiano alla direttrice rettilinea propria (l'asse), all'elica, e alla direttrice rettilinea impropria, essendo parallele a quel piano (cfr. 3.4.4.).

Nel *cono-cuneo di Wallis*, la direttrice curvilinea è un *cerchio* (o un *semicerchio*), quelle rettilinee sono una *retta parallela* al piano del cerchio, contenuta in un piano ad esso ortogonale e passante per il centro, e la *retta impropria* (giacitura) dei piani normali alla prima direttrice rettilinea: le generatrici si appoggiano a quest'ultima, al cerchio e sono parallele a un piano (cfr. 3.4.5.).

È ancora un conoide la superficie dell'*arco d'ingresso in una torre cilindrica*: la direttrice curvilinea è la *curva tracciata sulla superficie di un cilindro*, quelle rettilinee sono l'*asse del cilindro* e la *retta impropria* (giacitura) di un piano normale all'asse: le generatrici si appoggiano alla curva, all'asse e sono parallele a quel piano (cfr. 3.4.6.).

Tra le rigate non sviluppabili con *due direttrici curvilinee e una rettilinea*, notevoli sono l'*elicoide a cono direttore* o *elicoide gobbo*, e la *superficie della volta a sbieco*.

L'*elicoide gobbo* ha come direttrici curvilinee un'*elica cilindrica* e un *cerchio* (improprio) nel piano all'infinito, come direttrice rettilinea l'asse dell'elica: le generatrici si appoggiano all'elica e all'asse, rispetto al quale sono tutte ugualmente inclinate avendo i relativi punti impropri sullo stesso cerchio all'infinito, a cui dunque anche si appoggiano (cfr. 3.4.7.).

Le direttrici curvilinee della *volta a sbieco* sono *due cerchi* (*semicerchi*) uguali in piani paralleli, e quella rettilinea è la *normale* ai piani passante per il punto medio della retta che congiunge i centri dei cerchi (cfr. 3.4.8.).

4. L'*elicoide rigato retto* detto anche a piano direttore perché le generatrici sono tutte parallele a un piano – si appoggiano infatti alla retta impropria (giacitura) di un piano ortogonale all'asse –, è di grande rilevanza nella rappresentazione dell'architettura poiché costituisce la superficie delle *rampe elicoidali*, come quelle per l'accesso delle automobili ai vari livelli delle rimesse a molti piani, e anche la superficie di appoggio di *scale elicoidali*; ma è presente pure nella *vite a filetto rettangolare*, la cui superficie è costituita da due porzioni di elicoidi coassiali, uguali e concordi, e dalle superfici cilindriche che le delimitano.

Per rappresentare l'*elicoide retto* nel *metodo di Mon-*

ge, data l'elica direttrice  $\epsilon(\epsilon_2, \epsilon_1)$  (cfr. 2.3.3.) il cui passo sia quello stabilito per l'elicoide, se ne costruiscono un certo numero di generatrici: le prime proiezioni di tali rette – tutte orizzontali, se l'asse è verticale – coincidono con i raggi del cerchio-prima proiezione dell'elica, le seconde coincidono con le (semi)rette orizzontali passanti per ciascun punto dell'asse e per il punto di uguale quota dell'elica (fig. 61). Tuttavia la superficie effettiva di una concreta rampa elicoidale deve essere limitata all'interno e

all'esterno da due eliche, una delle quali, ad esempio quella esterna, può coincidere con l'elica-direttrice data, mentre la seconda, di passo uguale alla prima, è ottenibile come sezione dell'elicoide con un cilindro coassiale e di diametro minore, e dunque la sua inclinazione risulta maggiore. L'*assonometria cavaliera* dell'elicoide può agevolmente costruirsi come trasformata omologica delle proiezioni monogiane (cfr. fig. 61).

Per la *rappresentazione prospettica* di questa super-

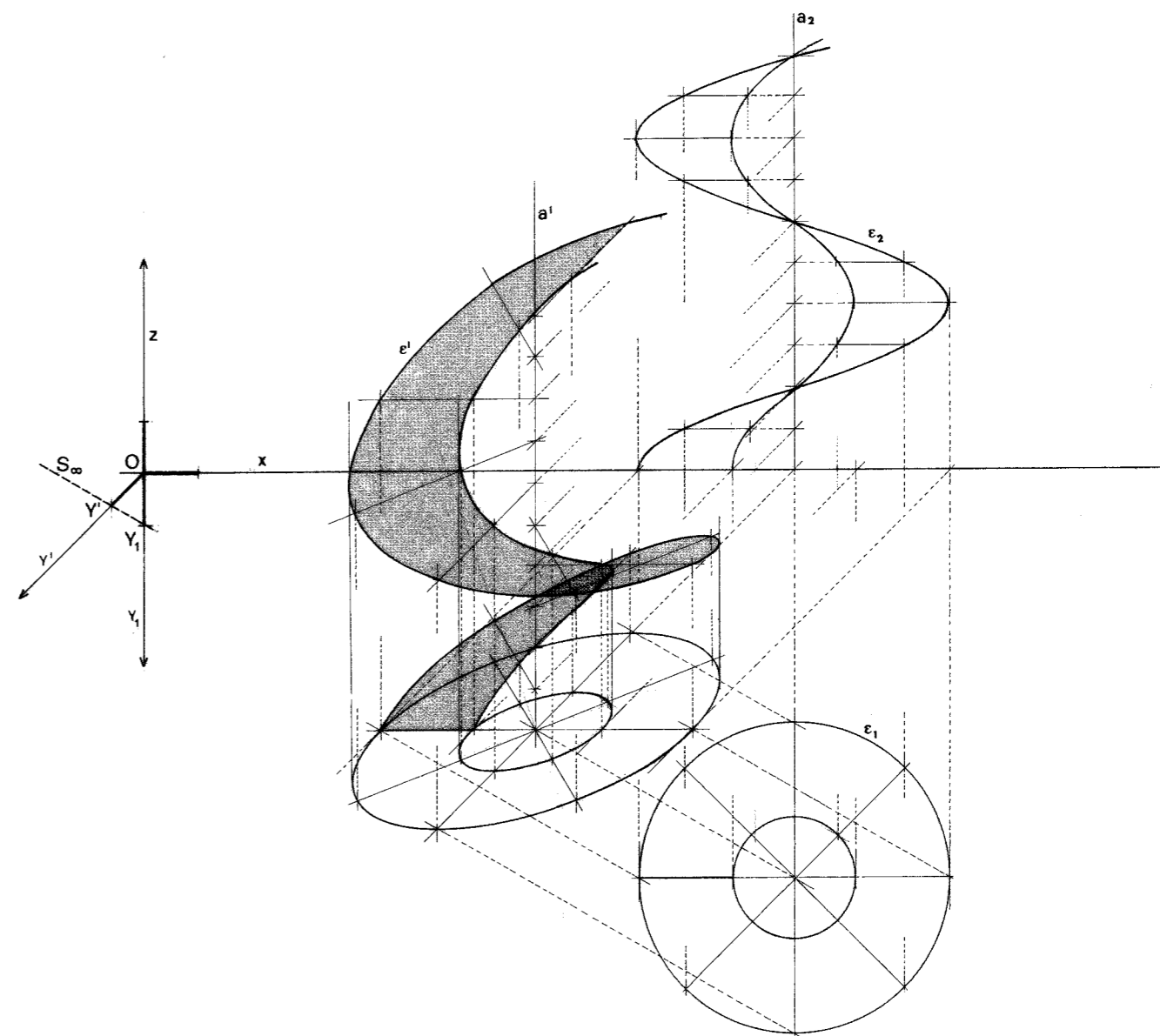


Fig. 61

ficie è particolarmente idoneo il metodo del ribaltamento: costruita l'ellisse  $\epsilon'$ , immagine del cerchio proiezione geometrica dell'elica e i relativi settori circolari (fig. 62), si stacchino sull'asse le corrispondenti suddivisioni verticali e si proceda come per la prospettiva dell'elica (cfr. 2.3.3.).

Una costruzione analoga è quella relativa alla rappresentazione della scala elicoidale<sup>8</sup> - in chiave

strutturale, cioè con le sole presenze lineari, prive di ogni spessore - nel *metodo di Monge*: i settori circolari, determinati dalle suddivisioni del cerchio-base del cilindro che limita esternamente la scala, coincidono con le prime proiezioni delle superfici orizzontali (pedate) dei singoli gradini; questi settori sono limitati all'interno dal cerchio, concentrico e di raggio assai inferiore al primo, base del cilindro in-

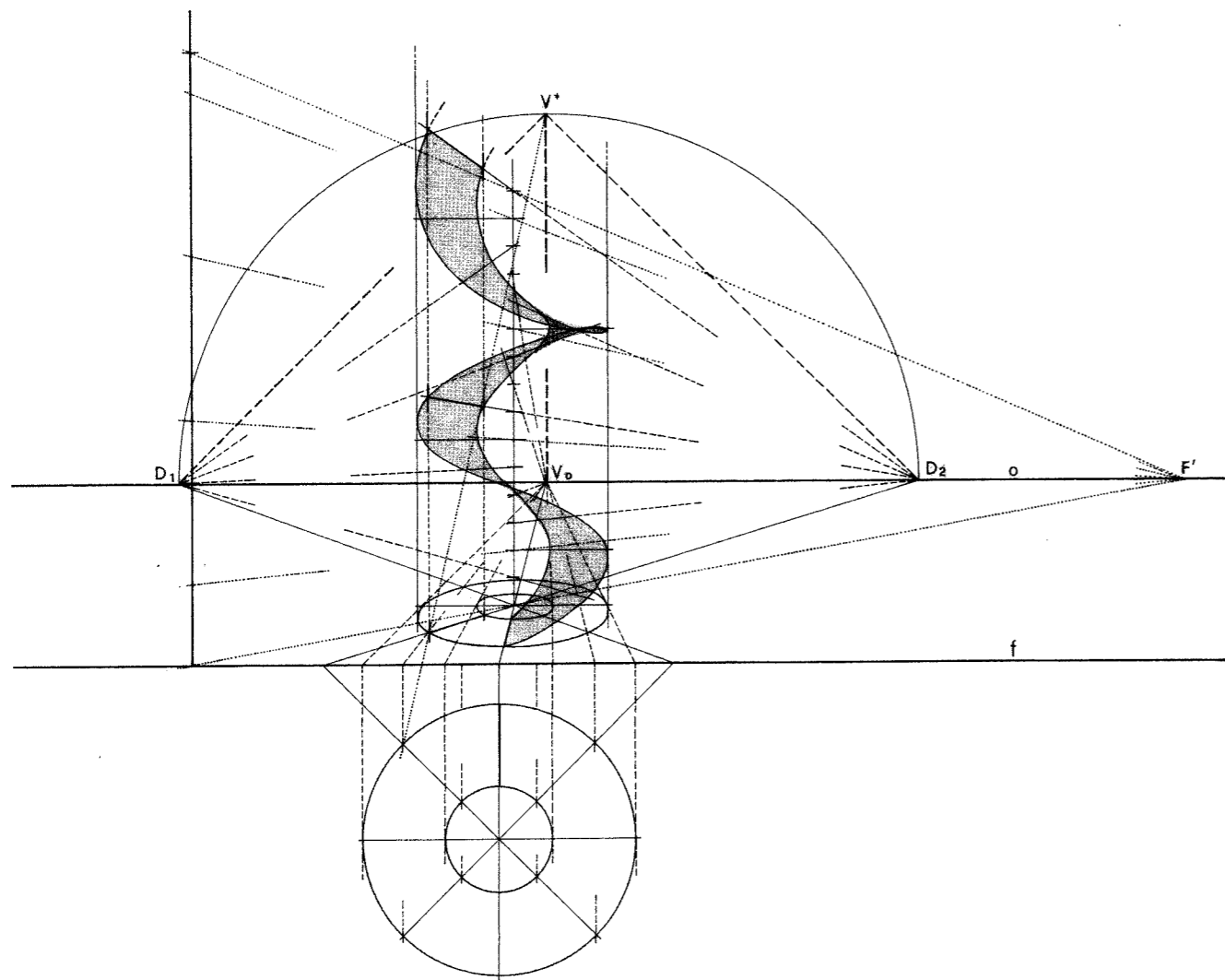


Fig. 62

terno. Le seconde proiezioni delle stesse superfici dei gradini coincidono con i segmenti di rette orizzontali compresi tra le due sinusoidi seconde proiezioni delle due eliche ideali che raccordano rispettivamente gli estremi esterni e gli estremi interni degli spigoli anteriori (o posteriori) dei gradini: infatti ciascuno dei raggi del cerchio rappresenta in prima proiezione lo spigolo posteriore di un gradino e lo spigolo anteriore del gradino successivo (fig. 63). Gli

stessi spigoli, anteriori e posteriori, si possono considerare come generatrici di due ideali elicoidi a piano direttore, la cui inclinazione fornisce la pendenza della scala.

Nella costruzione dell'*assonometria cavaliera*, trasformata la pianta mongiana della stessa figura 63, si tracci la semiretta-asse del cilindro e si riportino su questa i punti della suddivisione relativi ai singoli gradini: per ciascuno di tali punti si traccino due se-

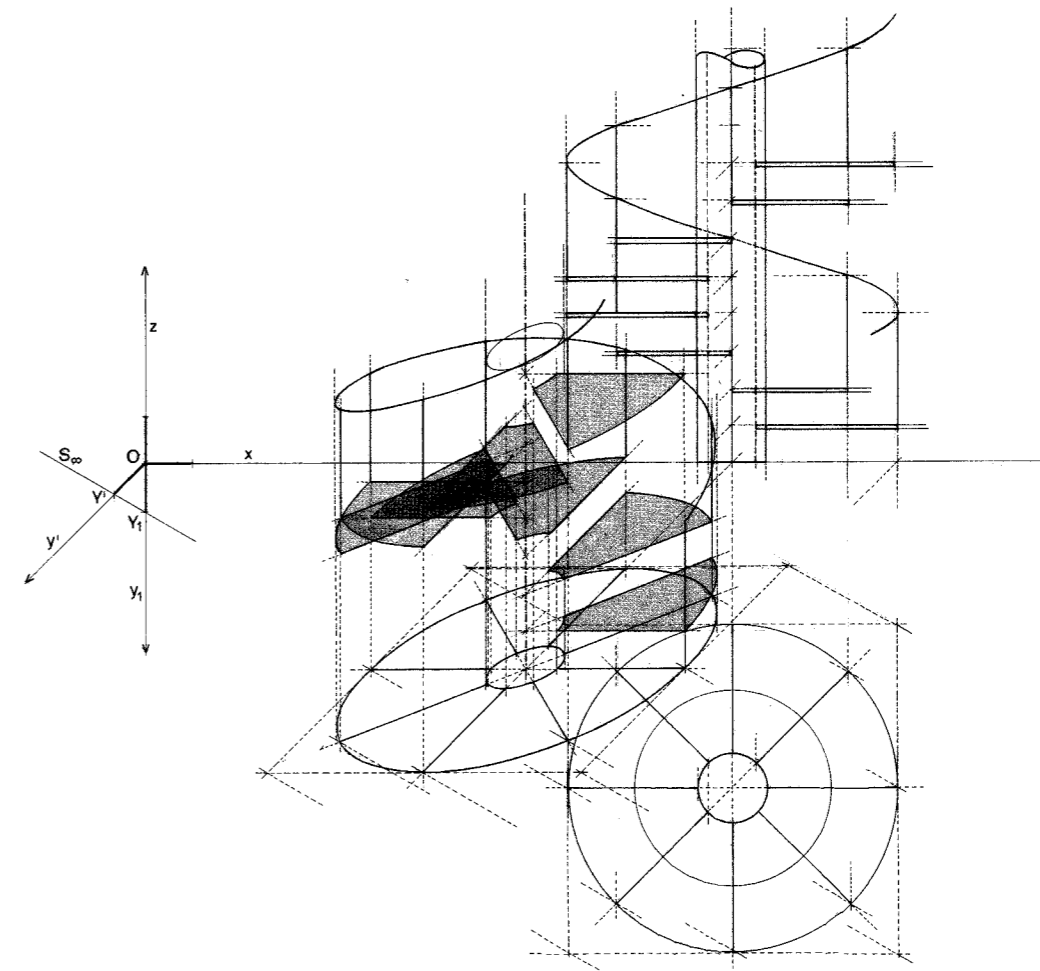


Fig. 63

mirette, spigolo anteriore e spigolo posteriore di ogni gradino, ciascuna parallela al corrispondente semidiametro dell'ellisse  $\gamma'$ , pianta-asonometrica, e al semidiametro successivo. Completano all'esterno la rappresentazione di ciascun gradino altrettanti archi di ellissi, trasformati dei corrispondenti archi in cui è suddivisa l'ellisse  $\gamma'$ , nelle diverse traslazioni aventi come punti corrispondenti di volta in volta quelli delle due suddivisioni successive dell'asse e come centro il punto improprio dell'asse; analoga costruzione vale per il limite interno dei gradini.

La costruzione della *prospettiva* segue analogo procedimento: nella figura 64 le suddivisioni del cerchio sono ottenute mediante i due diametri rispettivamente parallelo e ortogonale alla fondamentale e altri quattro, che insieme ai primi dividono il cerchio in dodici parti; i relativi punti di fuga sono rispettivamente: il punto  $V_0$  (oppure  $K$  se la prospettiva è a quadro inclinato), il punto improprio della retta  $o$  mentre gli altri quattro punti di fuga si determinano sulla retta  $o$  nel modo consueto, mediante le parallele ai raggi del cerchio condotte dal punto  $V^*$ .

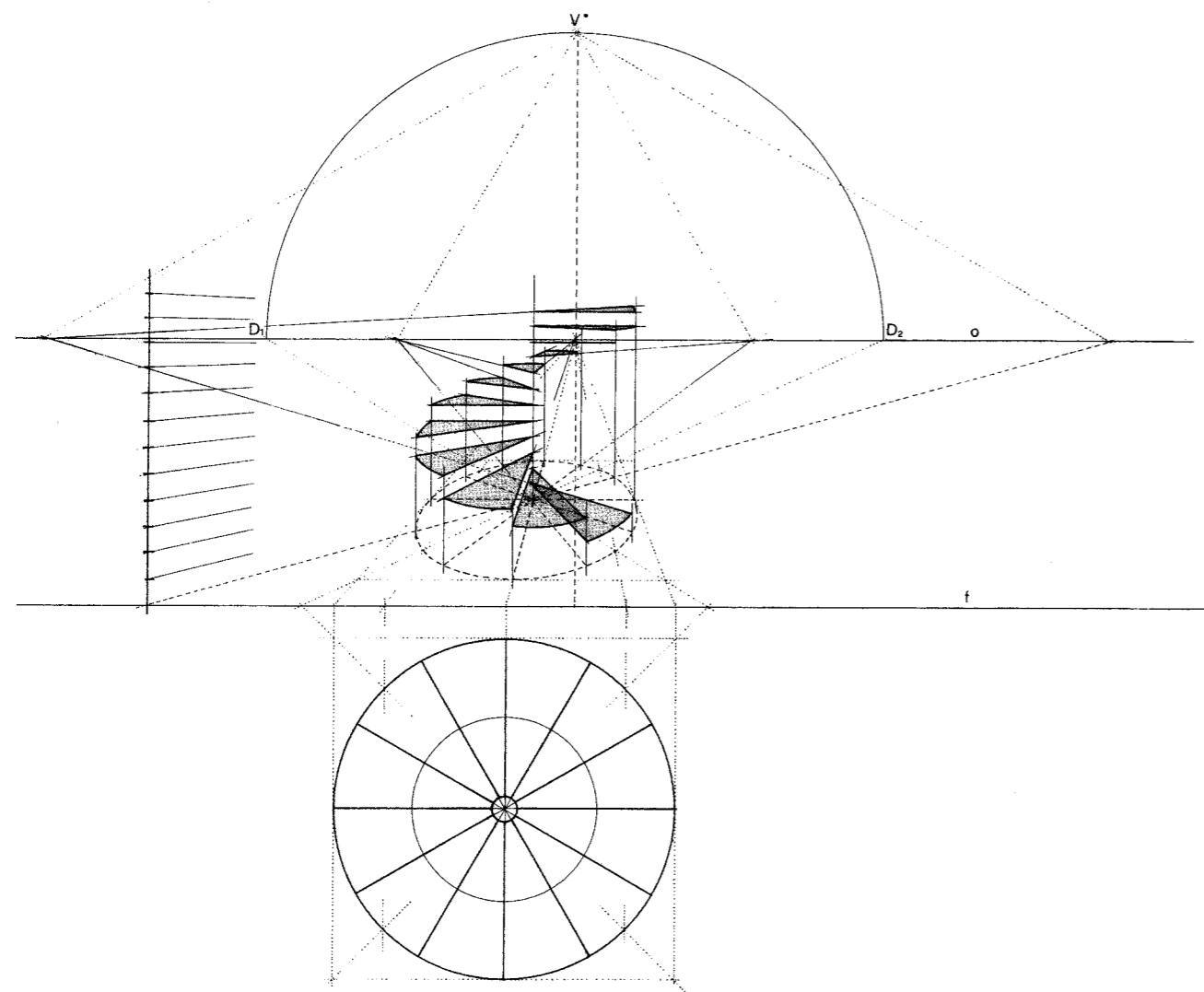


Fig. 64

La vite a filetto rettangolare è così denominata per essere la sua superficie generata in parte dal moto elicoidale del lato  $AB$  di un rettangolo  $ABCD$  intorno a una retta  $a$  parallela a quel lato (fig. 65): se infatti il punto  $A$  (come il punto  $B$ ) descrive un'elica di asse  $a$ , i lati orizzontali  $AD, BC$  descrivono porzioni di due elicoidi retti; il cilindro circolare retto di asse  $a$  e di raggio uguale alla distanza del lato  $AB$  da  $a$  completa la rappresentazione della vite, il cui passo è quello dell'elica descritta da  $A$  (da  $B$ ) e di cui il cilindro interno è il *nucleo*, e la superficie descritta dal rettangolo è il *filetto*.

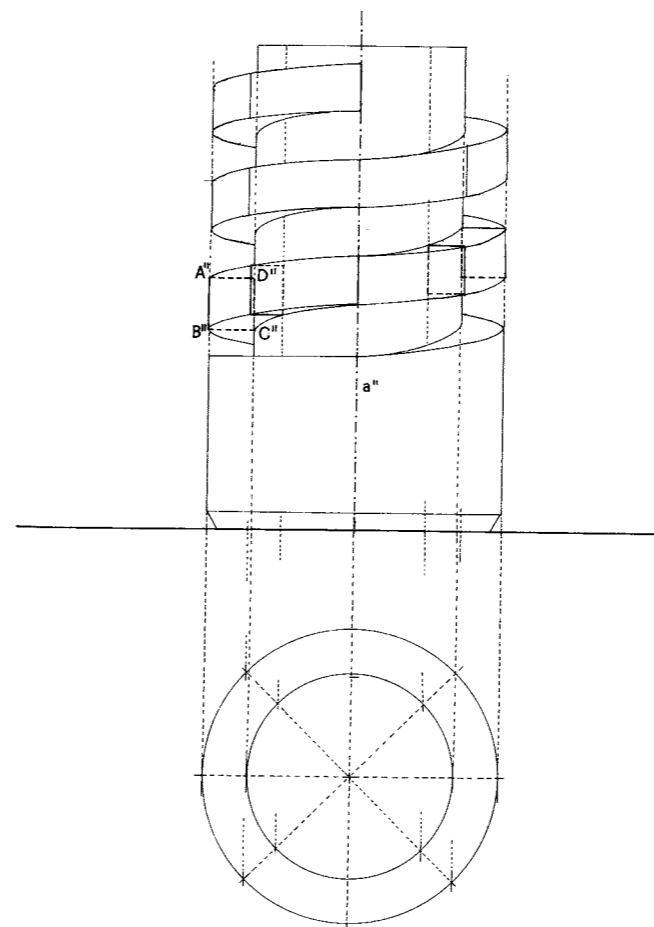


Fig. 65

5. Il *cono-cuneo di Wallis* costituisce la superficie d'intradosso di una volta che coprendo un ambiente a pianta trapezoidale, conserva qualche analogia con la volta a botte: un *arco semicircolare* è la direttrice curvilinea, le due direttrici rettilinee sono la *retta verticale*, posta in corrispondenza del punto d'incontro dei lati obliqui del trapezio, e la *retta impropria* (giacitura) di un piano ortogonale alla prima: le generatrici sono allora tutte le rette che si appoggiano al semicerchio e alla retta propria, mantenendosi parallele alla direttrice impropria, e perciò orizzontali. Per la *rappresentazione mongiana*, si divida la seconda proiezione dell'arco semicircolare in un certo numero di parti uguali mediante i punti  $1_2, 2_2, \dots$  e determinatene le prime proiezioni  $1_1, 2_1, \dots$  si traccino per tali punti le generatrici, tutte concorrenti nel punto  $a_1$  prima proiezione e prima traccia dell'asse  $a$ : i punti intercettati dal lato minore del trapezio, individuano in seconda proiezione l'arco interno della superficie (fig. 66).

Nella stessa figura 66 è presente anche la *costruzione assonometrica*, trasformata della rappresentazione mongiana; tracciati l'arco circolare, mediante traslazione dell'alzato, e la direttrice verticale  $a'$ , le immagini delle generatrici sono le rette che congiungono i punti di suddivisione dell'arco semicircolare con le corrispondenti suddivisioni del segmento della direttrice  $a'$  relativo alla freccia dei due archi; osserviamo che per ciascun punto  $P$  della direttrice rettilinea (escluso il punto più alto, che corrisponde ai punti-chiave dei due archi) passano due generatrici della superficie, quelle che congiungono  $P$  con i due punti dell'arco direttore che hanno la stessa quota di  $P$ .

6. La superficie dell'*arco d'ingresso in una torre cilindrica* è un conoide che differisce dal precedente per avere come direttrice curvilinea una *curva gobba* tracciata sulla superficie del cilindro, precisamente un *arco di quartica*: tale curva è ottenibile come intersezione di due cilindri (cfr. 3.7.1.), la superficie della torre e un ideale semicilindro di asse ortogonale al primo e quindi orizzontale; le direttrici rettilinee sono l'asse del cilindro-torre e la *retta impropria* (giacitura) di direzione ortogonale all'asse. La superficie effettiva (intradosso) dell'arco è quella parte del conoide compresa tra due cilindri verticali coassiali, quelli che delimitano all'esterno e all'interno lo spessore murario della torre.

Data la *rappresentazione mongiana* dei due cilindri verticali disposti in modo che in seconda proiezione l'asse del semicilindro orizzontale (ideale) sia ortogonale a  $\pi_2$  e dunque l'arco esterno appaia semicir-



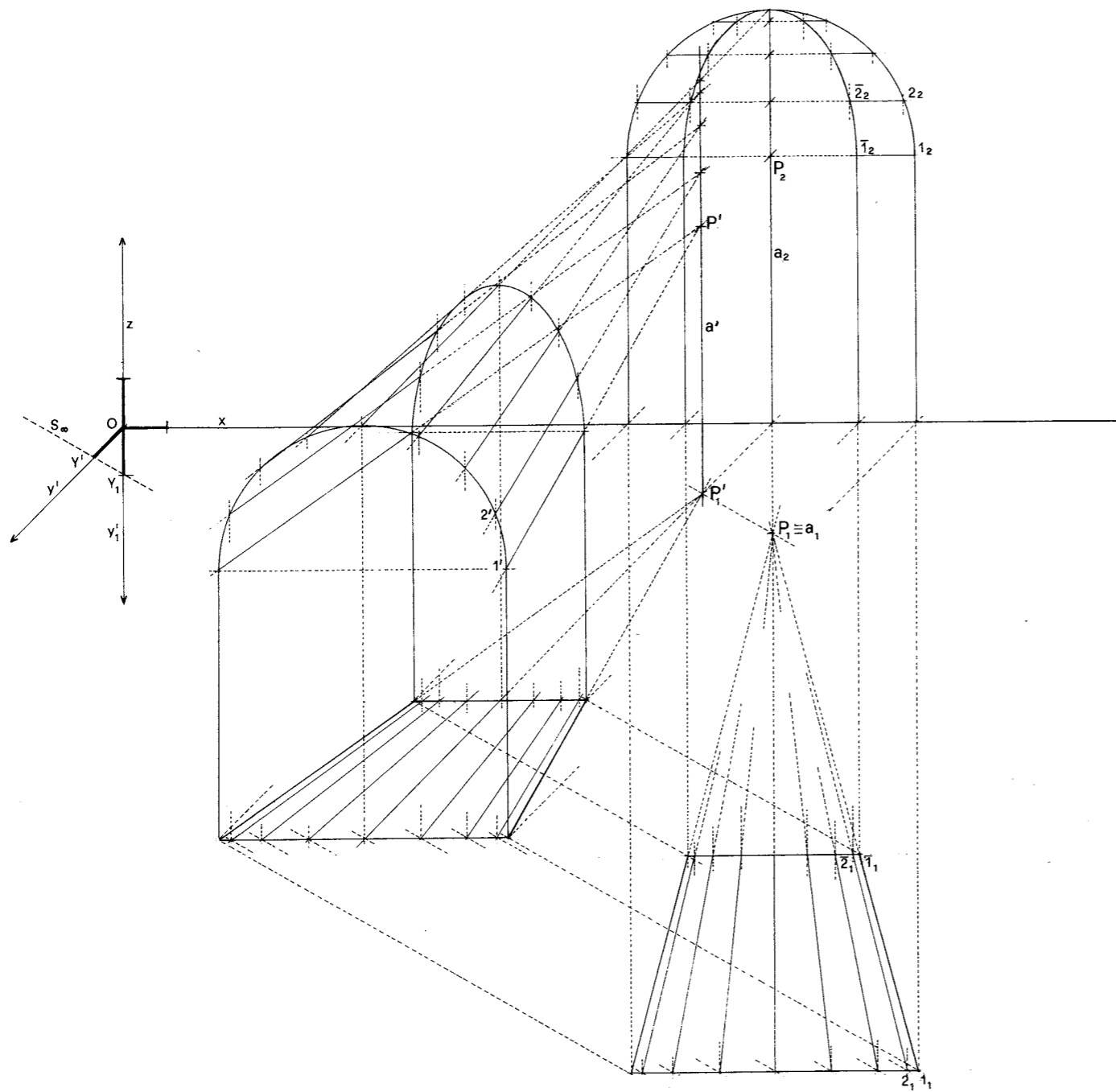


Fig. 66

colare, la costruzione dell'arco interno è analoga al caso precedente, come analogo è il procedimento per la costruzione dell'assonometria (fig. 67), che

differisce solo per la determinazione dell'arco-quartica, e per il secondo arco, sezione del conoide con il cilindro interno.

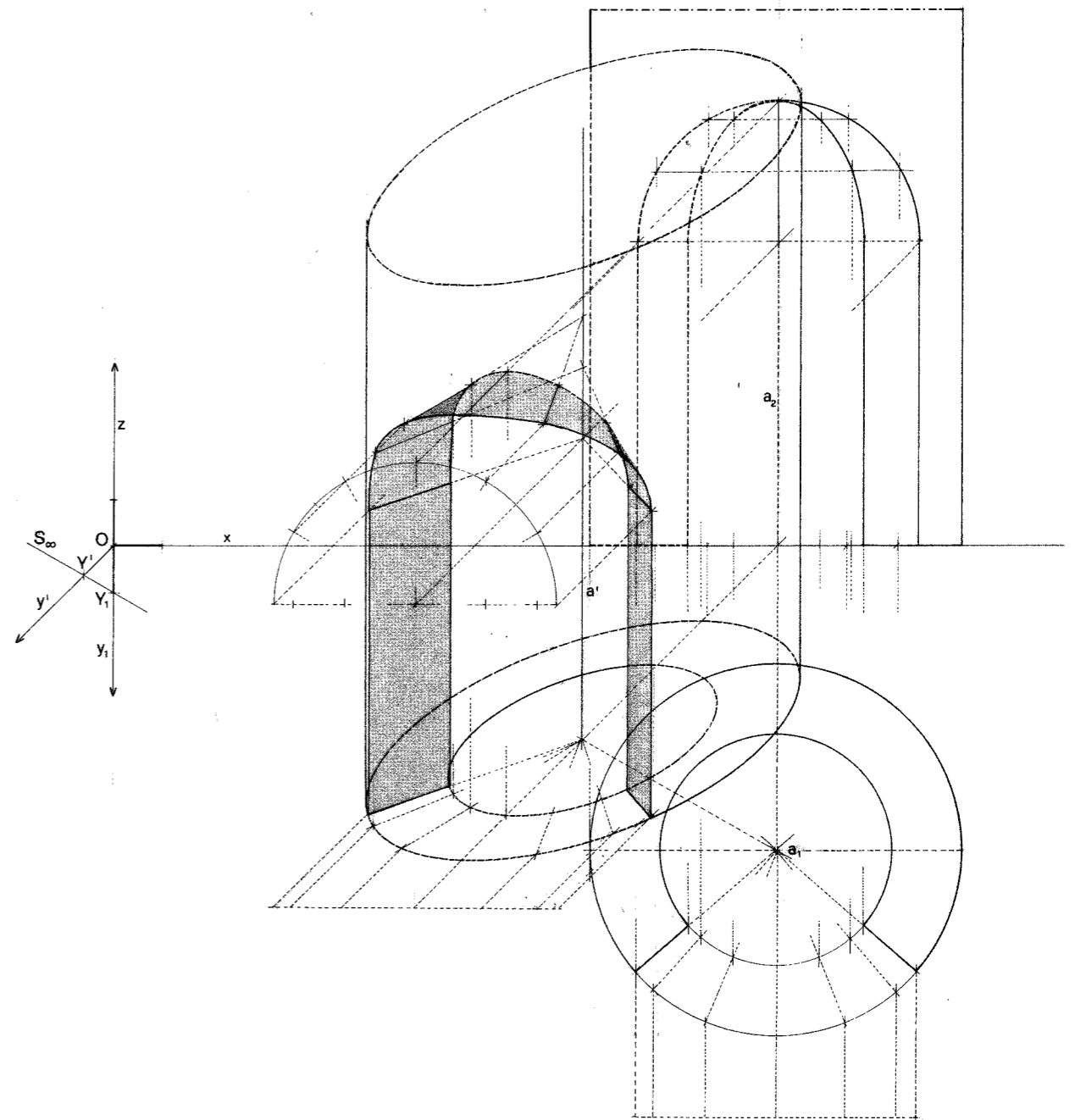


Fig. 67

Per la rappresentazione *prospettica*, con il metodo del ribaltamento, si divida quella parte del cerchio-base del cilindro esterno, relativa all'apertura del vano, in un certo numero di settori e si costruiscano, mediante l'omologia inversa di ribaltamento, le ellissi omologhe dei due cerchi, trasformandone anche i raggi che ne determinano i settori e così ottenendo le corrispondenti suddivisioni delle ellissi-immagini (fig. 68); scelti sul segmento dell'asse relativo alla freccia dell'arco un certo numero di punti equidistanti, si costruiscano per ciascuno di essi la coppia di generatrici (solo per il punto più alto passa una sola generatrice) mediante i relativi punti di fuga: le intersezioni delle generatrici con le verticali condotte per i corrispondenti punti delle due ellissi, esterna e in-

terna, sono punti della curve che delimitano lo spessore dell'arco.

7. L'*elicoide a cono direttore*, detto anche *elicoide rigato obliquo* o *gobbo*, è una superficie rigata di notevole interesse figurativo, avente due direttrici curvilinee e una rettilinea (propria): il cono direttore del titolo è un cono circolare retto la cui intersezione con il piano improprio (un *cerchio all'infinito*) coincide con la seconda direttrice curvilinea dell'elicoide, l'altra essendo un'*elica cilindrica*, mentre la direttrice rettilinea è l'asse dell'elica; allora le generatrici dell'elicoide, che si appoggiano all'asse e all'elica, appoggiandosi ancora a quel cerchio improprio, sono parallele alle corrispondenti generatrici del

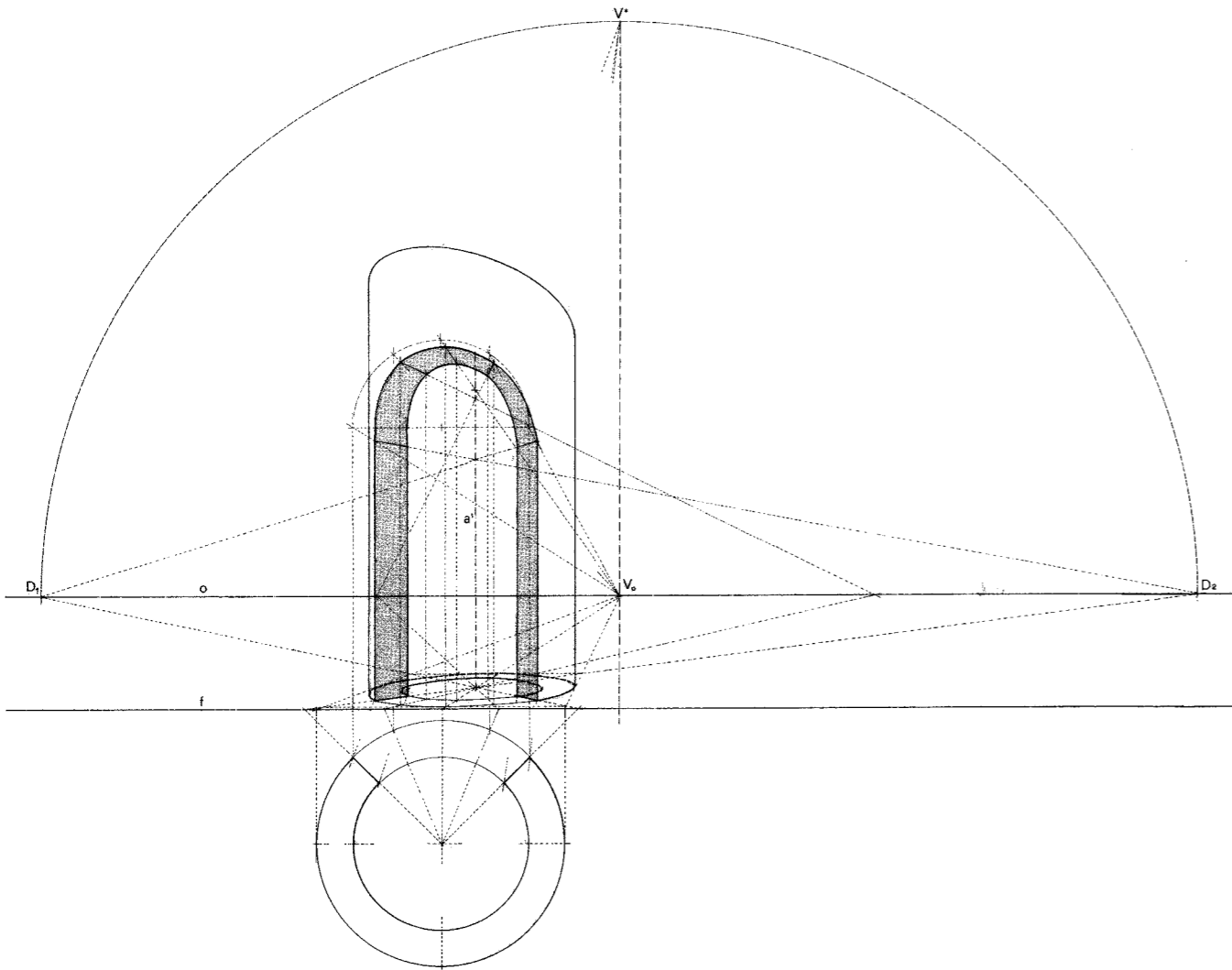


Fig. 68

cono direttore. È possibile tuttavia rappresentare l'elicoide assegnando del cono il solo angolo che le generatrici formano con l'asse: costruita nel *metodo di Monge*

l'elica direttrice (cfr. 2.3.3.) e tracciata una generatrice  $g \equiv MN$  contenuta nel piano di fronte in modo che la seconda proiezione  $M_2N_2$  formi con l'asse  $a_2$  (fig. 69) l'angolo dato, ogni altra generatrice si può

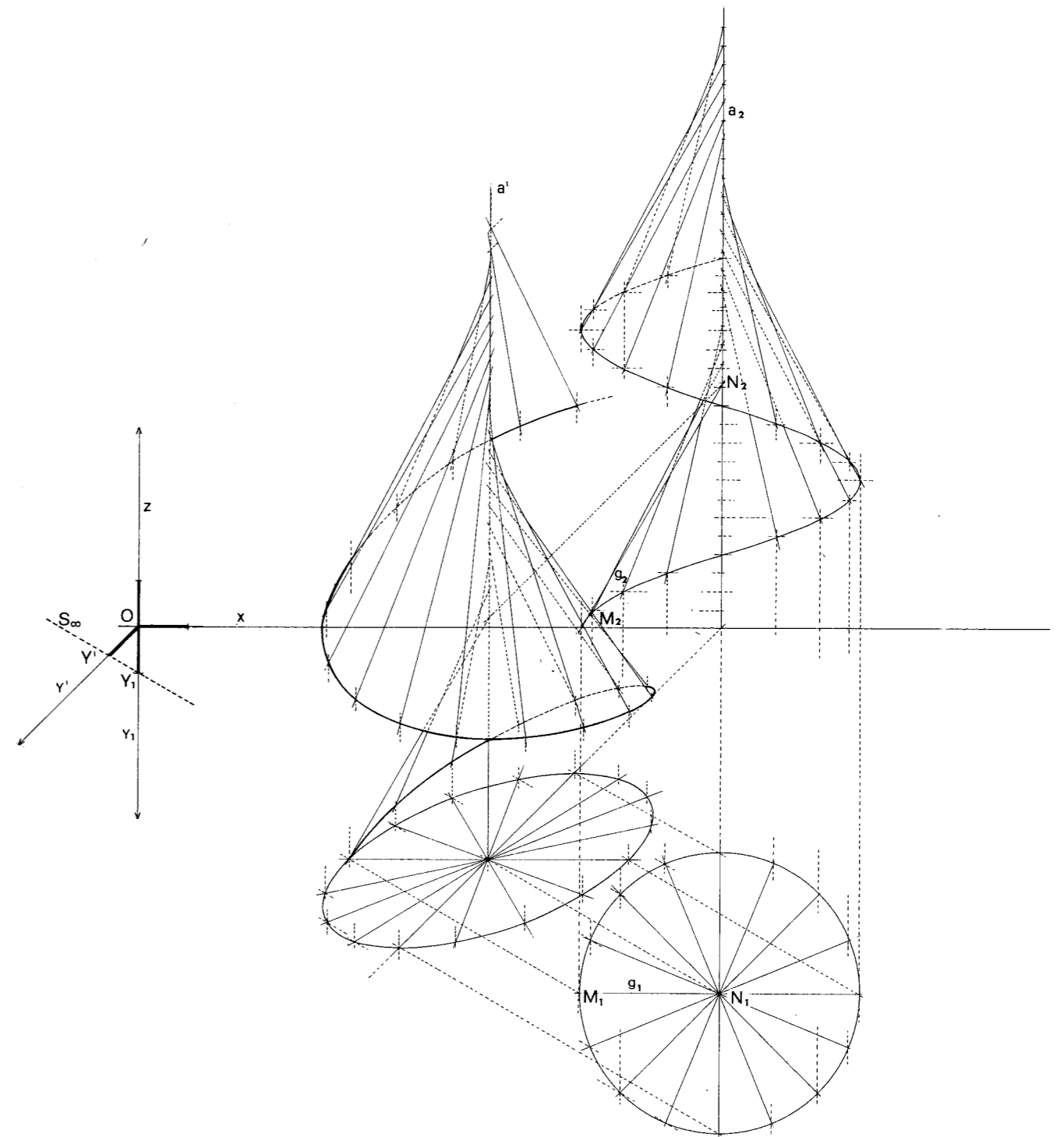


Fig. 69

costruire congiungendo ciascun punto dell'elica con il punto della relativa suddivisione dell'asse, in modo che la differenza delle quote dei due punti si mantenga sempre uguale a quella dei punti  $M$  e  $N$  della generatrice  $g$ .

Se limitiamo la rappresentazione dell'elicoide alla sola falda inferiore, costituita quindi da semirette generatrici, e consideriamo di esse i soli segmenti che hanno l'altro estremo sull'elica direttrice, il *primo contorno apparente* è costituito dal cerchio prima proiezione dell'elica, e il *secondo contorno* da archi della sinusoide seconda proiezione dell'elica, raccordati dalle linee curve ottenute come involuppo delle generatrici più esterne.

La rappresentazione *assonometrica*, trasformata omologica di quella mongiana, si costruisce mediante l'immagine dell'elica direttrice e delle generatrici necessarie alla costruzione delle linee-involuppo (cfr. fig. 69).

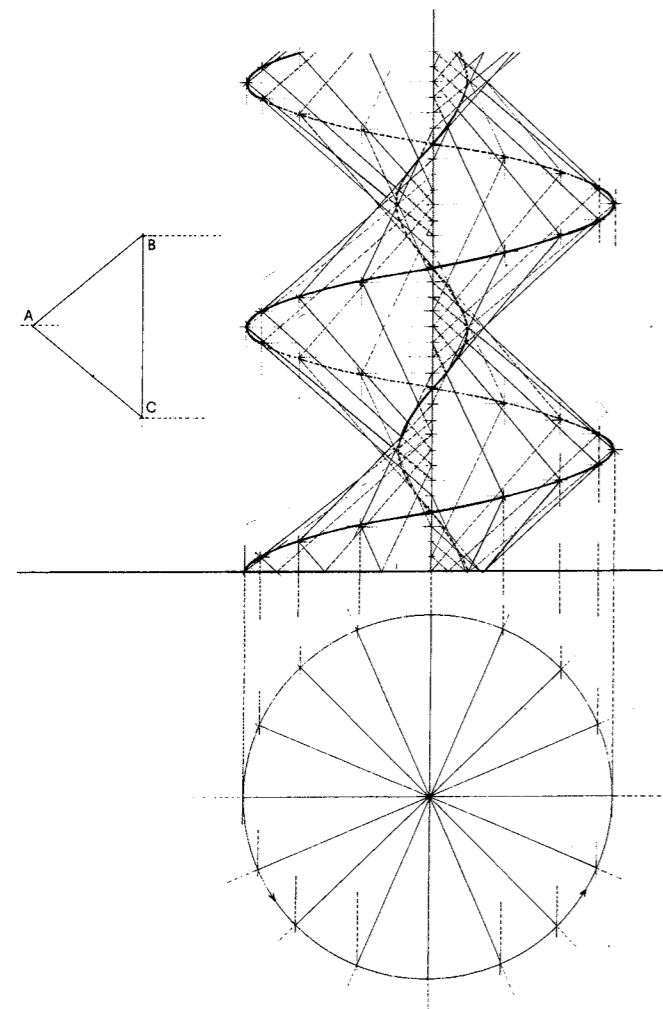


Fig. 70

L'*elicoide gobbo* caratterizza la *vite a filetto triangolare*, la cui superficie è costituita dalle falde opposte di due elicoidi coassiali, aventi in comune l'elica direttrice e il cono direttore. L'attributo 'triangolare' deriva dal fatto che tale superficie può considerarsi generata dal moto elicoidale del vertice  $A$  di un triangolo isoscele avente la base  $BC$  parallela all'asse  $a$  (fig. 70): allora i due lati uguali descriveranno porzioni di due elicoidi obliqui con le generatrici inclinate, in un verso e nell'altro, di un angolo uguale all'angolo alla base del triangolo dato. Il passo delle eliche descritte dai vertici del triangolo è il *passo* della vite, mentre le due porzioni di elicoidi descritti dai due lati uguali ne costituiscono il *filetto*.

8. Le direttrici curvilinee della *volta a sbieco* sono due archi semicircolari uguali in piani paralleli, e la direttrice rettilinea è la *retta normale ai due piani*, condotta per il punto medio del segmento della retta  $C_1C_2$  che congiunge i centri, essendo tale retta non ortogonale ai piani dei semicerchi (fig. 71).

Allora ogni generatrice si determina costruendo un piano ausiliario  $\alpha$  passante per un punto  $P$  del primo arco e per la direttrice rettilinea  $d$ , e detto  $Q$  il punto in cui la retta intersezione di  $\alpha$  con il piano del se-

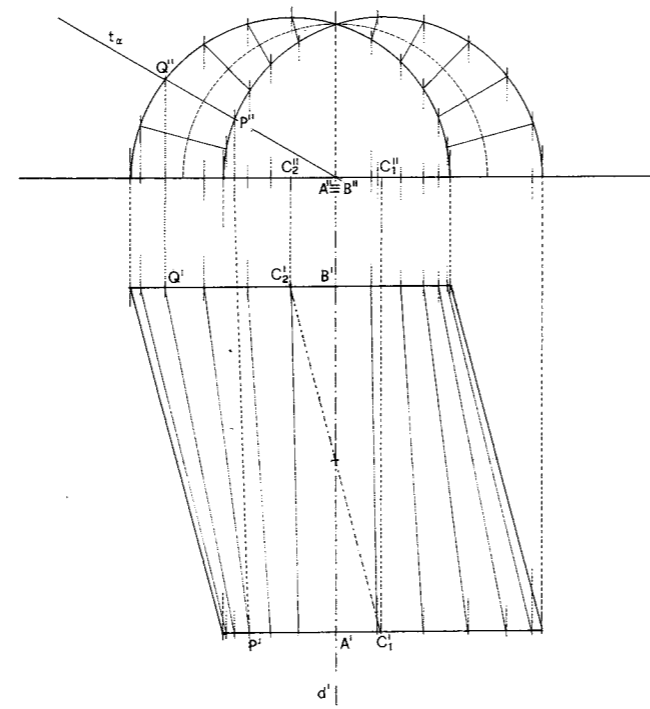


Fig. 71

condo arco secca quest'ultimo, la retta  $PQ$  è la generatrice cercata. Facendo variare il punto  $P$  sul relativo arco si costruiscono altrettante generatrici, che infatti si appoggiano alla retta  $d$  perché complanari con essa, e ai due semicerchi perché congiungono nell'ordine punti dell'uno con punti dell'altro.

Nella figura 72 la volta a sbieco è rappresentata in *assonometria isometrica*: una delle due direttrici circolari, data nel piano coordinato  $yz$ , ha come immagine la semiellisse affine all'arco circolare nella nota omologia di ribaltamento; l'altro arco, appartenente a un piano  $\beta$  parallelo ad  $yz$ , è costruita come omologa della prima nella traslazione di punti corrispondenti  $C'_1$  e  $C'_2$ ; l'immagine  $d'$  della direttrice  $d \equiv AB$  ortogonale ai due piani, è dunque parallela all'asse  $x'$ . Nello spazio, ciascun piano ausiliario  $\alpha$ , passante per la direttrice  $d$  e per le diverse posizioni del punto

$P$  variabile sul primo arco, è individuato dalle rette  $a$  e  $b$ , intersezioni rispettive di  $\alpha$  con i piani dei cerchi, essendo  $a$  quella che congiunge  $P$  con il punto  $A$  della direttrice  $d$ , mentre  $b$  è la parallela ad  $a$  per il punto  $B$  della stessa direttrice; nell'immagine la retta  $b'$  interseca la seconda semiellisse nel punto  $Q'$  e dunque la retta  $P'Q'$  è l'immagine della generatrice  $PQ$ . Si osservi che la retta  $a'$  coincide con la terza traccia del piano  $\alpha$ , mentre le prime due tracce, di cui una coincidente con la direttrice  $d$ , sono parallele all'asse  $x'$ , appartenendo ogni piano ausiliario  $\alpha$  al fascio di asse  $d$  (la terza traccia di  $d$ , non presente nella figura 72, cade al di sotto dell'asse  $x$ , sul piano  $xy$ ). Al variare del punto  $P'$  e delle coppie di rette del tipo  $a', b'$  del piano variabile, vengono individuati i corrispondenti punti  $Q'$  e quindi le successive generatrici della superficie.

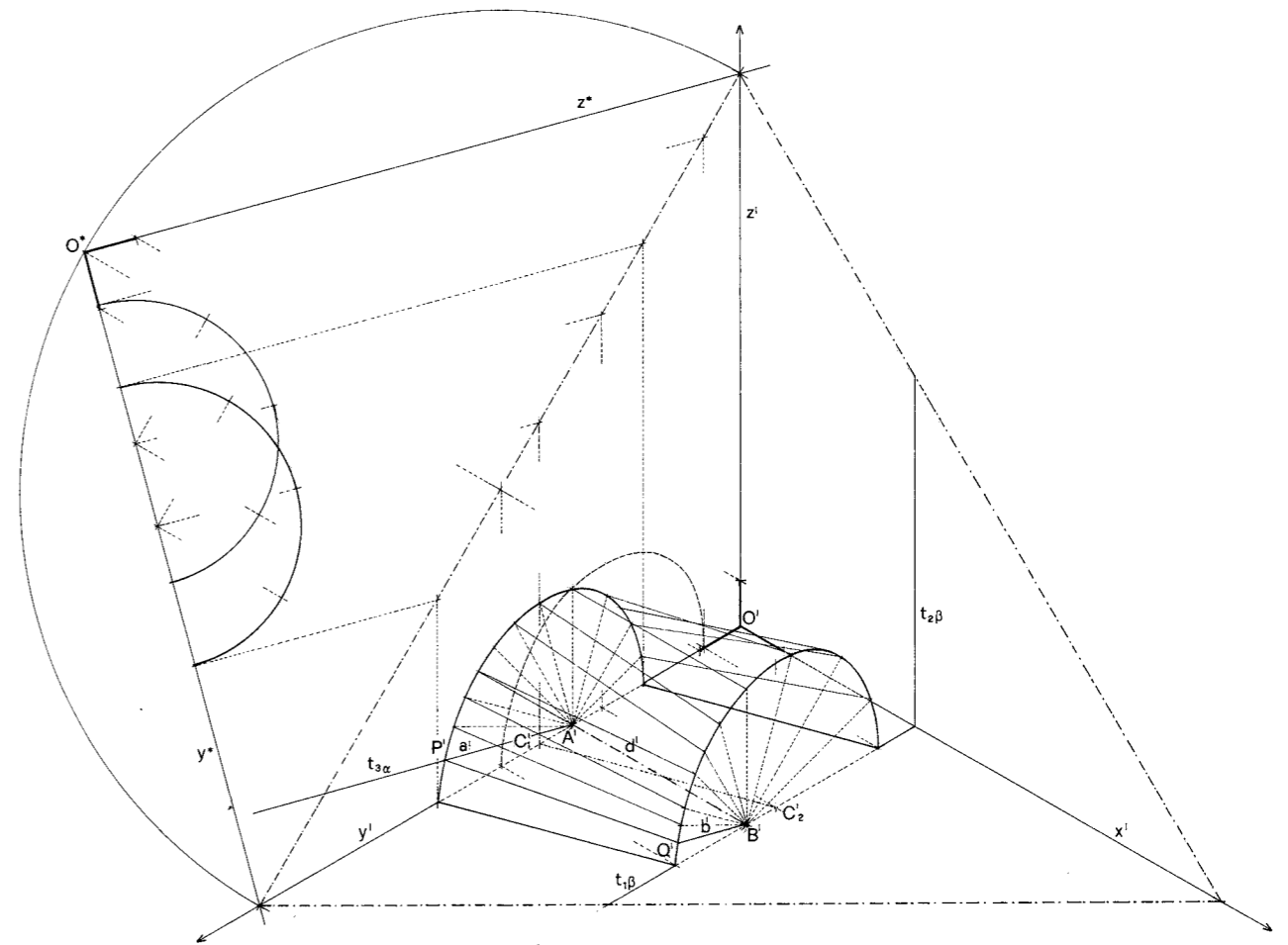


Fig. 72

## 3.5 Elicoidi cerchiati

1. *Definizioni e genesi.* Appartengono alla famiglia degli *elicoidi*, oltre a quelli già studiati come superfici rigate (cfr. 3.4.4.,7.), una serie di altre superfici ad andamento elicoidale, variamente adottate in architettura, la cui linea generatrice è un *cerchio* (più propriamente una *circonferenza*): si tratta degli *elicoidi cerchiati* ottenuti dal moto di un cerchio il cui centro percorre un'elica cilindrica; secondo la posizione del piano del cerchio mobile e della misura del raggio rispetto alle dimensioni dell'elica, gli elicoidi assumono aspetti diversi.

Gli elicoidi cerchiati propriamente detti sono la *colonna torsa* e la *vite di Saint Gilles*, mentre il *serpentino*, generato invece dal moto elicoidale di una sfe-

ra, può considerarsi appartenente alla stessa famiglia, se sostituiamo la sfera con un suo opportuno cerchio massimo.

2. La superficie della *colonna torsa* è generata dal moto di un *cerchio* il cui centro percorre un'elica cilindrica ad asse verticale mentre il suo piano si mantiene *perpendicolare all'asse*, dunque orizzontale. Rappresentata nel *metodo di Monge*, la colonna assume aspetti diversi secondo che lasci uno spazio vuoto al suo interno, si avvolga su se stessa, oppure intersechi la propria superficie: in prima proiezione la superficie è rappresentata da due cerchi concentrici  $\gamma$  e  $\delta$  quali linee di inviluppo, esterna e interna, delle proiezioni del cerchio generatore nelle diverse posizioni, ed essendo i raggi di  $\gamma$  e  $\delta$  rispettivamente

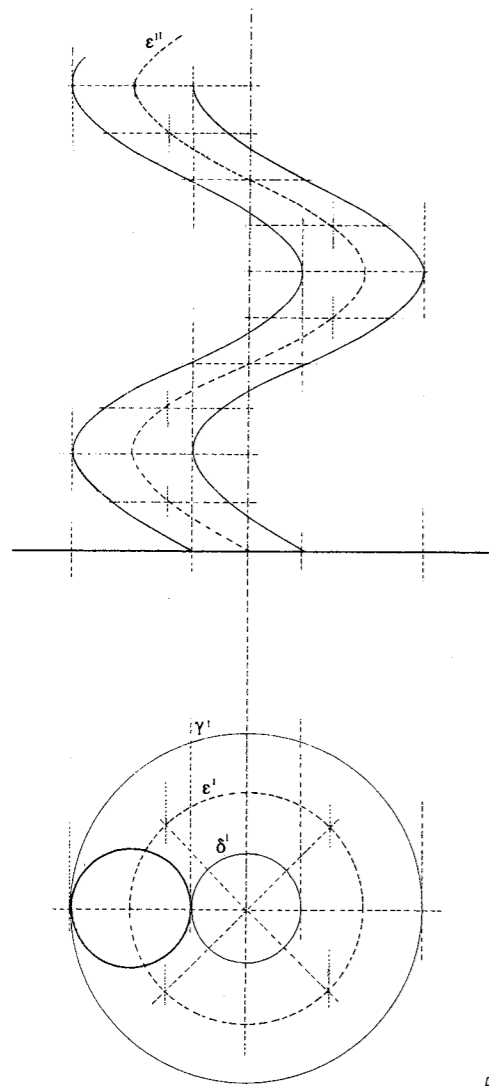


Fig. 73 a

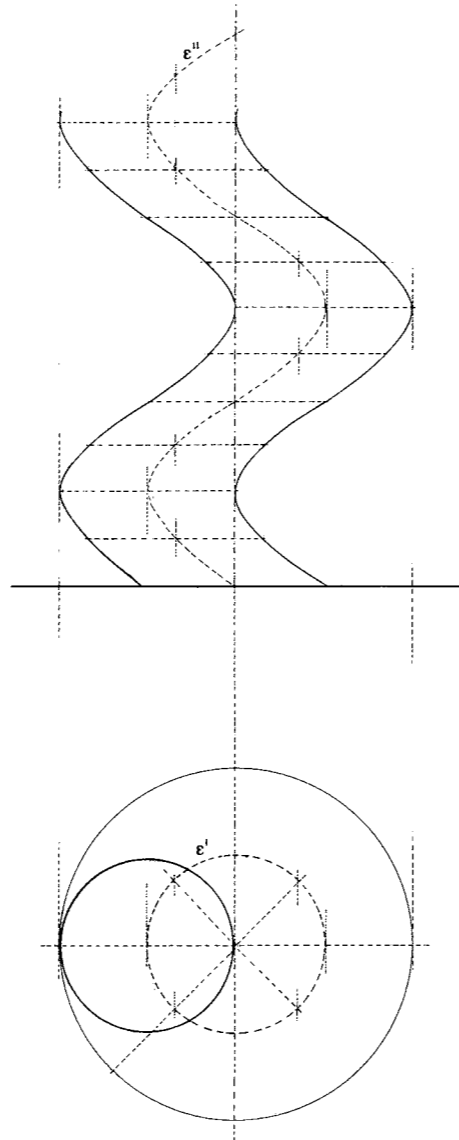


Fig. 73 b

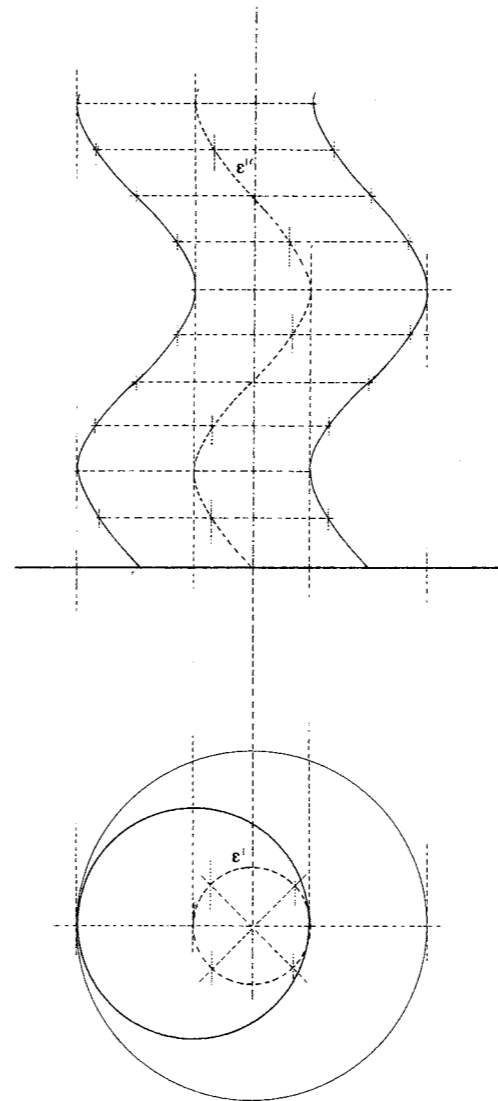


Fig. 73 c

uguali alla somma e alla differenza  $R \pm r$  tra il raggio  $R$  del cerchio  $\varepsilon'$  - prima proiezione dell'elica percorsa dal centro - e il raggio  $r$  del cerchio generatore, le tre condizioni suddette si verificano secondo che il raggio  $R$  sia nell'ordine maggiore, uguale o minore del raggio  $r$  (figg. 73 a, b, c). Negli ultimi due casi il *primo contorno* è allora costituito dal solo cerchio esterno, essendo quello interno rispettivamente ridotto a un punto o del tutto assente: una sezione della colonna con un piano orizzontale è rappresentata evidentemente nei tre casi, dal cerchio generatore appartenente a quel piano. Costruita la sinusoida  $\varepsilon''$  seconda proiezione dell'elica dei centri (cfr. 2.3.3.), il *secondo contorno* della

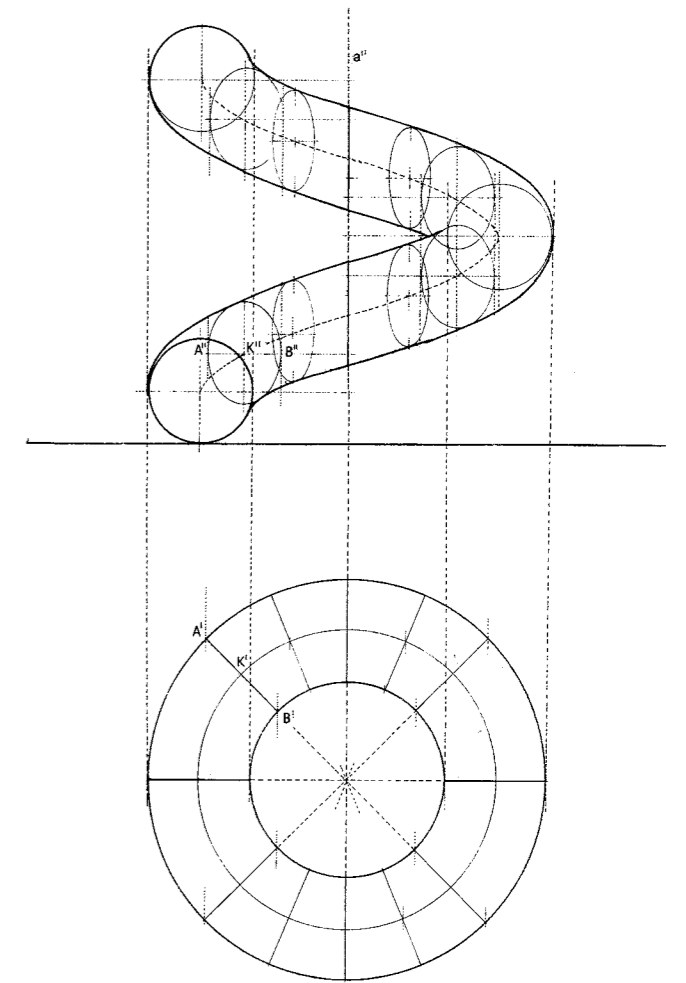


Fig. 74

colonna è costituito da due altre sinusoidi uguali alla prima, i cui punti si ottengono staccando su rette orizzontali condotte per i corrispondenti punti di  $\varepsilon''$ , da una parte e dall'altra, segmenti uguali al raggio  $r$  del cerchio generatore, mentre i segmenti somma  $r + r$  rappresentano in seconda proiezione le diverse posizioni dello stesso cerchio.

3. La *vite di Saint Gilles*, assume particolare interesse costituendo parte della sua superficie l'intradosso della volta che copre scale elicoidali, e che perciò è detta anche *volta elicoidale* (cfr. 4.3.1.). Il cerchio generatore appartiene a un piano passante per l'asse di un'elica, mentre il suo centro percorre l'elica stessa. Anche qui il *primo contorno della proiezione mongiana* è costituito da due cerchi concentrici di raggi uguali rispettivamente alla somma e alla diffe-

renza  $R \pm r$  (essendo nell'ordine  $R$  e  $r$  i raggi dell'elica e del cerchio generatore), mentre il cerchio  $\epsilon'$  rappresenta l'elica dei centri (fig. 74); il *secondo contorno apparente* è costituito dalle due curve-inviluppo delle ellissi che rappresentano in seconda proiezione posizioni successive del cerchio generatore: allora poiché le prime proiezioni di tali ellissi coincidono con quei diametri del cerchio generatore che, nelle diverse posizioni, appartengono alle tracce dei rispettivi piani passanti per il centro, in seconda proiezione restano cerchi quando appartengono al piano di fronte; si riducono a segmenti verticali

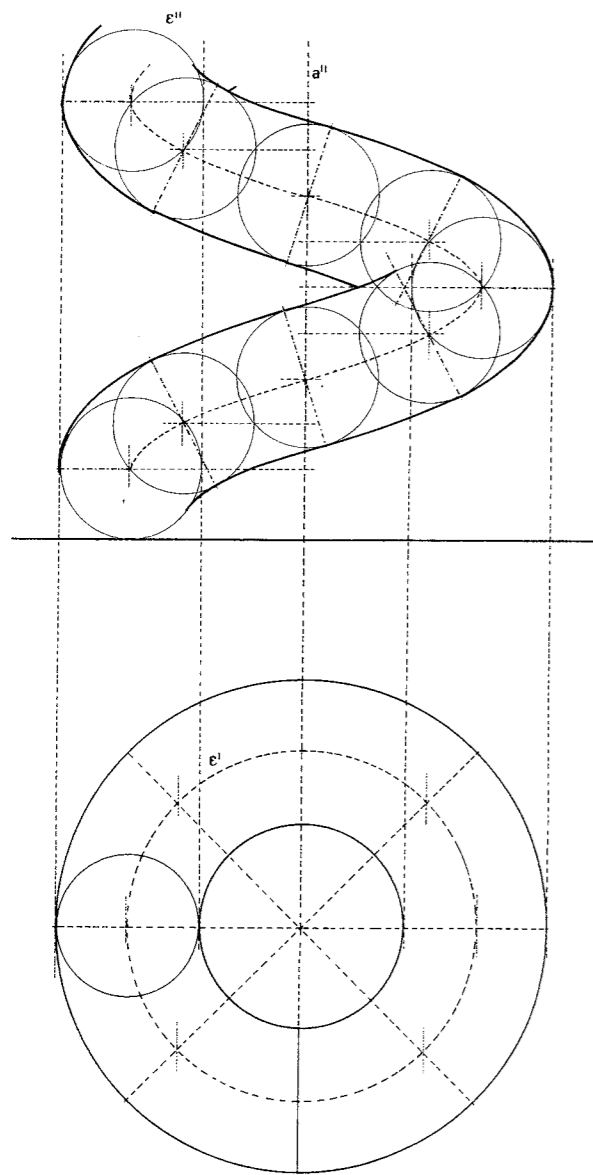


Fig. 75

uguali al diametro, quando appartengono al piano di profilo; nelle altre posizioni sono ellissi, il cui asse maggiore, sempre verticale, è uguale al diametro del cerchio, mentre l'asse minore, evidentemente orizzontale, ha lunghezza gradualmente decrescente, da quella massima – uguale all'asse maggiore – a quella nulla, relative alle due posizioni estreme suddette; ciascuno degli assi minori delle ellissi intermedie, ad esempio di quella di centro  $K''$ , si costruisce considerando il piano diametrale cui appartiene, che in quanto tale è un piano perpendicolare a  $\pi_1$ ; i punti  $A''$ ,  $B''$  sulla retta orizzontale per  $K''$ , seconde proiezioni dei punti  $A'$ ,  $B'$  in cui la prima traccia del piano interseca i due cerchi prima proiezione dell'elicoide, sono gli estremi dell'asse minore.

4. Il *serpentino*, come abbiamo detto, è un elicoide generato dal moto di una sfera il cui centro percorre un'elica cilindrica; ma è possibile pensare questa superficie come generata dal movimento di un *cerchio massimo della sfera*, il cui piano durante il moto si mantenga *perpendicolare all'elica* (cioè perpendicolare alla tangente in ciascun punto della curva), mentre il centro percorre l'elica stessa. Anche in questo caso il *primo contorno apparente* della *representazione mongiana* è costituito dai due cerchi concentrici di rispettivi raggi  $R \pm r$ , dove  $R$  ed  $r$  sono nell'ordine il raggio del cerchio  $\epsilon'$ , prima proiezione dell'elica dei centri, e del cerchio generatore (fig. 75). La seconda proiezione del serpentino è costituita da due curve le cui distanze da  $\epsilon''$ , misurate in ciascun punto sulla normale alla tangente dell'elica  $\epsilon''$  da una parte e dall'altra, siano uguali al raggio  $r$  del cerchio generatore.

### 3.6 I poliedri regolari

1. *Definizioni e proprietà.* Dicesi *poliedro* ogni solido delimitato da superfici piane poligonali dette *facce*, i cui lati e vertici sono detti rispettivamente *spigoli* e *vertici* del poliedro. Ogni spigolo appartiene a due facce consecutive, mentre due facce non consecutive possono avere in comune un vertice oppure nessun punto. Vale per i poliedri la *formula di Eulero*:  $V - S + F = 2$ , dove  $V$ ,  $S$  e  $F$  indicano nell'ordine il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce. Si dice *pseudo-regolare* ogni poliedro le cui facce sono poligoni aventi ugual numero di lati e i cui angoloidi hanno ugual numero di facce; sono detti infine *regolari* i poliedri convessi le cui facce sono poligoni regolari e necessariamente uguali, come sono uguali gli angoloidi. Il numero dei *poliedri regolari* –

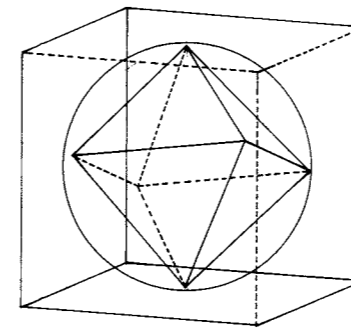


Fig. 76a

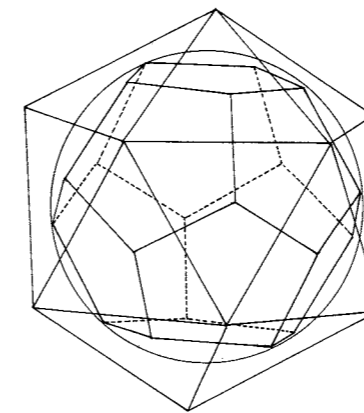


Fig. 76b

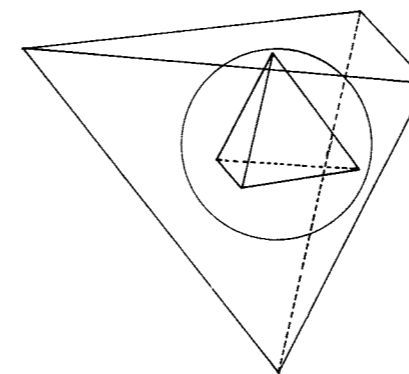


Fig. 76c

detti anche *solidi platonici* per essere noti sin dall'epoca di Platone – è cinque; precisamente essi sono: il *tetraedro*, le cui facce sono quattro triangoli equilateri; l'*esaedro* o *cubo*, sei quadrati; l'*ottaedro*, otto triangoli; il *dodecaedro*, dodici pentagoni; l'*icosaedro*, venti triangoli, sempre tutti equilateri.

Non esistono oltre a questi altri poliedri regolari: si dimostra infatti che le facce possono avere ciascuna al più cinque lati, essere cioè come abbiamo visto triangoli, quadrati, o pentagoni: infatti in ogni vertice non possono concorrere meno di tre facce, e se queste fossero ad esempio esagonali, essendo ciascun angolo dell'esagono regolare uguale a  $120^\circ$ , in ogni vertice si avrebbe un angoloido di  $360^\circ$ , cioè un angolo piatto e quelle facce giacerebbero su uno stesso piano; la concorrenza in un vertice di poligoni a più lati appare altrettanto impossibile per essere i relativi angoli via via di ampiezza maggiore.

I poliedri regolari sono tutti *inscrivibili nella sfera*; inoltre i piani tangenti la sfera in ciascun punto, vertice di un poliedro inscritto, costituiscono le facce di un altro poliedro regolare circoscritto alla stessa sfera: ogni poliedro circoscritto ha dunque tante facce quanti sono i vertici di quello inscritto, ed entrambi hanno lo stesso numero di spigoli; infine il centro della sfera è anche il centro del poliedro. L'esaedro e l'ottaedro possono essere l'uno inscritto e l'altro circoscritto alla stessa sfera (il primo ha infatti otto vertici, quante sono le facce dell'altro), e viceversa (il secondo ha sei vertici, quante le facce del primo); in modo analogo si comportano il dodecaedro e l'icosaedro, mentre al tetraedro inscritto corrisponde ancora un tetraedro circoscritto (figg. 76a, b, c): vale

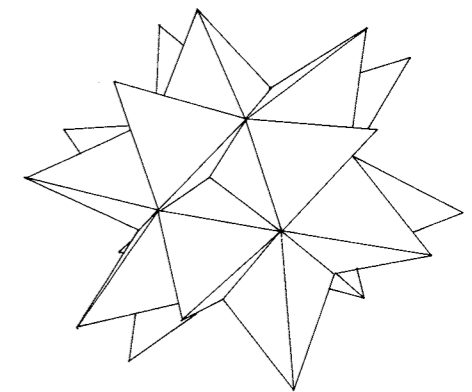


Fig. 76d

dunque per queste coppie di poliedri il principio di dualità (S.- V., p. 70), e per lo stesso principio il tetraedro è duale di se stesso. Il tetraedro inoltre, a differenza degli altri poliedri, non è simmetrico rispetto al proprio centro, poiché la retta che congiunge un vertice con il centro non passa per un altro vertice, ma per il centro della faccia opposta.

Dai cinque solidi platonici è possibile ottenerne altri non regolari operando opportune sezioni piane o costruendo su ciascuna faccia una piramide; in questo ultimo caso si ottengono i cosiddetti poliedri stellari (fig. 76d).

2. *Esaedro o cubo*. La figura 77 rappresenta nel metodo di Monge il più noto dei poliedri regolari, cioè

un *esaedro* (o *cubo*) disposto con una faccia in un piano  $\alpha(t_\alpha, s_\alpha)$  perpendicolare a  $\pi_2$ , e di cui siano assegnate la misura del lato e le proiezioni di un vertice  $A(A'', A')$  di quella faccia: costruito su  $\pi_1$  il quadrato in vera forma come ribaltato della stessa faccia, mediante la nota *affinità omologica ortogonale* di asse  $s_\alpha$  e punti corrispondenti  $A'', A'$ , se ne determini la prima proiezione e da questa le seconde proiezioni su  $t_\alpha$  degli altri vertici; i vertici della faccia opposta si determinano staccando dai primi sulle perpendicolari a  $t_\alpha$  segmenti uguali al lato del quadrato assegnato; in prima proiezione la stessa faccia si costruisce come omologa della precedente nella traslazione di punti corrispondenti  $A', E'$ , dove  $E'$  si determina come prima proiezione del punto  $E''$ .

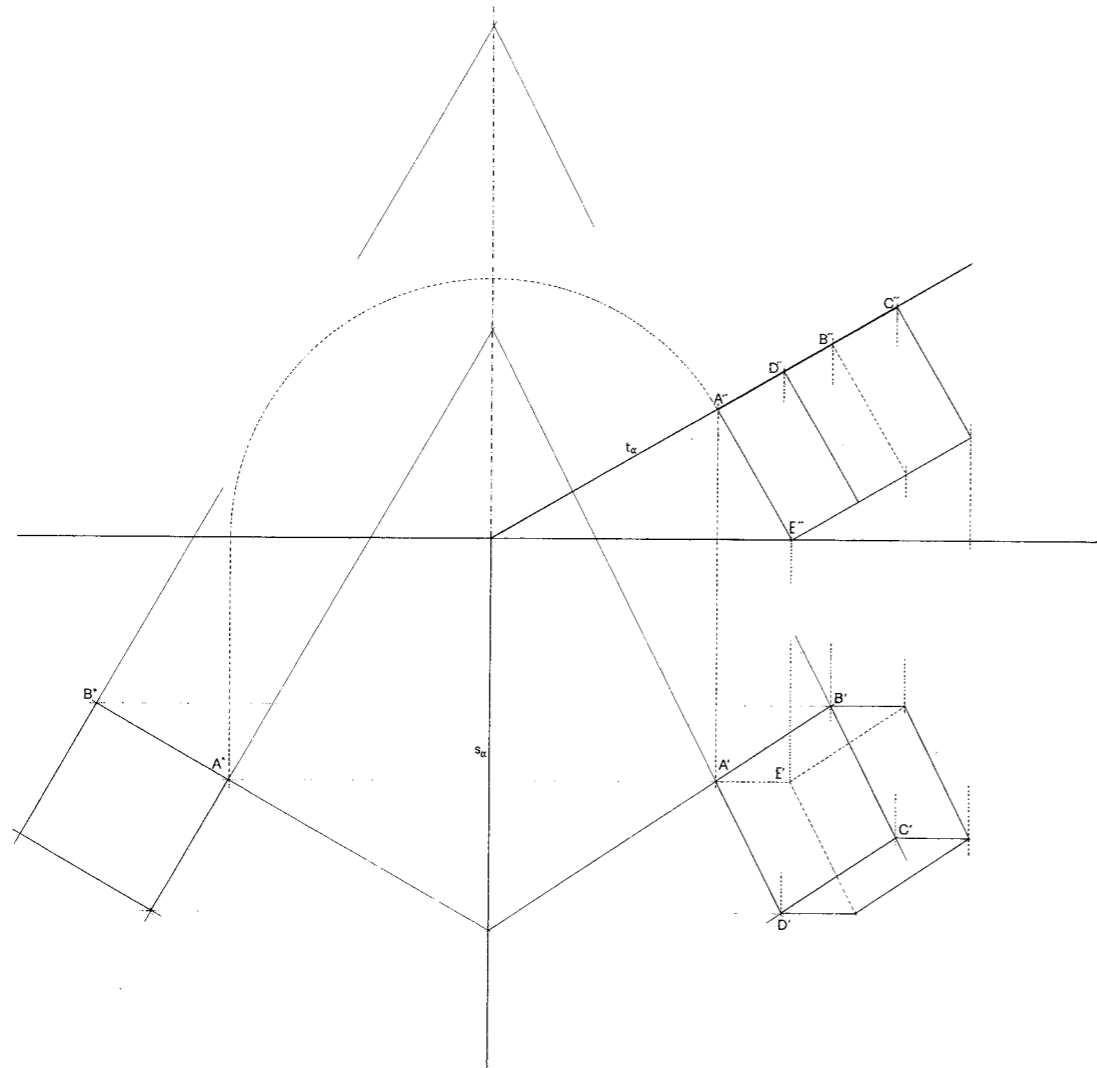


Fig. 77

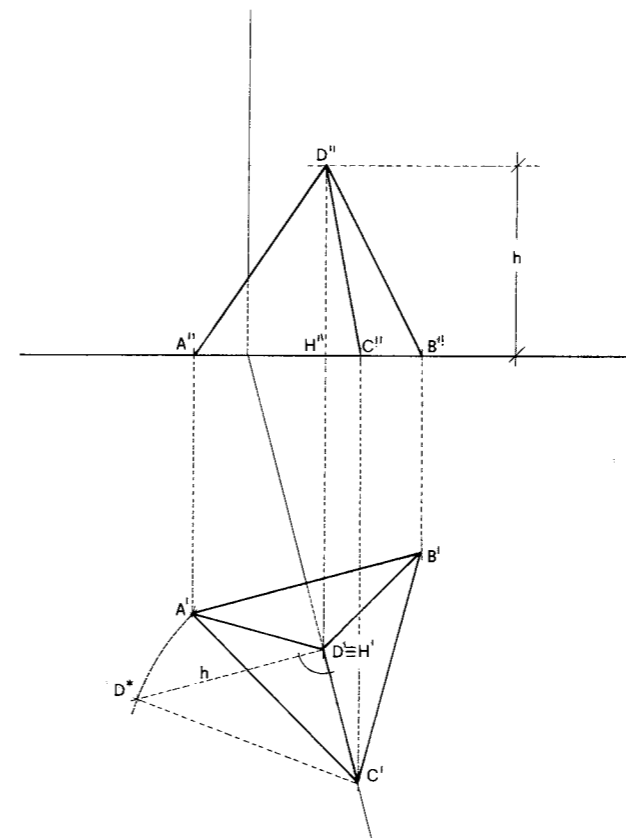


Fig. 78

3. *Tetraedro*. Assegnato un triangolo equilatero, faccia del tetraedro sul piano  $\pi_1$  del riferimento mongiano, i segmenti di rette che congiungono ciascun vertice con il punto  $D'$ , centro del triangolo e prima proiezione del quarto vertice, completano la prima immagine del solido (fig. 78); per costruire la seconda proiezione è sufficiente determinarne l'altezza: allo scopo si ribalti il piano verticale che proietta su  $\pi_1$  uno dei lati obliqui, ad esempio  $CD$ , e con esso il triangolo rettangolo  $C'H'D$  in  $C'H'D^*$ , la cui ipotenusa  $C'D^*$  sia uguale a un lato, ad esempio  $C'A'$ , del triangolo-base: il secondo cateto  $H'D^*$  fornisce l'altezza cercata  $h$ , cioè la quota del vertice  $D$ , che consente di costruire la seconda proiezione  $D''$  di questo vertice e dell'intero tetraedro.

4. *Ottaedro*. Posto il solido con un vertice  $E$  su  $\pi_1$  e tale che il vertice opposto  $F$  appartenga alla semi-retta verticale per  $E$ , la prima proiezione è costituita da un quadrato di lato uguale allo spigolo dell'otta-

edro, che si può considerare come prima proiezione di un quadrato  $ABCD$  base comune a due piramidi ideali di vertici rispettivi  $E$  ed  $F$  e le cui facce laterali sono costituite rispettivamente dalle quattro facce inferiori dell'ottaedro che concorrono in  $E$ , e dalle quattro superiori che concorrono in  $F$ : nelle diagonali del quadrato coincidono allora le prime immagini degli otto spigoli obliqui. Il *secondo contorno apparente* è un rombo (tale contorno è ancora un quadrato se la faccia  $ABCD$  è disposta in modo che i lati formino un angolo di  $45^\circ$  rispetto alla linea di terra), la cui diagonale verticale  $E'F'$  è uguale a quella del quadrato essendo uguali le distanze di ciascun vertice dal vertice opposto.

Assegnata dunque la prima proiezione  $A'B'C'D'$  de quadrato, il cui centro sia il punto  $E' \equiv F'$  (fig. 79), la seconda proiezione dell'ottaedro si costruisce assumendo la quota del punto  $F$  uguale alla misura del segmento  $A'C'$  (o  $D'B'$ ).

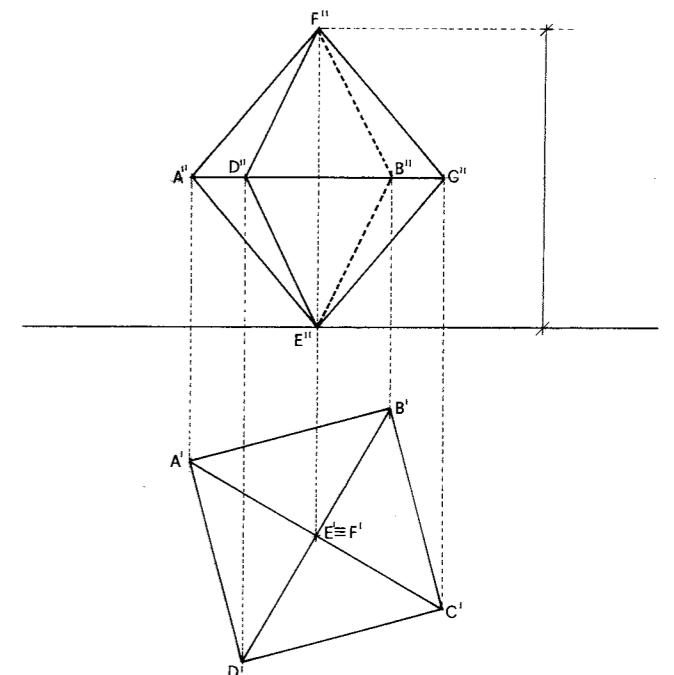


Fig. 79

5. *Dodecaedro*. Data una faccia pentagonale  $ABCDE$  in  $\pi_1$ , con un lato, ad esempio  $A'E'$ , parallelo alla linea di terra (fig. 80), la faccia opposta, ruotata rispetto alla prima di  $180^\circ$ , appartiene a un piano ancora orizzontale, mentre le altre dieci facce sono disposte in modo che cinque di esse abbiano ciascuna un lato sul perimetro della faccia orizzontale inferiore e le altre cinque facce abbiano un lato sul perimetro della faccia superiore; inoltre i due gruppi dei cinque vertici di quelle facce, opposti a quei lati, appartengono ciascuno a un ideale pentagono orizzontale. Tale circostanza consente la costruzione della prima immagine del poliedro: infatti i cinque vertici del pentagono ideale più basso (come i cinque del pentagono più alto) si trovano in prima proiezione sul cerchio circoscritto a tale pentagono, precisamente ciascun vertice, ad esempio  $L'$ , cade sul raggio che passa per un vertice del pentagono-faccia dato su  $\pi_1$ , e si determina nel modo seguente: considerando la faccia  $ABCDE$  come la ribaltata della faccia  $ABLMN$  ad essa adiacente lungo il lato comune  $AB$ , è possibile costruire il punto  $L'$  come omologo del vertice  $E'$ , nell'affinità ortogonale avente per asse il lato comune  $A'B'$ : dunque  $L'$  deve trovarsi simultaneamente sulla perpendicolare all'asse  $A'B'$  condotta per il punto  $E'$ , e sul raggio per  $A'$ ; tracciato il cerchio circoscritto al primo pentagono ideale, questo si può costruire con un vertice in  $L'$  e i lati paralleli a quelli del primo pentagono base: i vertici di questo nuovo pentagono sono anche vertici delle prime cinque facce laterali.

I cinque vertici residui si possono determinare sulla circonferenza circoscritta mediante i raggi condotti per i vertici della faccia superiore: i segmenti che congiungono nell'ordine i dieci punti trovati, insieme con i segmenti dei raggi compresi tra i vertici dei due pentagoni-basi del poliedro completano la prima proiezione del dodecaedro.

Per costruire la seconda proiezione è sufficiente determinare le quote dei due gruppi di cinque vertici dei due pentagoni ideali: la quota dei primi si può conoscere ribaltando il piano che proietta un lato in prima proiezione, ad esempio, il lato  $DQ$ , e con esso il triangolo rettangolo  $DHQ$  in  $D'H'Q^*$ , la cui ipotenusa  $D'Q^*$  sia uguale al lato del pentagono base e dunque al lato del dodecaedro: l'altro cateto fornisce la quota  $h$  di  $Q$  e degli altri quattro vertici che in seconda proiezione cadono sulla retta orizzontale di quota  $h$  e sulle relative rette di richiamo. Ribaltando ora il piano che proietta su  $\pi_1$ , ad esempio, il lato  $RS$  sul piano orizzontale di quota  $h$  e, costruendo il triangolo rettangolo  $S'R'R^*$ , il cateto  $R'R^*$  fornisce la diffe-

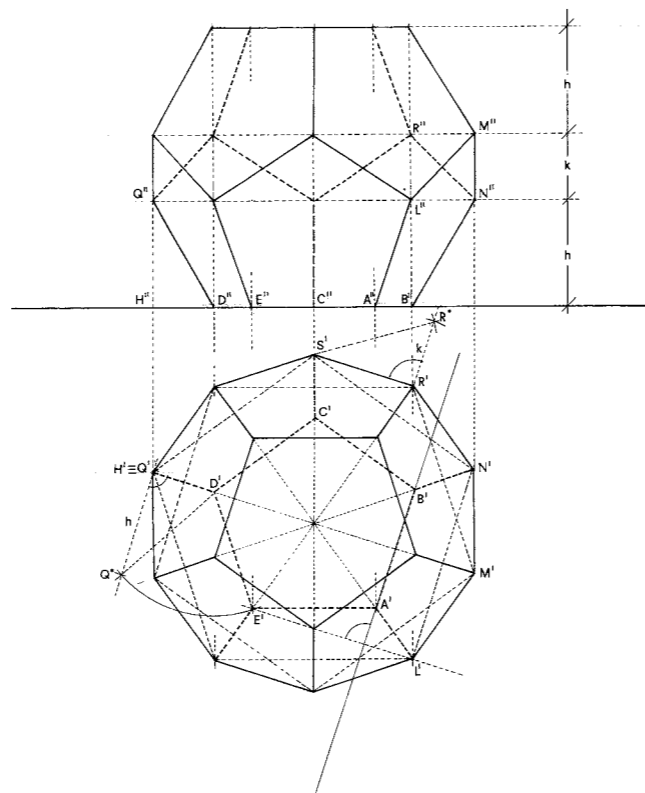


Fig. 80

renza di quota  $k$  tra i primi e i secondi cinque vertici, dei quali ultimi si possono ora costruire le seconde proiezioni; infine i vertici della base superiore cadono su una retta orizzontale di quota  $2h+k$  e consentono di completare la rappresentazione del dodecaedro.

6. *Icosaedro*. Se disponiamo il solido con l'asse perpendicolare al primo piano di proiezione  $\pi_1$ , il vertice  $O$  su  $\pi_1$  e il vertice opposto evidentemente sulla stessa perpendicolare, questi punti sono anche i vertici di due piramidi a basi pentagonali in due piani orizzontali distinti, le facce di ciascuna delle quali coincidono con cinque facce dell'icosaedro; i segmenti che congiungono ciascun vertice del primo pentagono-base con due vertici del secondo (e viceversa) sono lati delle altre dieci facce dell'icosaedro, che così ne completano la rappresentazione. Date in prima proiezione le due basi pentagonali delle suddette piramidi – che in quanto orizzontali si proiettano su  $\pi_1$  in vera grandezza –, disposte cia-

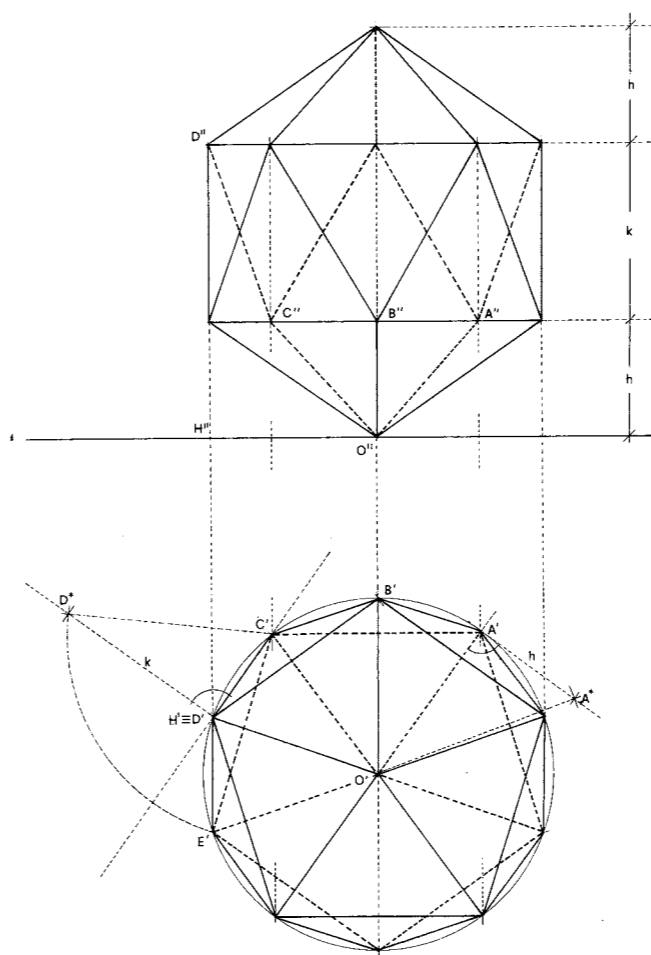


Fig. 81

scuna con un lato parallelo alla linea di terra e ruotata rispetto all'altra di  $180^\circ$ , i raggi di quegli stessi pentagoni e i segmenti che congiungono nell'ordine i vertici dell'uno e dell'altro completano la prima proiezione del solido (fig. 81). Per costruire la seconda proiezione, è sufficiente determinare le quote dei piani orizzontali dei due pentagoni: allo scopo, ribaltato il piano che proietta su  $\pi_1$  uno spigolo obliquo, ad esempio  $OA$ , e con esso il triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa  $OA^*$  sia uguale al lato del pentagono dato – e quindi al lato di ciascun triangolo-faccia –, l'altro cateto  $A'A^*$  fornisce la quota  $h$  dei cinque vertici del primo pentagono-base. Per conoscere la quota del secondo pentagono ideale, si può ribaltare il piano che proietta ortogonalmente su  $\pi_1$  uno spigolo obliquo, ad esempio  $CD$ , e con esso il triangolo

rettangolo  $C'H'D$  in  $C'H'D^*$ , la cui ipotenusa  $C'D^*$  sia uguale al lato  $C'E'$  del poliedro: il cateto  $H'D^*$  è uguale alla misura  $k$ , valore che, aggiunto ad  $h$ , fornisce la quota dei vertici della base della piramide superiore, consentendo la rappresentazione su  $\pi_2$  delle dieci facce laterali; aggiungendo a questa quota ancora una volta la misura  $h$  si determina sulla verticale per  $O$  il vertice della seconda piramide, mediante il quale si completa la seconda proiezione dell'icosaedro.

### 3.7 Intersezione di due superfici

1. *Generalità*. In architettura, i cui spazi sono definiti da superfici murarie, piane e non, l'aspetto configurativo delle strutture è determinato, oltre che dalle superfici, soprattutto dalle loro reciproche intersezioni, che ne definiscono i limiti formali. La più semplice e comune linea-intersezione è quella tra due superfici piane, cioè la *linea retta*: sono evidentemente rettilinei tutti gli spigoli verticali e orizzontali, o comunque inclinati, che appartengono a coppie di parametri murari piani. Il *profilo di un arco* è l'intersezione di una superficie muraria, piana o curva, con una superficie cilindrica – l'intradosso dell'arco –, di cui quel profilo è una direttrice: se la parete è piana, il profilo dell'arco è evidentemente una *curva piana*; se la parete è curva, quel profilo, in quanto intersezione di due superfici curve, è invece una *curva sghemba* (cfr. 3.4.6.). Sono generalmente linee sghembe le intersezioni tra diversi tipi di volte, oppure quelle tra superfici murarie di forma cilindrica o conica.

Appare allora evidente come per la rappresentazione dell'architettura, tanto in sede di rilievo che in sede di progetto, sia prioritaria la conoscenza della genesi configurativa delle superfici e quindi delle curve che ne sono le reciproche intersezioni, affinché sia possibile la traduzione, nel piano del disegno, delle une e delle altre.

Se la linea intersezione di due superfici è una *curva algebrica*, si dice *ordine della curva* il prodotto degli *ordini* delle superfici stesse, cioè il prodotto dei due numeri che indicano il *grado* di ciascuna delle due equazioni delle superfici: così l'ordine della linea intersezione di due piani, superfici di ordine uno perché rappresentate da equazioni di primo grado, è ancora uno, e dunque, come è evidente, trattasi di una *retta*; l'intersezione di un piano (superficie di ordine uno) e una quadrica (superficie di ordine due) – specializzata, come i coni e i cilindri, o non – è una curva ancora del secondo ordine, cioè una *conica*;

l'intersezione di due superfici quadriche, entrambe del secondo ordine, è una curva generalmente sghemba del quarto ordine, detta perciò *quartica*. (cfr. 2.3.2.).

La *quartica* è generalmente costituita da due rami distinti; ma se le superfici si toccano in un punto, la curva è continua e ivi presenta un punto doppio (cfr. 2.1.2.); oppure, se l'intersezione è parziale, la curva è continua e priva di punto doppio; se infine le due superfici quadriche hanno in comune una conica, la residua intersezione è costituita da una ulteriore conica, la quartica cioè si spezza in *due curve piane del secondo ordine*. Nel caso di due coni che abbiano una generatrice in comune, la quartica intersezione, costituita in parte da una retta – la generatrice comune –, è completata da una curva sghemba del terzo ordine, detta appunto *cubica sghemba*.

Lo studio delle curve, intersezioni di due superfici, oltre che indispensabile per la conoscenza e la rappresentazione degli spazi dell'architettura, appare ancora necessario per la *determinazione delle ombre*, in particolare di ombre autoportate da elementi architettonici su se stessi o su altre superfici curve (Parte IV., 5.1.).

Come sappiamo, il mezzo per la costruzione di una linea è quello della determinazione di alcuni suoi punti e/o tangenti: per la linea retta, sono evidentemente necessari e sufficienti due punti; per un (arco di) cerchio tre punti, o due punti e la tangente in uno di essi, oppure un punto e il centro, o ancora il centro e la misura del raggio. Tuttavia solo la proiezione di una retta è ancora una retta (S.-V., p. 22), mentre qualsiasi altra linea piana viene rappresentata in vera forma solo se il suo piano è parallelo al piano iconico; se invece la curva, in particolare il *profilo di un arco circolare*, è contenuta in un piano obliquo rispetto al quadro, la sua immagine risulta deformata dalla proiezione in una semiellisse, e pertanto è necessario individuarne un numero maggiore di punti e/o tangenti, ricordando che il numero cinque di tali enti, necessario perché la conica dia determinata, ma insufficiente per il suo corretto tracciamento, ne consente tuttavia la costruzione di altri punti<sup>9</sup>.

Per la rappresentazione di una *curva sghemba*, intersezione di due superfici curve, si ricorre a un opportuno piano ausiliario variabile. Se le superfici sono entrambe rigate, il problema è più semplice quando le loro mutue posizioni consentono la scelta di un piano variabile che sechi entrambe le superfici secondo rette: i punti comuni alle rette intersezioni di quel piano con l'una e con l'altra superficie appartengono alla curva cercata.

2. *Intersezione di due quadriche*. Come abbiamo visto, la curva intersezione di due quadriche è in generale una *curva sghemba del quarto ordine* – detta perciò *quartica* – costituita generalmente da due rami. È ancora una *quartica* l'intersezione di due quadriche specializzate, come i coni e i cilindri, caso quest'ultimo frequente in architettura, (cfr. 4.2. e 4.3.), oppure nella costruzione delle ombre (Parte IV, 2.3.).

Se le superfici sono *due coni quadrici*, affinché il piano variabile li sechi entrambi secondo generatrici è necessario che tale piano contenga sia il vertice dell'uno che il vertice dell'altro, che appartenga cioè al fascio di piani il cui asse è la retta  $a$  che congiunge i vertici: i quattro punti (non sempre tutti reali) comuni di volta in volta alle coppie di generatrici, secondo cui l'uno e l'altro cono sono secati da ciascuno di tali piani, sono punti della quartica, generalmente due per ciascuno dei due rami della curva: le due generatrici, sezione di ciascuno dei coni con il piano variabile, sono quelle che congiungono i punti in cui la prima traccia del piano seca la direttrice in  $\pi_1$  (detta anche *traccia del cono*), con il relativo vertice. A seconda che il punto  $S_a$ , prima traccia della retta  $a$ , cada all'interno di entrambe le tracce dei coni, di una sola, o all'esterno di entrambe si verificano rispettivamente i casi di *penetrazione mutua*, *penetrazione semplice*, *sfaldamento*. Nella figura 82 il piano  $\alpha$ , la cui prima traccia  $s_\alpha$  seca entrambe le tracce dei coni, fornisce un gruppo di quattro punti della quartica.

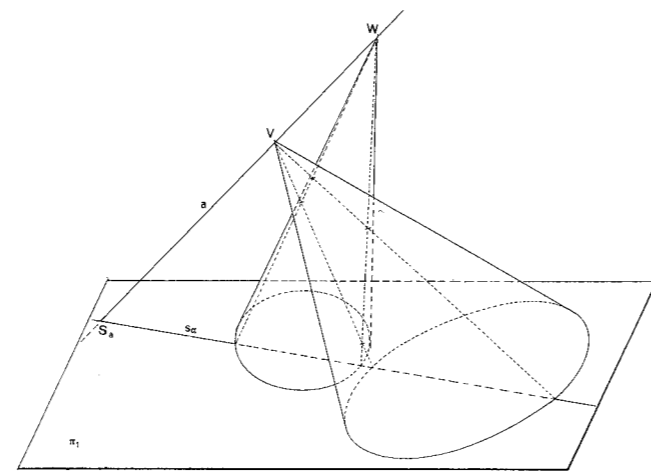


Fig. 82

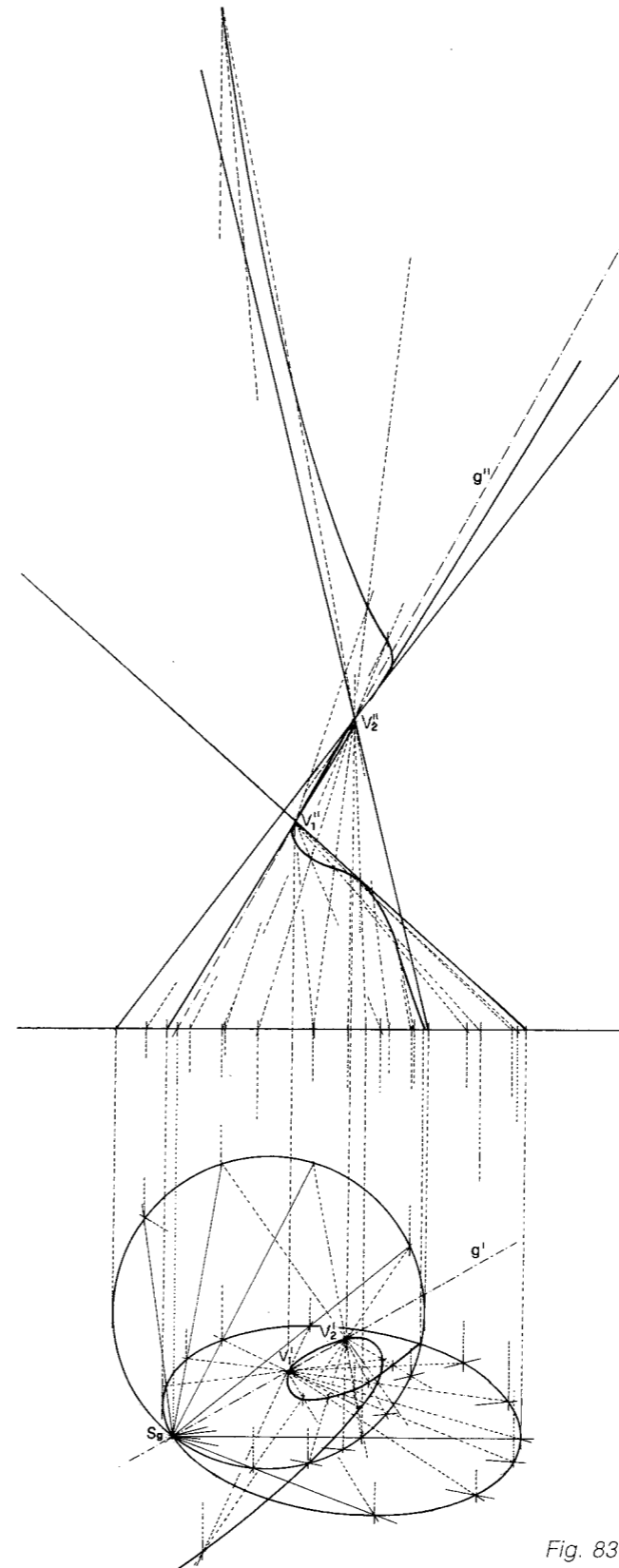


Fig. 83

Se i coni hanno in comune una generatrice, ma in questa non ammettono lo stesso piano tangente<sup>10</sup>, la quartica, come abbiamo visto, si spezza in una retta (la generatrice comune) e in una *cubica sghemba* (curva del terzo ordine, cfr. 2.3.2.). I piani ausiliari per la costruzione della cubica, appartengono allora al fascio avente per asse la generatrice comune, essendo questa la retta che congiunge i vertici (fig. 83), mentre le prime tracce di quei piani appartengono al fascio di rette di centro  $S_g$ , prima traccia di quella generatrice; ogni piano seca ciascuno dei coni, oltre che nella generatrice comune, in una seconda: il punto comune alle due seconde generatrici, ulteriori sezioni del piano con l'uno e l'altro cono, appartiene alla cubica.

3. Per l'intersezione di *un cono e un cilindro* quadrici – ad esempio un cono circolare retto e un cilindro circolare retto, quest'ultimo con l'asse inclinato rispetto a  $\pi_1$ , dati nel *metodo di Monge* (fig. 84) –, essendo la scelta più opportuna quella di un piano  $\alpha$  variabile che intersechi entrambe le superfici secondo rette, tale piano deve appartenere al fascio avente per asse la retta che congiunge i due vertici  $V$  e  $W_\infty$ , rispettivamente proprio e improprio delle due superfici, cioè la retta  $a$  passante per il vertice  $V$  del cono e parallela alle generatrici del cilindro: anche qui la curva intersezione è in generale una quartica costituita da due rami distinti. Condotte rispettivamente per le due proiezioni  $V''$ ,  $V'$  del vertice del cono le rette  $a''$ ,  $a'$  parallele ciascuna alla proiezione omonima della direzione  $W_\infty$ , i piani ausiliari, come nei casi precedenti, hanno tutti la prima traccia  $s_\alpha$  passante per la prima traccia  $S_a$  della retta  $a$ ; se la retta  $s_\alpha$  interseca entrambe le tracce in  $\pi_1$  (rispettivamente circolare e ellittica) del cono e del cilindro si ottengono quattro punti della quartica richiesta; quando la retta  $s_\alpha$  passa per ciascuno degli eventuali punti comuni alle tracce-direttrici, i punti della curva contenuti in  $\alpha$  si riducono a tre, di cui uno è quello comune alle direttrici; quando infine  $s_\alpha$  è tangente ad una delle due direttrici, ad esempio in un punto  $T$ , si ottengono due soli punti, quelli in cui la generatrice passante per  $T$  della prima superficie interseca le due generatrici, sezioni del piano  $\alpha$  con la seconda: in questi punti la prima generatrice risulta tangente a ciascun ramo della quartica. La curva si costruisce poi congiungendo opportunamente, in prima e in seconda proiezione, i punti ottenuti.



4. Dati due cilindri circolari di diametri diversi, se la giacitura comune alle generatrici dell'uno e dell'altro è quella orizzontale, il piano ausiliario variabile  $\alpha$ , ancora orizzontale, interseca entrambi i cilindri secondo coppie di generatrici determinando quattro punti della *quartica*: i cerchi base dei due cilindri appartengono ai piani ortogonali a  $\pi_1$  e pertanto le seconde proiezioni sono ellissi (fig. 85).

Se i due cilindri hanno in comune una ellisse, la quartica si spezza in due coniche, dunque la residua intersezione delle due superfici – come avviene per le quadriche non specializzate – è una seconda el-

lisce; e se i due cilindri hanno cerchi direttori di uguale diametro, la quartica si spezza in due ellissi uguali, circostanza che si verifica nelle superfici delle volte a crociera e a padiglione (cfr. 4.3.2 e 4.3.3.) Quando le generatrici dei due cilindri definiscono una giacitura diversa da quella orizzontale, la prima traccia di ognuno dei piani ausiliari deve passare per il punto  $S_{2\infty}$ , intersezione con  $\pi_1$  della retta (impropria)  $a_\infty$  che congiunge i vertici (impropri) dei due cilindri: il punto  $S_{2\infty}$  può determinarsi quale direzione della prima traccia di un qualunque piano definito dalle due direzioni dei vertici o, ciò che è lo stesso,

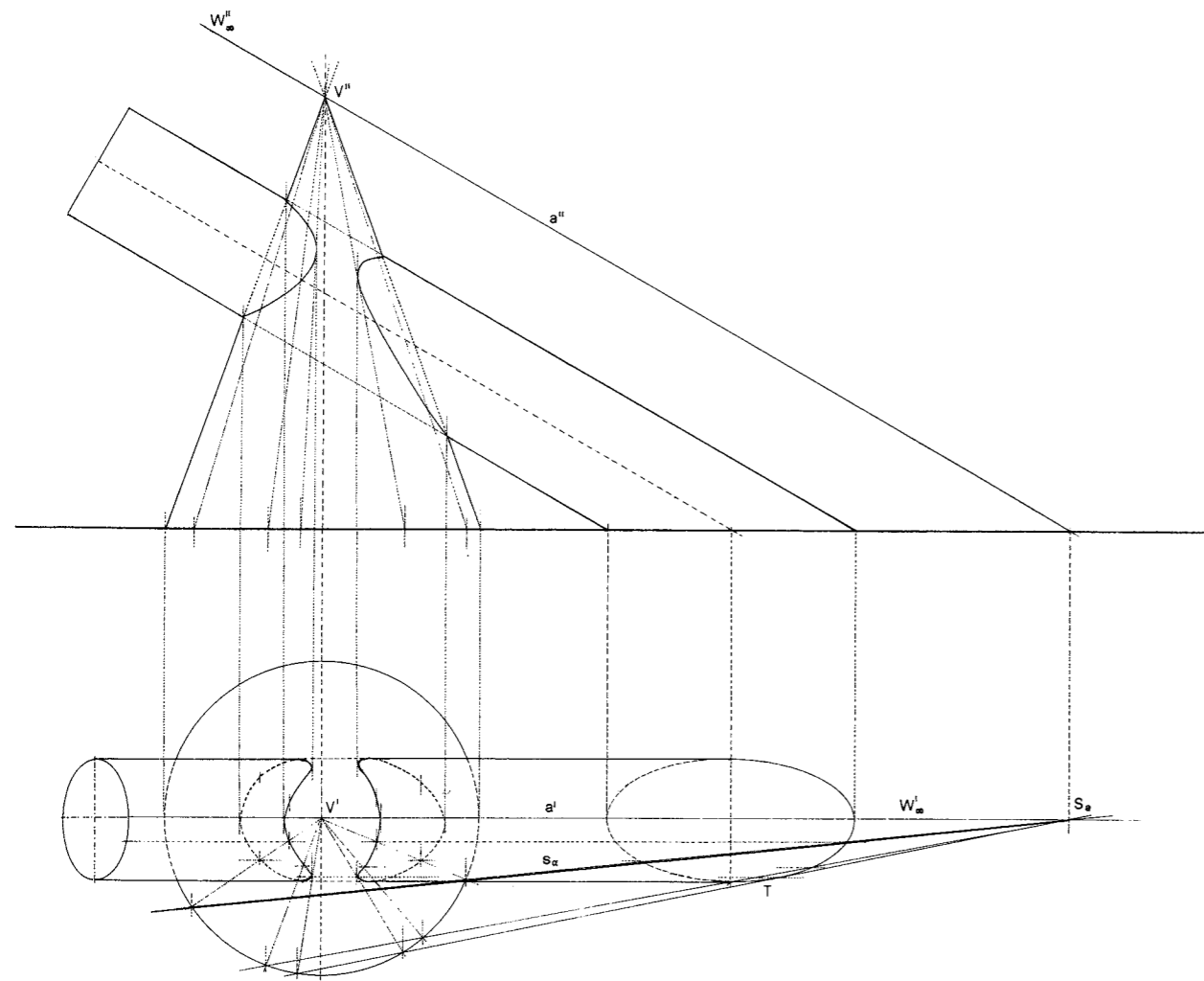


Fig. 84

dalle direzioni delle generatrici dei cilindri: allo scopo, condotte per un qualsiasi punto  $P$  le rette  $p$  e  $q$  rispettivamente parallele alle generatrici dell'uno e dell'altro cilindro, se ne congiungano le prime tracce  $S_p, S_q$  mediante la retta  $s_\alpha$  il cui punto improprio  $S_{2\infty}$  definisce la direzione della prima traccia del piano

ausiliario variabile  $\alpha$ . Anche in questo caso la quartica intersezione può essere costituita da due rami distinti, da un solo ramo con un punto doppio, o da un solo ramo privo di punto doppio, secondo le mutue posizioni delle curve direttrici in  $\pi_1$  dei due cilindri nonché della direzione di  $S_{2\infty}$ .

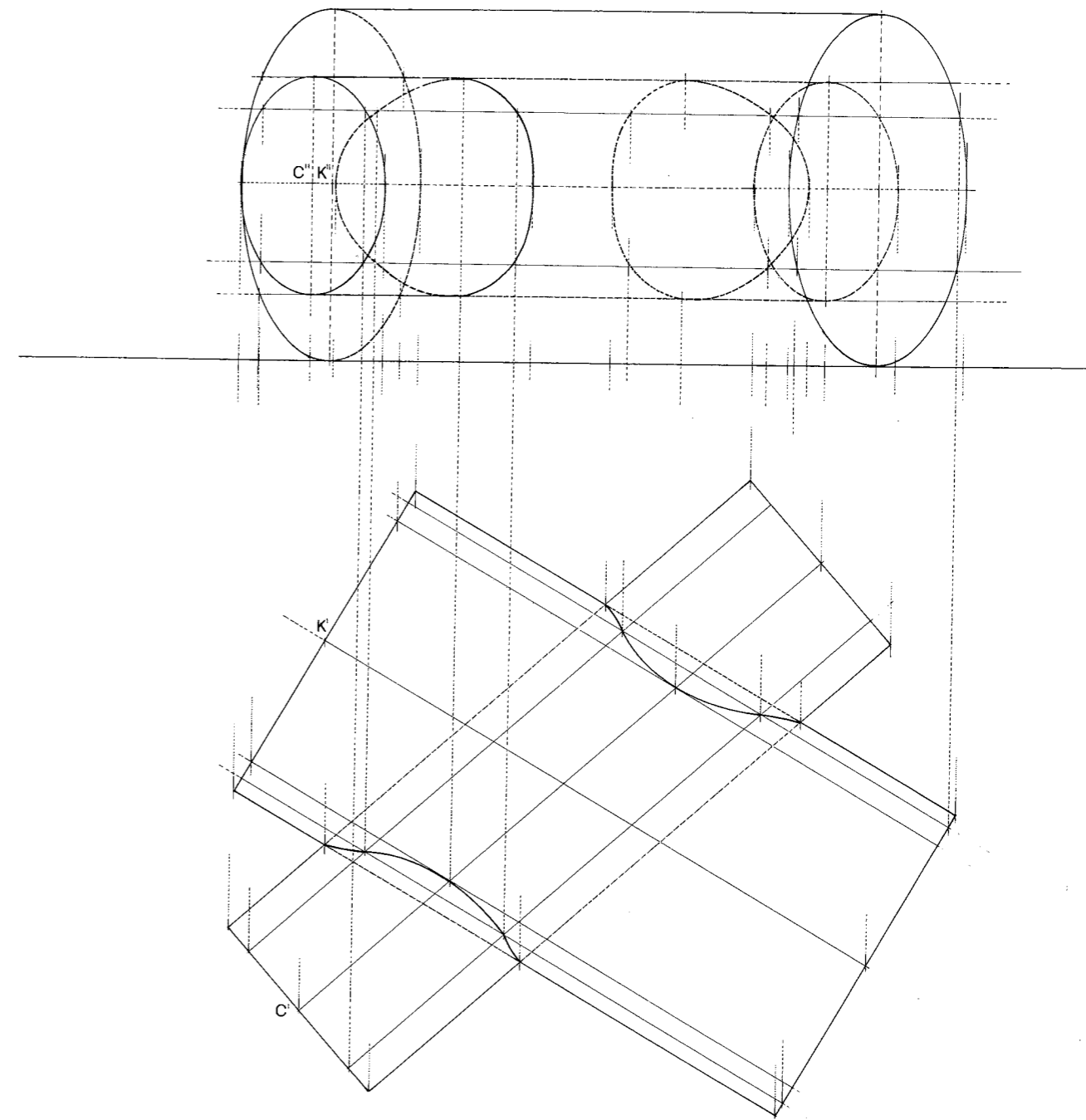


Fig. 85

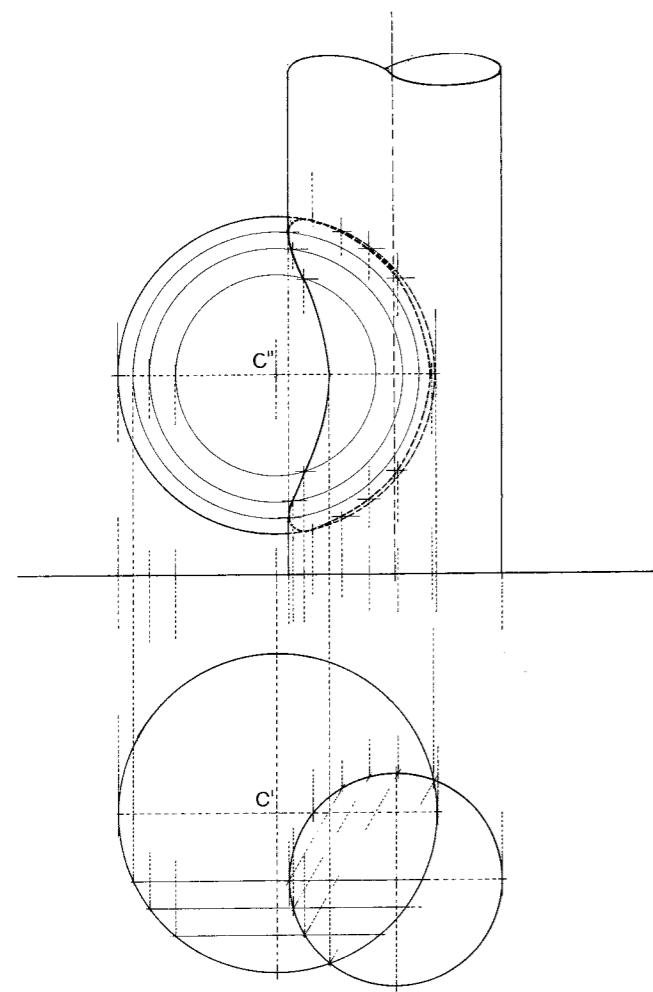


Fig. 86a

5. Se le quadriche non sono specializzate, non sono cioè coni o cilindri, o una sola di esse è tale, per la costruzione della quartica i piani ausiliari vanno scelti caso per caso nel modo più opportuno. Nell'intersezione di un cilindro circolare retto e una sfera, il piano ausiliario variabile passante per una generatrice del cilindro può o meno secare ulteriormente il cilindro secondo un'altra generatrice, e la sfera secondo un cerchio: i quattro (o due) punti comuni di volta in volta alle due generatrici e al cerchio appartengono a ciascun ramo della quartica-sezione (fig. 86a). Se il cilindro ha il diametro uguale al raggio della sfera ed è tangente ad essa internamen-

te, la quartica sezione è una curva (gobba) continua con un punto doppio – quello di contatto tra le due superfici – e prende il nome di *finestra di Viviani*. Per la sua costruzione è opportuno che il piano ausiliario variabile  $\alpha$  sia perpendicolare all'asse del cilindro, poiché in tal caso il piano interseca sia la sfera che il cilindro secondo cerchi i cui punti comuni evidentemente appartengono alla curva. Nella figura 86b le generatrici del cilindro sono perpendicolari al primo piano della rappresentazione mongiana, dunque i piani ausiliari sono orizzontali; la prima proiezione della quartica coincide con il cerchio direttore del cilindro, la seconda è una curva detta *lemniscata di*

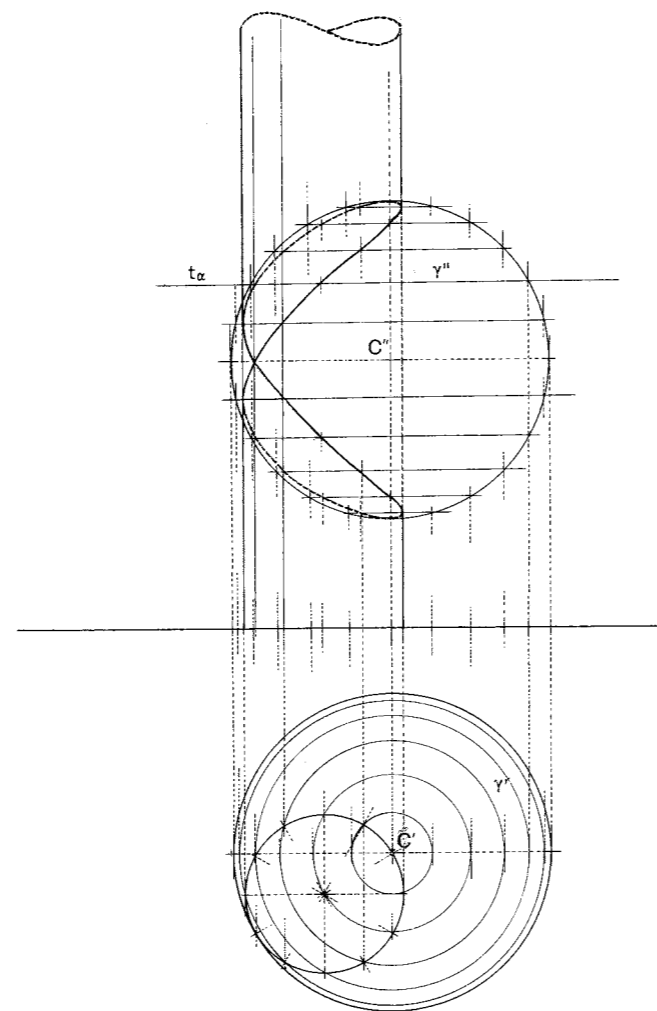


Fig. 86b

*Gerono*. Se l'asse del cilindro passa per il centro della sfera, la quartica intersezione è costituita da due cerchi, in ciascuno dei quali le curve intersezioni del piano  $\alpha$  con il cilindro e con la sfera coincidono.

6. Nel caso di un iperboloide iperbolico e un cilindro, come piano ausiliario variabile si sceglie un piano tangente l'iperboloide, determinato cioè da due rette della superficie (una generatrice e una direttrice);

tale piano interseca il cilindro secondo un'ellisse (che per le reciproche posizioni delle superfici potrebbe anche essere un cerchio): i quattro punti comuni alle due rette dell'iperboloide e alla ellisse, appartengono alla quartica sezione.

7. Se le quadriche sono *entrambe non specializzate*, ma ancora una di esse è *rigata*, la costruzione è analoga alla precedente. La figura 87 propone l'intersezione di un paraboloide e una sfera, con una scelta del riferimento mongiano secondo la quale il quadrilatero sghembo – mediante il quale è assegnato il paraboloide – si proietta in prima proiezione in un quadrato; i piani ausiliari, passanti ciascuno per una direttrice e una generatrice del paraboloide, hanno le prime tracce parallele ai lati del quadrato, e secano la sfera secondo cerchi le cui seconde proiezioni sono ellissi.

Se infine le due quadriche sono *entrambe a punti ellittici*, caso per caso dovrà scegliersi il piano ausiliario più opportuno e determinarne le coniche sezionali con l'una e con l'altra superficie (cfr. 3.3.8.): i quattro punti (al massimo) comuni a ciascuna coppia di tali coniche per ogni posizione del piano ausiliario appartengono alla quartica intersezione richiesta.

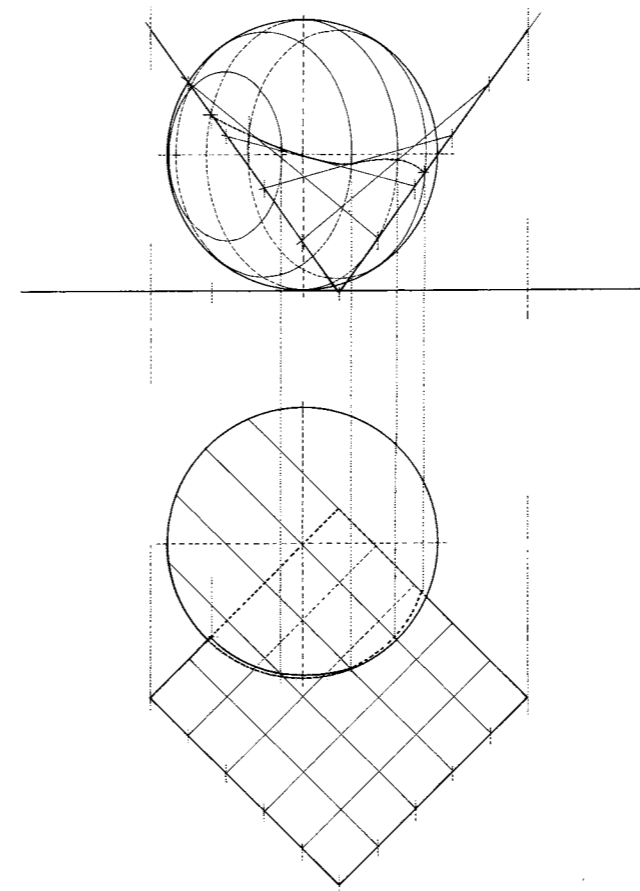


Fig. 87

## 4 Gli archi e le volte

### 4.1 Definizioni e genesi

1. L'intradosso delle coperture a volta è costituito generalmente da superfici rigate (3.4.1.) – sviluppabili o non –, o di rotazione, oppure elicoidali, queste ultime generate dal moto di una curva lungo un'elica (cfr. 3.5.3.). Le volte, la cui superficie è una rigata non sviluppabile (cfr. 3.4.3.) – presenti in talune strutture murarie del passato come la volta a sbieco (cfr. 3.4.8.) – sono riservate anche oggi a casi eccezionali, come padiglioni fieristici (ad esempio quello della Philips di Le Corbusier), o come le moderne volte leggere adottate per la copertura di ampi spazi, trattandosi prevalentemente di paraboloidi iperbolici. Ci occuperemo ora di quelle volte che sono più frequenti nell'architettura classica.

Come accennato, la volta a struttura più semplice è quella *cilindrica* comunemente detta *volta a botte*, e viene adottata per la copertura di ambienti a pianta rettangolare; ma anche l'intradosso degli *archi* è una superficie cilindrica: nel caso dell'*arco a tutto sesto*, detto anche *a pieno centro*, si tratta di un semicilindro circolare retto a generatrici generalmente orizzontali, che taglia lo spessore del muro in cui si apre l'arco.

## 4.2 Gli archi

1. La curva direttrice del semicilindro, cioè il profilo dell'arco, oltre che *semicircolare* può essere di natura diversa, può trattarsi cioè di una *semiellisse* (fig. 88 a); di un arco a più centri, generalmente *a tre centri* (fig. 88b); un arco il cui profilo è costituito da due archi di cerchio che formano una cuspide – arco *ogivale* (fig. 88 c); un arco minore di un semicerchio – arco *ribassato* – (fig. 88d); e ancora un arco *rampante*, il cui piano d'imposta è obliquo (fig. 89); infine archi dal profilo più complesso, come quelli propri dell'architettura araba.

Il profilo dell'*arco a tre centri* è costituito da tre curve mutuamente tangenti, e precisamente da tre segmenti circolari di cui i due laterali hanno i centri  $C_1$ ,  $C_2$  sulla retta d'imposta e il raggio assai minore rispetto a quello intermedio, il cui centro si colloca al di sotto della stessa linea, in un punto dell'asse verticale. Per costruire la curva, nota la luce dell'arco e tracciati i due cerchi laterali con i centri  $C_1$  e  $C_2$  e il raggio assegnato  $r_1$ , dal punto  $H$  scelto (oppure noto) come chiave dell'arco, si stacchi verso il basso il segmento verticale  $HK = r_1$  e si congiunga  $K$  con il punto  $C_1$  (o  $C_2$ ) (cfr. fig. 88b): l'asse del segmento  $C_1K$  ( $C_2K$ ) interseca la retta  $HK$  nel punto  $C$ , centro del cerchio maggiore di raggio  $r = CH$ , cerchio che, in virtù della costruzione effettuata, risulta tangente ai due cerchi minori; il punto di contatto tra il cerchio maggiore e ciascuno dei due minori appartiene alla retta  $CC_1$  ( $CC_2$ ) che contiene sia il raggio  $r$  che  $r_1$ : i cerchi risultano tangenti in quel punto poiché in esso ammettono la stessa tangente, a sua volta perpendicolare al raggio dei due cerchi.

Meno frequente dell'arco a tre centri, l'*arco ellittico* ha come profilo una semiellisse che, noti l'asse maggiore (luce dell'arco) e il semi-asse minore (freccia), si può costruire (cfr. fig. 88a) come descritto ad esempio in 2.2.5.1.c.

Frequente nell'architettura medioevale, il profilo dell'*arco ogivale* è costituito da due archi di cerchio, il centro di ciascuno dei quali è sulla linea d'imposta  $AB$ , più vicino a (o coincidente con) un estremo del segmento  $AB$ , e il raggio di lunghezza uguale alla residua parte di  $AB$  (o uguale ad  $AB$ ) (cfr. fig. 88c).

La struttura portante di alcune scale è costituita da un *arco rampante*, il cui profilo, detto *a collo d'oca* è generalmente un arco a tre centri, i cui segmenti di cerchio laterali hanno raggi diversi, essendo maggiore il raggio del cerchio più basso (cfr. fig. 89).

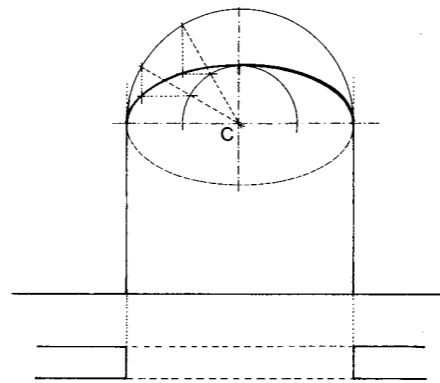


Fig. 88a

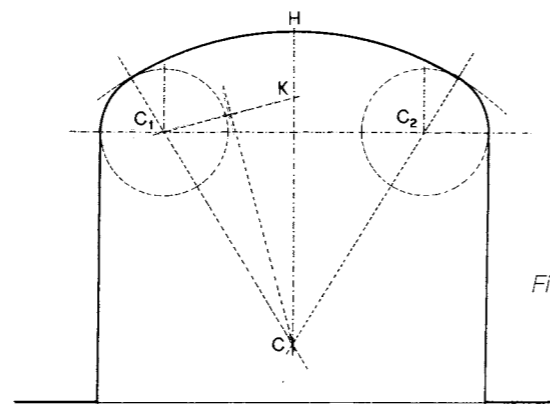


Fig. 88b

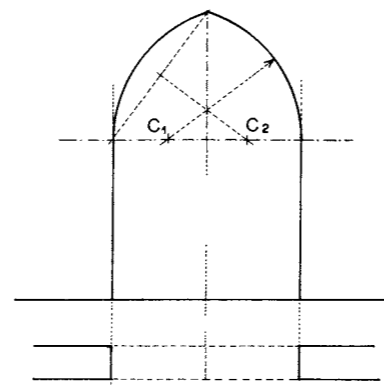


Fig. 88c

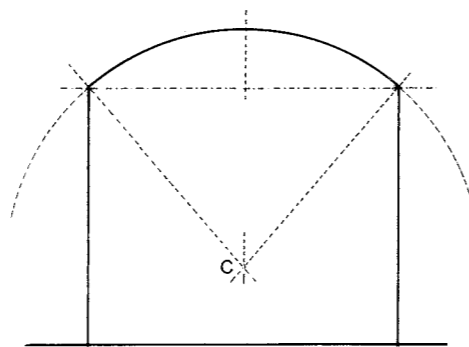


Fig. 88d

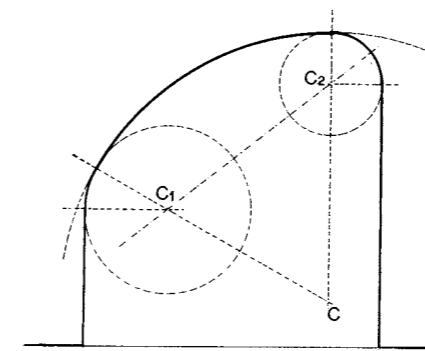


Fig. 89

L'*assonometria cavaliera* di un arco a tutto sesto è ancora un semicerchio uguale al dato, se il suo piano è parallelo al piano coordinato  $xz$  e dunque al quadro. Se invece il piano della parete muraria in cui si apre l'arco è inclinato rispetto al coordinato  $xz$ , nella *rappresentazione mongiana* la semiellisse-immagine si può costruire mediante il ribaltato di una sola metà del semicerchio, sufficiente alla determinazione dei punti (e delle tangenti) necessari per il tracciamento della curva (fig. 90). Trasformata la prima proiezione mongiana nella prima proiezione as-

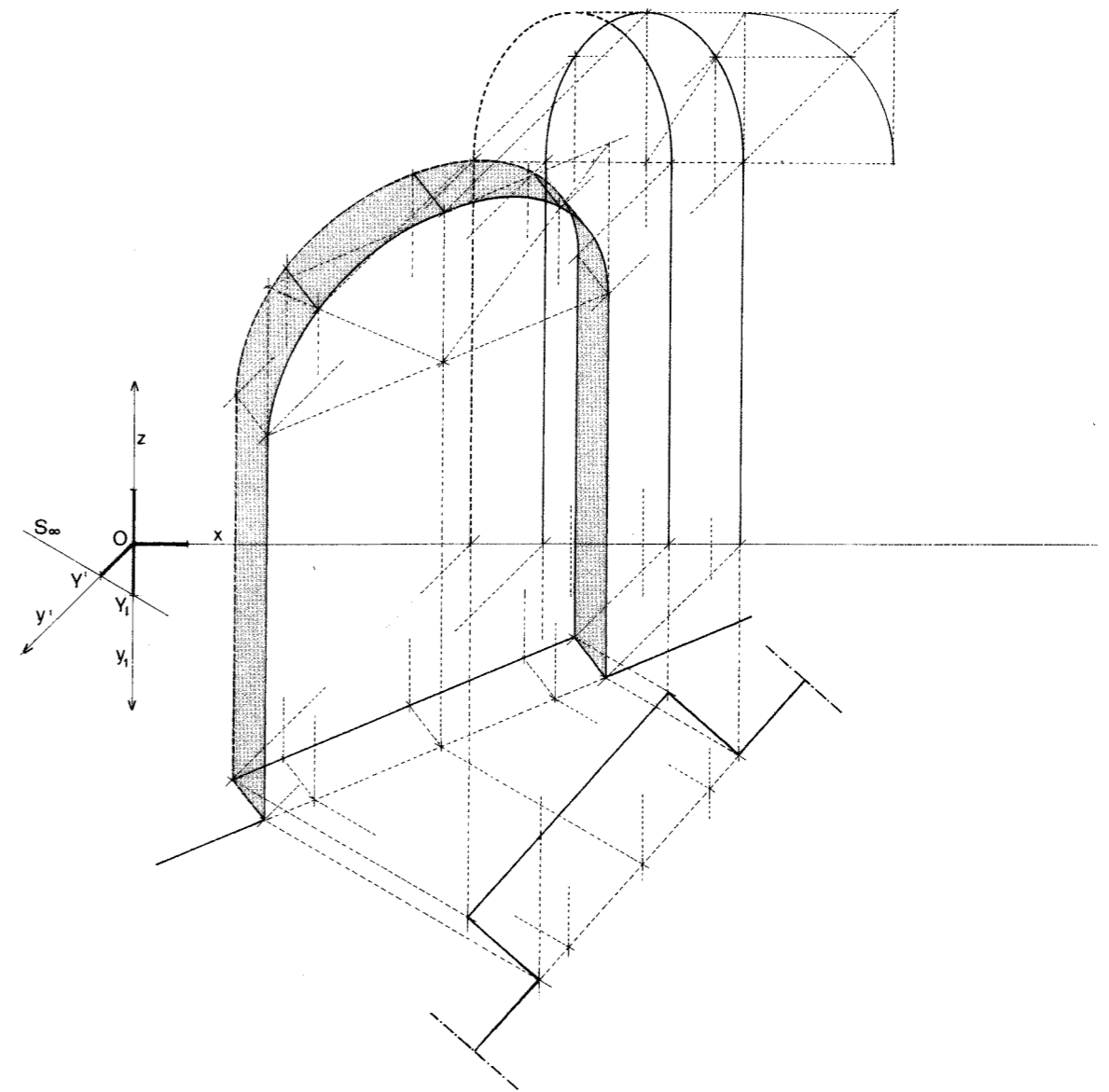


Fig. 90

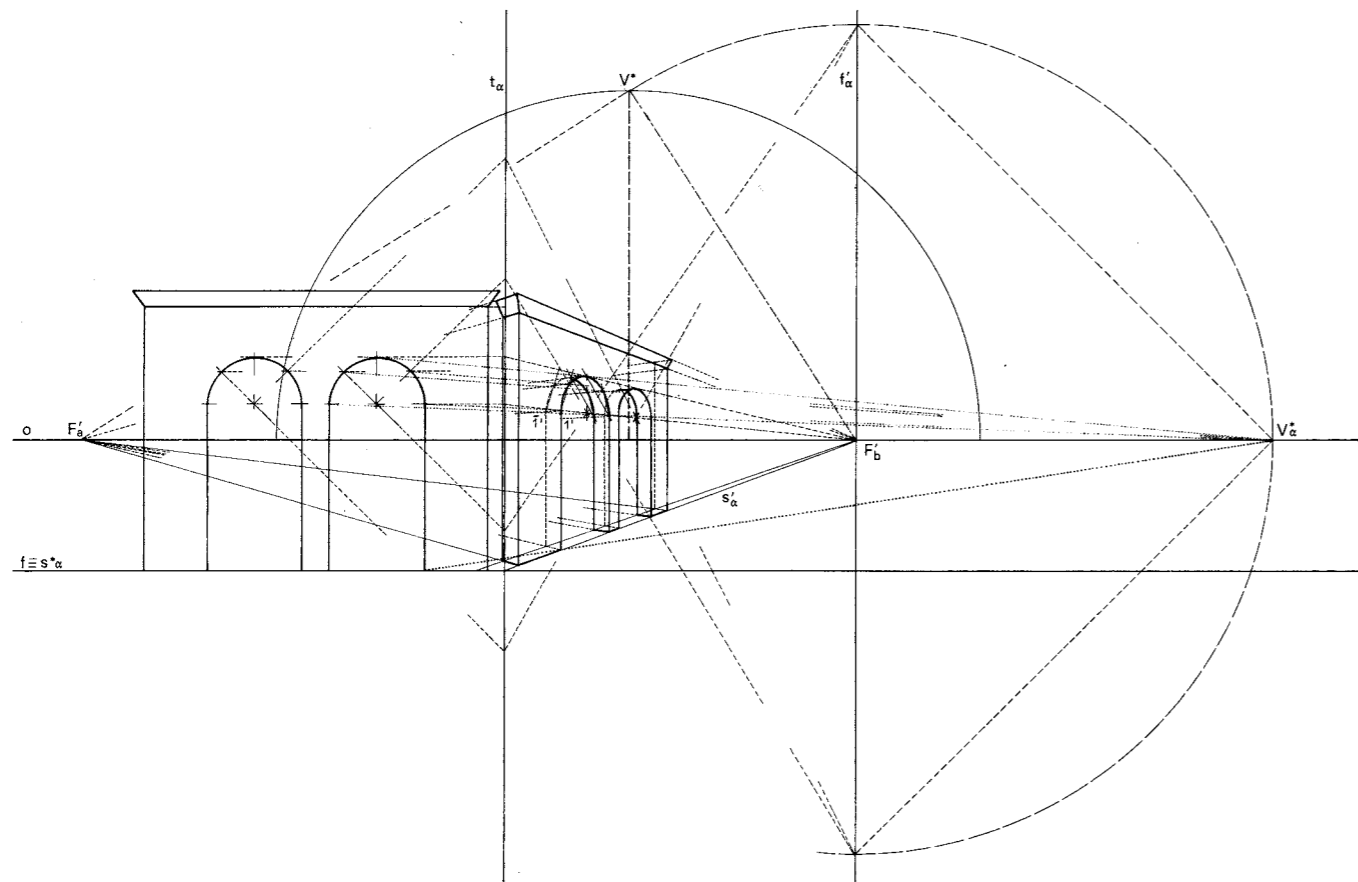


Fig. 91

sonometrica, come di consueto si stacchino le altezze dei punti notevoli dei due profili dell'arco, esterno e interno, sulle semirette verticali condotte per i corrispondenti punti della pianta assonometrica.

Anche per la *rappresentazione prospettica*, sia nel caso di archi a tutto sesto che ad altri profili, è opportuno operare il ribaltamento del piano della facciata cui gli archi appartengono, ad es. il piano  $\alpha \equiv (t_\alpha, f'_\alpha)$  della figura 91, e disegnare gli archi in vera forma. Se l'arco è a tutto sesto, l'immagine è una semiellisse obliqua, cioè tagliata lungo un diametro non asse, che corrisponde al diametro di imposta dell'arco obiettivo; nell'immagine, l'intradosso dell'arco è limitato posteriormente da un'altra semiellisse (in parte nascosta), corrispondente della pri-

ma nell'omotetia di centro  $F'_a$  (punto di fuga delle generatrici della superficie cilindrica dell'arco), i cui punti corrispondenti sono gli estremi di un segmento-generatrice, relativi allo spessore murario.

#### 4.3 Volte cilindriche

1. *La volta a botte*. Come abbiamo visto, la *volta a botte* è la più semplice volta *cilindrica*, essendo anche la più usata per la sua ampia versatilità, e copre generalmente spazi a pianta rettangolare, come grandi sale o gallerie oppure rampanti di scale. E ancora, secondo che le generatrici siano normali o non rispetto al piano della direttrice – che può essere una curva di vario tipo –, la volta è detta *retta* o

rispettivamente *obliqua*; se le generatrici non sono orizzontali, come nelle coperture di scale, la volta è detta *inclinata*: in questo caso, come nella volta obliqua, la curva direttrice appartiene a un piano non ortogonale alle generatrici, e dunque la sua superficie non è un cilindro retto.

La *rappresentazione mongiana* della più semplice *volta semicilindrica* è costituita in prima proiezione da un rettangolo coincidente con il perimetro dell'ambiente da coprire, e, in accordo con la disposizione della pianta rispetto alla linea di terra, la seconda proiezione coincide con l'arco-direttore, oppure con un altro rettangolo di lunghezza uguale al primo e di altezza uguale alla freccia dell'arco. La corrispondente *rappresentazione assonometrica*, oltre che dal parallelogrammo, trasformato del rettangolo

d'imposta e prima proiezione assonometrica, è costituita nel primo caso dai semicerchi (o altre curve direttrici) anteriore e posteriore, ottenuti da due traslazioni nella direzione dell'asse  $y'$  dell'arco mongiano, nonché dalla generatrice a questi tangente, ancora parallela a  $y'$ . Se i due archi (circolari) appartengono a piani ortogonali al quadro, si deformano in semiellissi oblique, la cui costruzione si esegue operando il ribaltamento del piano cui appartiene ciascun arco, di cui è sufficiente tracciare in vera forma una sola metà (fig. 92).

La *costruzione prospettica* della volta a botte è analoga a quella dell'arco a tutto sesto. Il contorno apparente della volta, supposta priva di spessore, è completato dalla generatrice tangente alle due semiellissi che la delimitano, condotta dal punto di

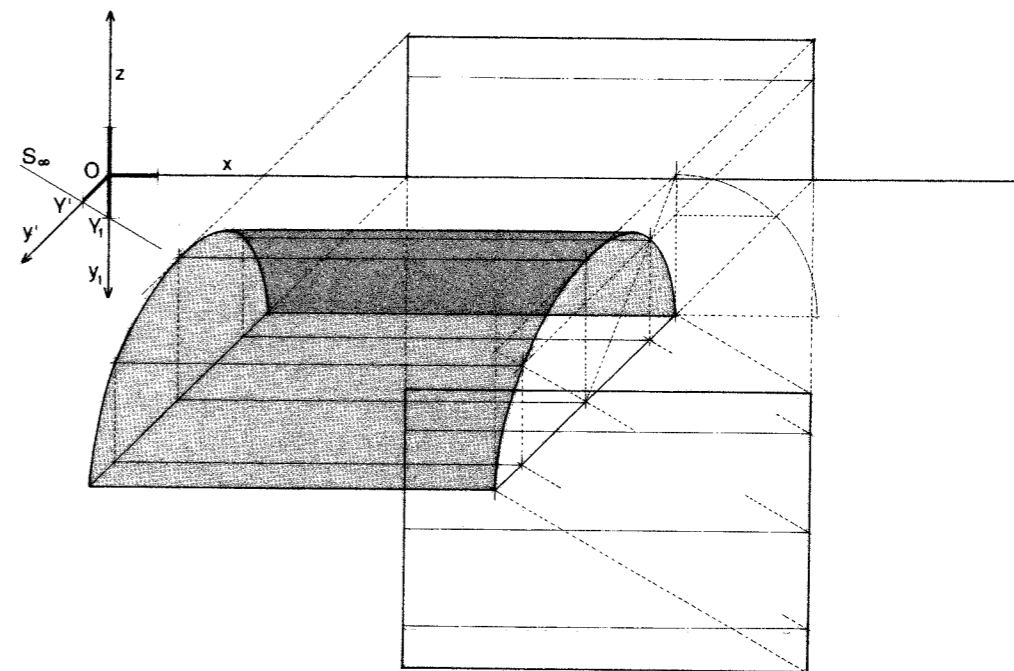


Fig. 92

fuga delle generatrici del semicilindro intradosso (fig. 93).

La *volta a botte inclinata* ha generalmente la funzione di copertura e di struttura portante di rampanti di scale: l'inclinazione delle generatrici del semicilindro è l'inclinazione stessa della scala, mentre la curva direttrice, semicircolare o di altro profilo, appartiene a un piano verticale.

La figura 94 rappresenta in *assonometria cavaliere* la superficie di una volta a botte inclinata, data come di consueto nelle proiezioni mongiane: la prima delle semiellissi, immagini dei corrispondenti archi circolari, si può costruire mediante il ribaltamento del relativo arco, limitato a una sola metà. Il secondo e il terzo arco si possono costruire per successive traslazioni di punti corrispondenti.

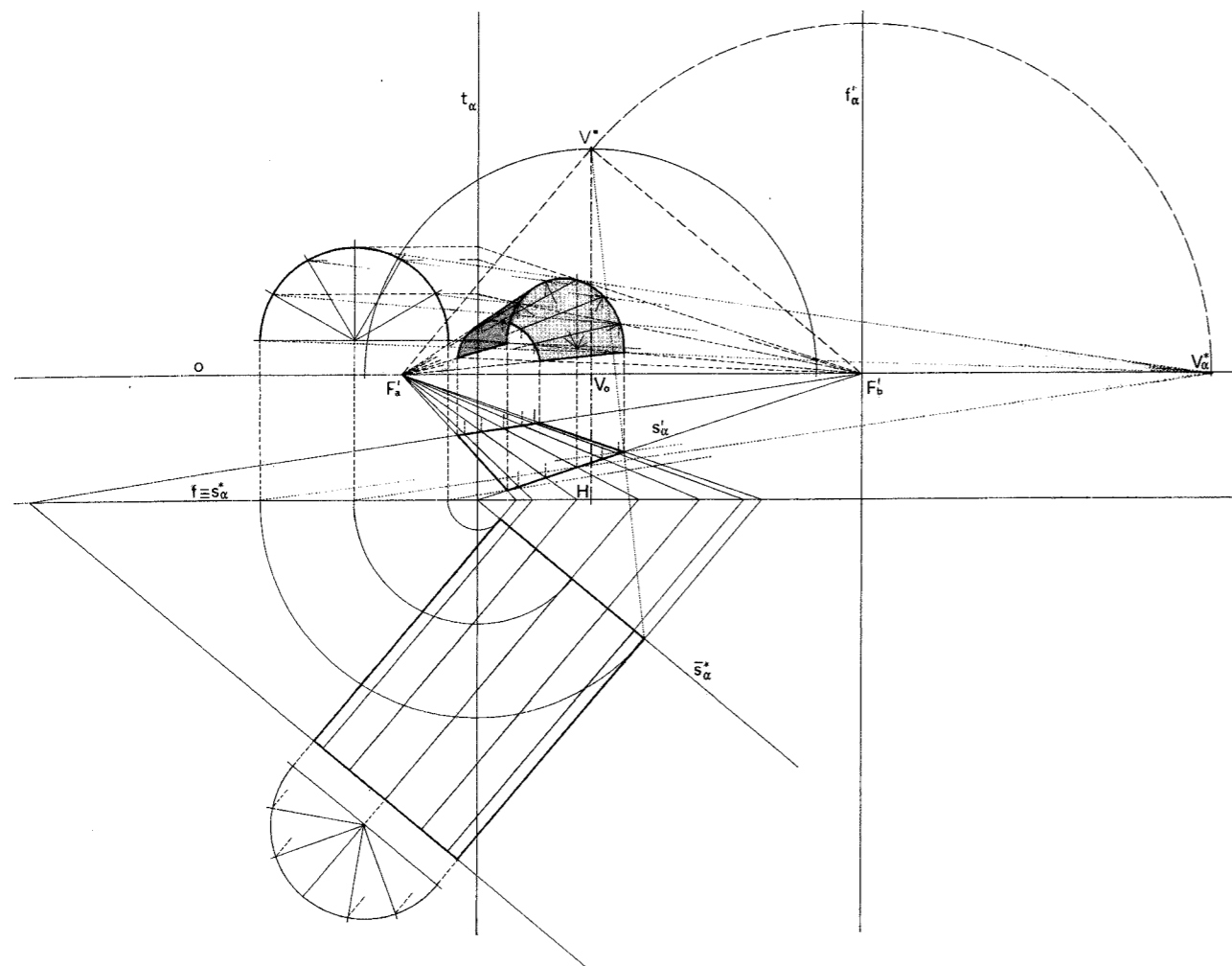


Fig. 93

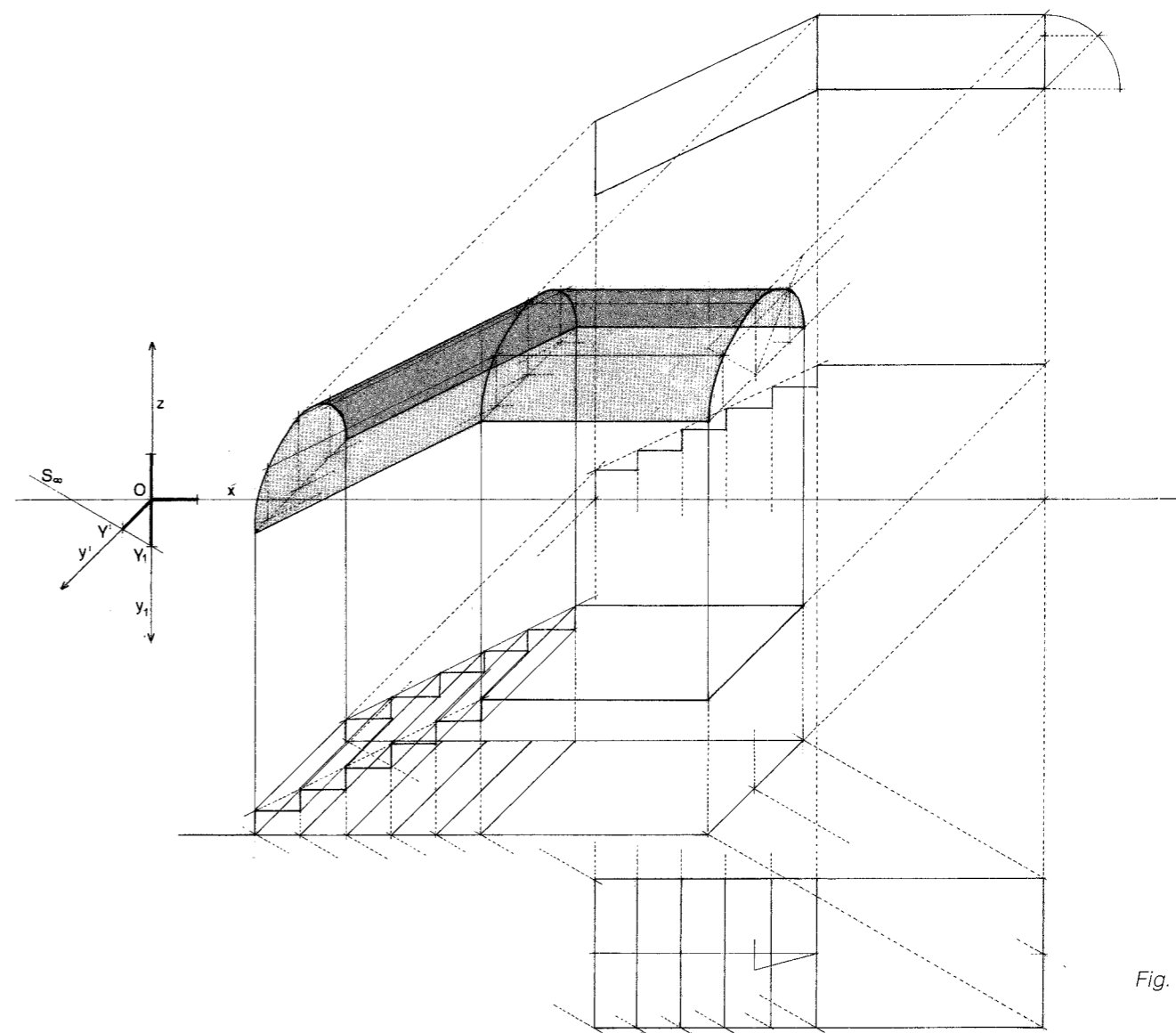


Fig. 94

2. Presentano una certa analogia con la volta a botte le *volte anulari* (la cui superficie è quella del *toro*), adottate per la copertura di gallerie ad anello, e le *volte elicoidali* (la cui superficie è una *vite di Saint Gilles*, cfr. 3.5.3.) per la copertura di quelle scale dette appunto elicoidali: in entrambi i casi non si tratta evidentemente di volte cilindriche poiché le generatrici, rettilinee nel cilindro, sono sostituite nel primo caso da cerchi orizzontali – i paralleli del toro –, nel secondo da eliche cilindriche.

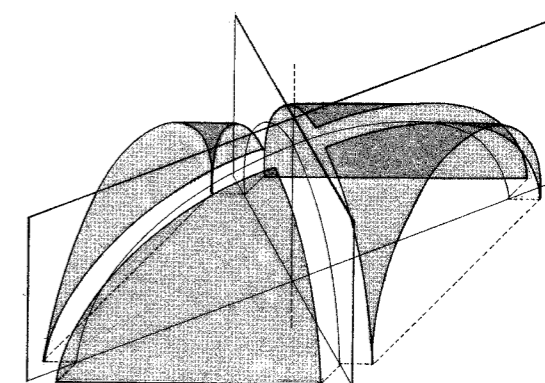


Fig. 95

Sono invece ancora cilindriche la *volta a crociera* e la *volta a padiglione* le cui superfici, generate dall'intersezione di due semicilindri, coprono generalmente spazi a pianta quadrata: nel caso della *volta a crociera*, che poggia generalmente su quattro pilastri o colonne, l'ambiente può essere totalmente o parzialmente aperto, oppure chiuso sui quattro lati; nel caso della *volta a padiglione*, che poggia su quattro pareti murarie, l'ambiente è chiuso su tutti i lati. In entrambi i casi i due (semi) cilindri hanno gli assi ortogonali, le curve direttrici e le lunghezze uguali, e dunque la *quarta*-intersezione si spezza in due (semi) ellissi uguali contenute nei piani verticali diagonali (cfr. 3.7.4): tali curve, caratteristiche di questi tipi di coperture, le qualificano anche dal punto di vista figurativo.

La differenza sia formale che strutturale tra i due tipi di volte è legata ai settori cilindrici presenti nell'una e nell'altra: osserviamo in proposito che, operate in un semicilindro a generatrici orizzontali, le sezioni con due piani verticali diagonali, questi lo dividono in quattro settori due a due uguali: quelli che comprendono i due archi sono denominati *unghie*, gli altri due *fusi*; i primi hanno le generatrici ortogonali al relativo lato del quadrato d'imposta, i secondi parallele (fig. 95). Ora, nella realizzazione della struttura muraria di una volta, ciascuno dei due semicilindri che ne costituiscono la superficie conserva solo due di tali settori: secondo che si tratti delle unghie o dei fusi, la copertura è una *volta a crociera* o una *volta a padiglione*.

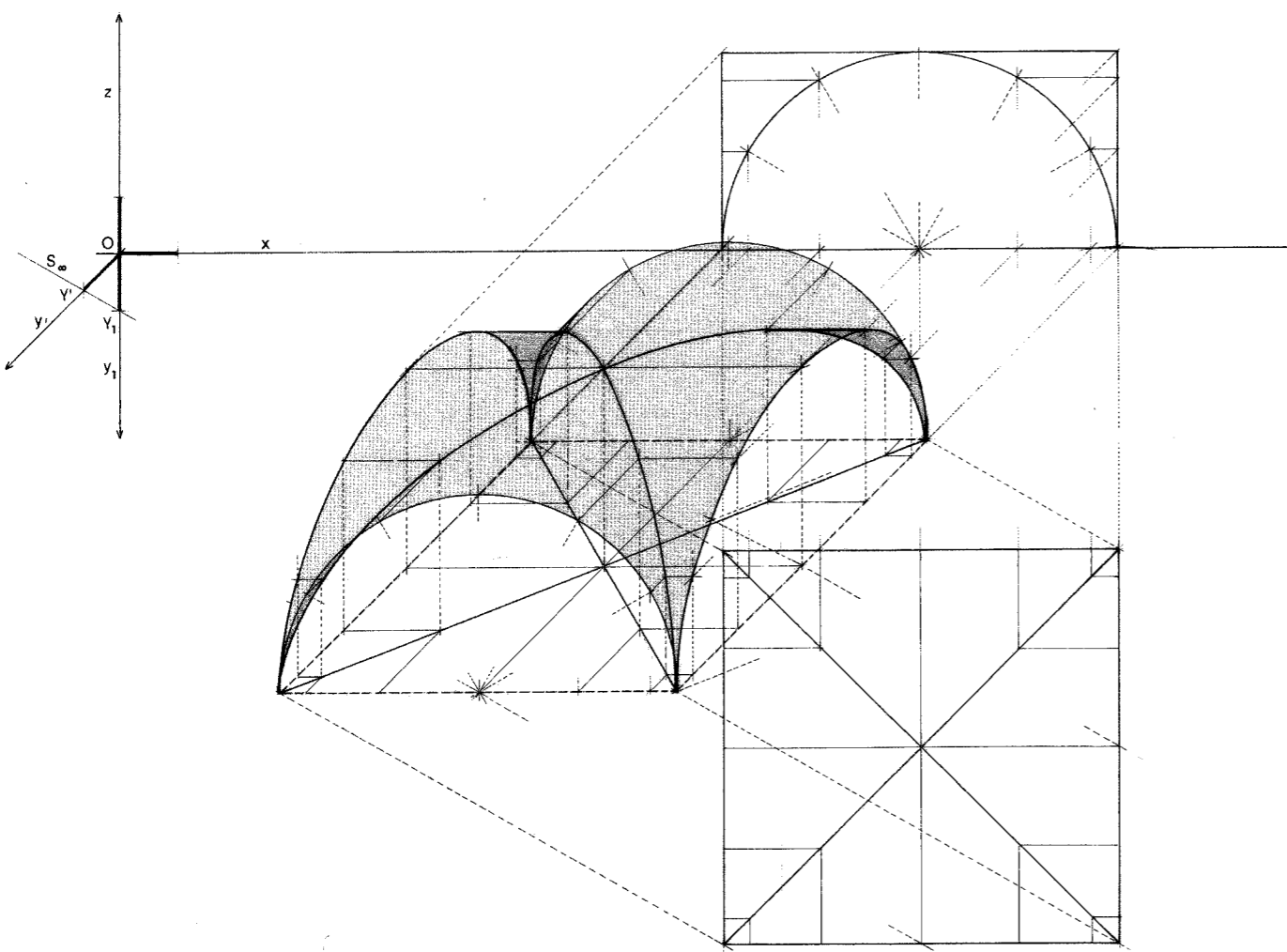


Fig. 96

3. La *rappresentazione mongiana* della *volta a crociera* è costituita in prima proiezione dal quadrato d'imposta e dalle due diagonali (le generatrici sono ortogonali ai lati del quadrato), in seconda proiezione da tre lati del rettangolo, che rappresenta il semicilindro con le generatrici parallele alla linea di terra, e dall'arco in vera forma che rappresenta l'altro semicilindro: la superficie della volta è quella compresa tra queste due figure (fig. 96).

La *costruzione dell'assonometria cavaliera* si esegue mediante i consueti procedimenti grafici: l'immagine della volta è costituita dai due archi semicircolari paralleli al quadro, dalle due semiellissi, immagini degli archi laterali, e dalla rappresentazione delle semiellissi diagonali (cfr. fig. 96). Per il tracciamento di queste curve si adotta il procedimento consueto, trasfor-

mando i punti del semicerchio direttore mediante rette parallele all'asse  $y'$  nei corrispondenti punti delle due semiellissi laterali e delle due diagonali. Completano la rappresentazione della volta i segmenti di rette (generatrici) tangenti alle curve e paralleli rispettivamente all'asse  $x$  e all'asse  $y'$ .

Nella *prospettiva accidentale* – cioè con il quadro non parallelo al piano di alcuno degli archi –, come nell'*assonometria isometrica*, tutti i quattro archi che delimitano la volta, nonché i due archi diagonali, si trasformano in altrettante semiellissi oblique: le relative costruzioni sono analoghe alle precedenti, ricordando tuttavia che tutte le rette, che sono parallele nello spazio e che nell'immagine assonometrica si mantengono parallele, nella prospettiva concorrono nei rispettivi punti di fuga, mentre le misure lineari

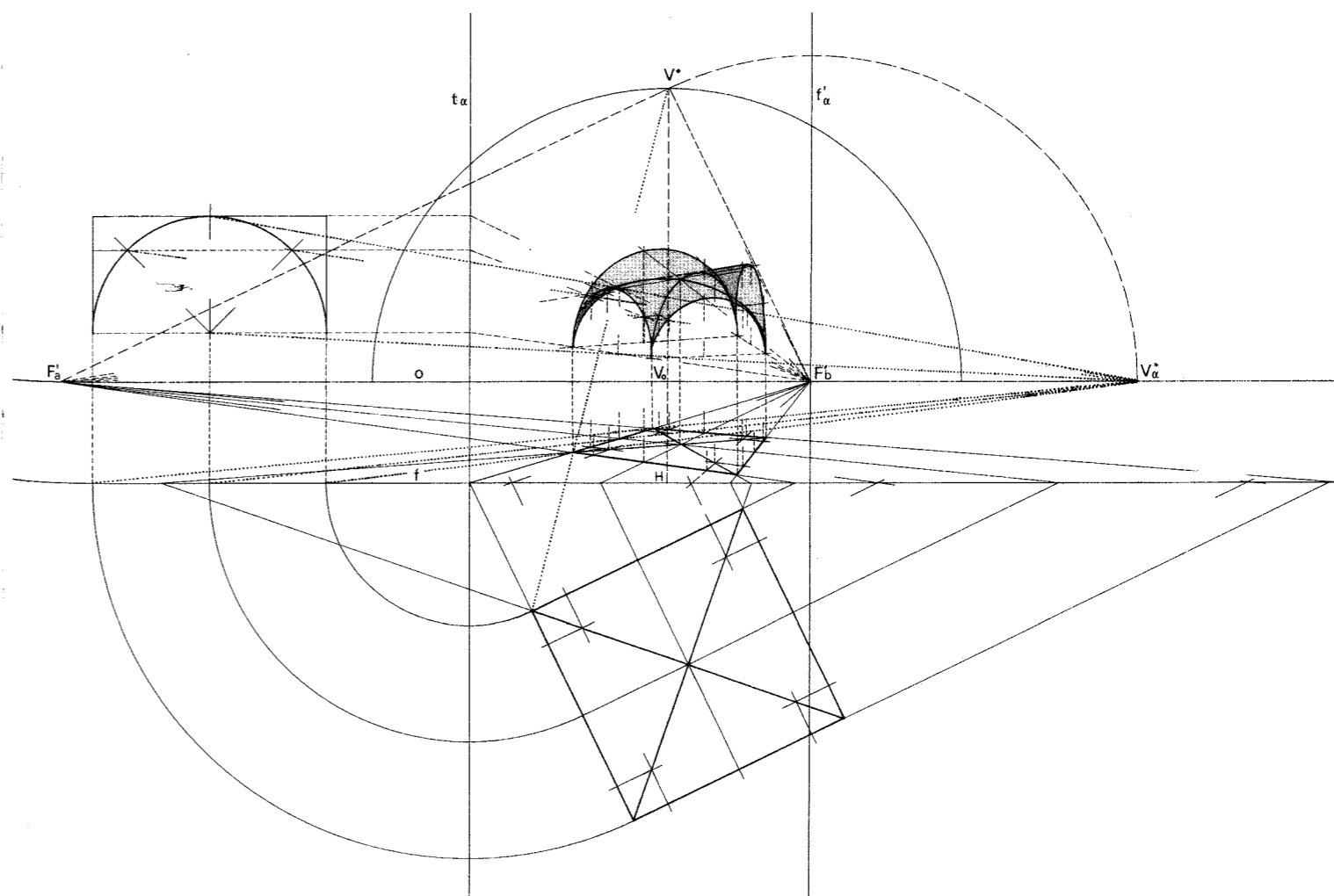


Fig. 97

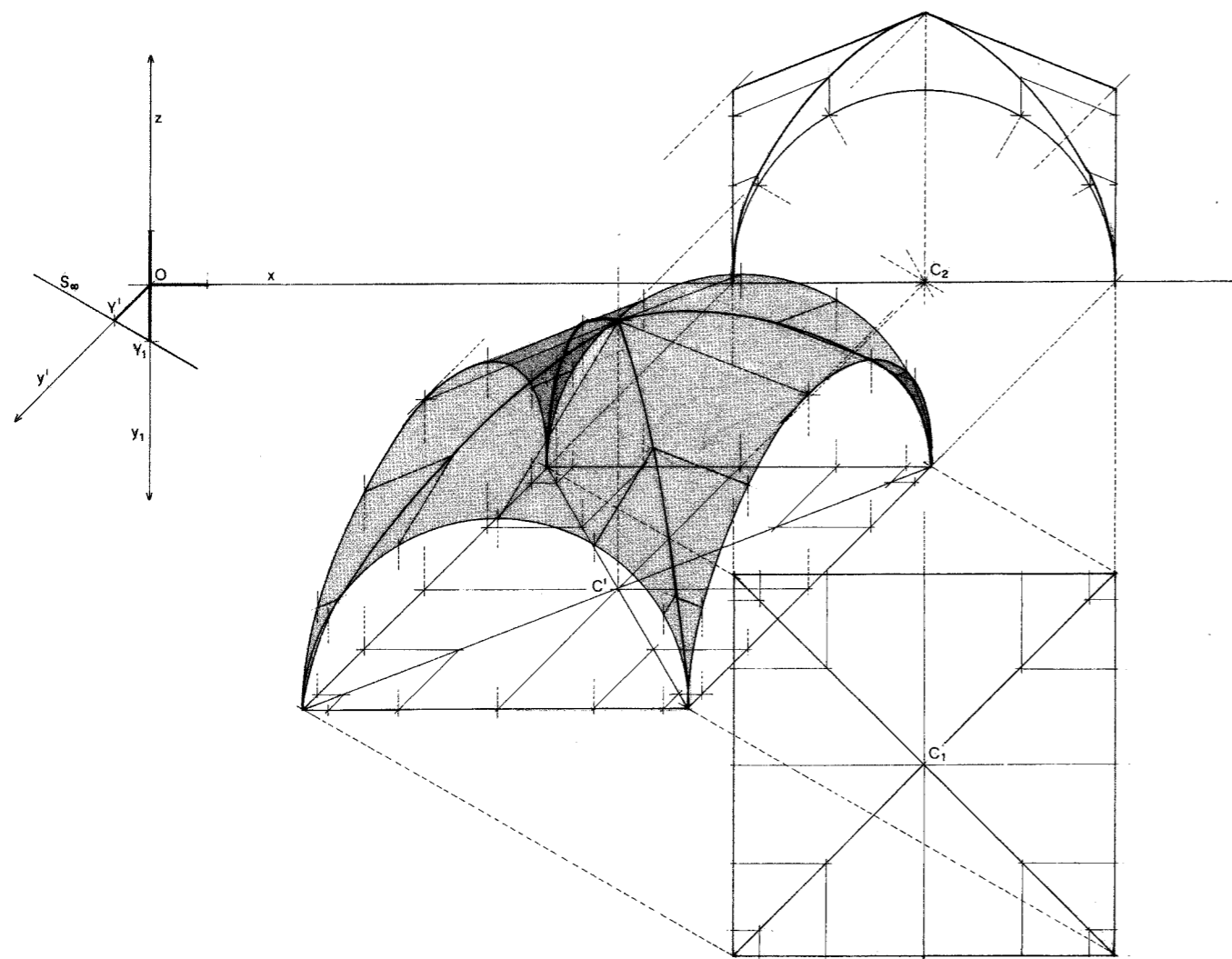


Fig. 98

subiscono i dovuti accorciamenti (fig. 97). Mediante il trasporto dei punti di un primo arco ellittico, costruito come trasformato del corrispondente arco semicircolare, sui piani degli altri archi, laterali e diagonali, si determinano le immagini ellittiche di questi ultimi. Nel caso di archi ribassati o rialzati o ad altri profili, si adotta comunque lo stesso procedimento. Se la volta a crociera copre un ambiente a pianta rettangolare, i profili dei due archi sui lati maggiori,

avendo la freccia uguale a quella degli archi a tutto sesto dei lati più brevi, ma luce maggiore, sono anche nella realtà due semiellissi.

Frequenti sono le *volte a crociera rialzata*, le cui unghie cilindriche hanno le generatrici inclinate verso l'alto (fig. 98); e sono ancora volte a crociera, generalmente rialzata, le numerose *volte a nervature semplici*, oppure *stellate* o *reticolate*, presenti nelle basiliche romaniche e gotiche.

4. La superficie della *volta a padiglione* che, in prima proiezione mongiana appare del tutto analoga alla volta a crociera – a meno della direzione delle generatrici, in questo caso parallele ai lati del quadrato –, in seconda proiezione è rappresentata dal solo arco-direttore di uno dei cilindri, in cui coincidono anche le seconde proiezioni delle semiellissi diagonali. La volta a padiglione è rappresentata in *assonometria* dalle sole semiellissi diagonali e dalle rette (generatrici) ad esse tangenti e parallele rispettivamente

all'asse  $x$  e all'asse  $y'$  (fig. 99); le due semiellissi si costruiscono trasportando, come nel caso precedente, i punti del cerchio direttore nei punti di ugual quota, aventi la prima proiezione sulle diagonali del parallelogrammo-immagine del quadrato d'imposta. Derivata da quella a padiglione è la *volta a specchio* o *a schifo*, caratterizzata da una specchiatura – rettangolare o quadrata, in accordo con le dimensioni di pianta –, prodotta come intersezione della volta a padiglione con un piano orizzontale.

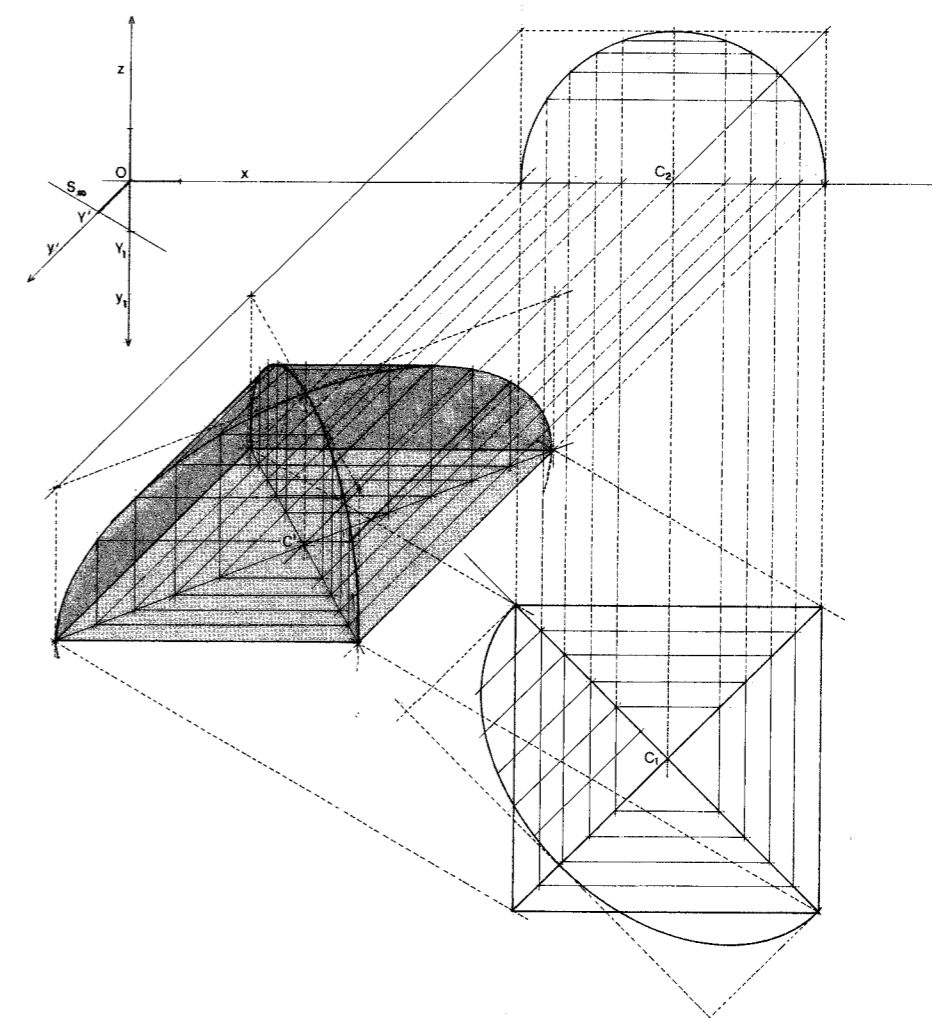


Fig. 99

Sono ancora volte a padiglione quelle che coprono ambienti a pianta poligonale, generalmente *ottagonale* (fig. 100), e se l'ambiente è di grandi dimensioni la volta assume il carattere di *cupola* (come è il caso della basilica di S. Maria del Fiore in Firenze): la curva direttrice di ciascuno degli otto fusi può essere un arco di cerchio di grande raggio con il centro nel piano d'imposta, o un arco di ellisse, perché tali scelte conferiscono alla cupola una maggiore altezza.

#### 4.4 Volte lunettate

1. È frequente l'adozione, per la copertura di grandi ambienti, di *volte a botte con testate a padiglione*; oppure, come nel caso della navata centrale e la zona sacra di numerose basiliche, la presenza di *volte lunettate*: quando infatti si debbano aprire finestre al livello della volta è necessario raccordare la superficie piana dell'infisso con la superficie curva

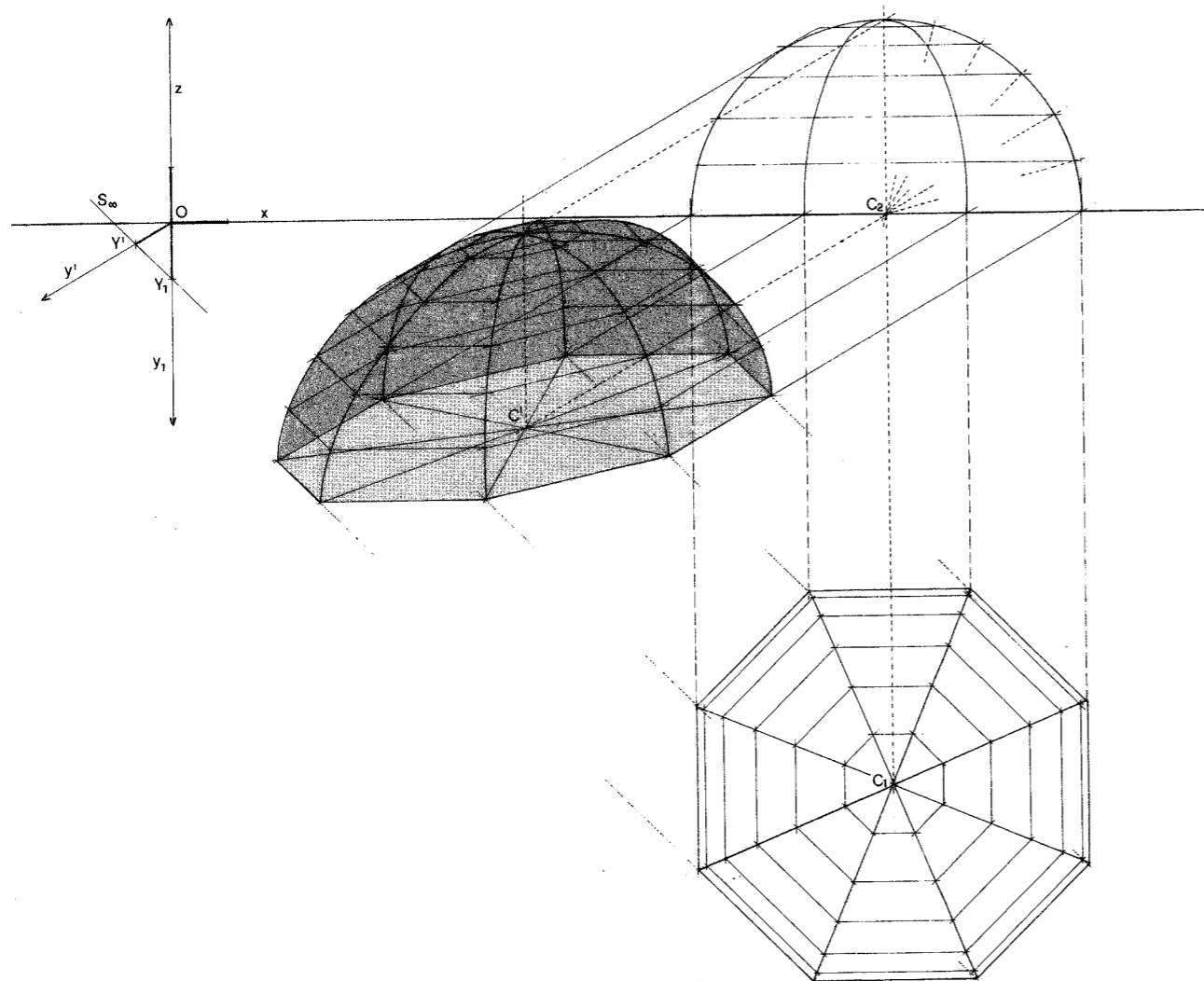


Fig. 100

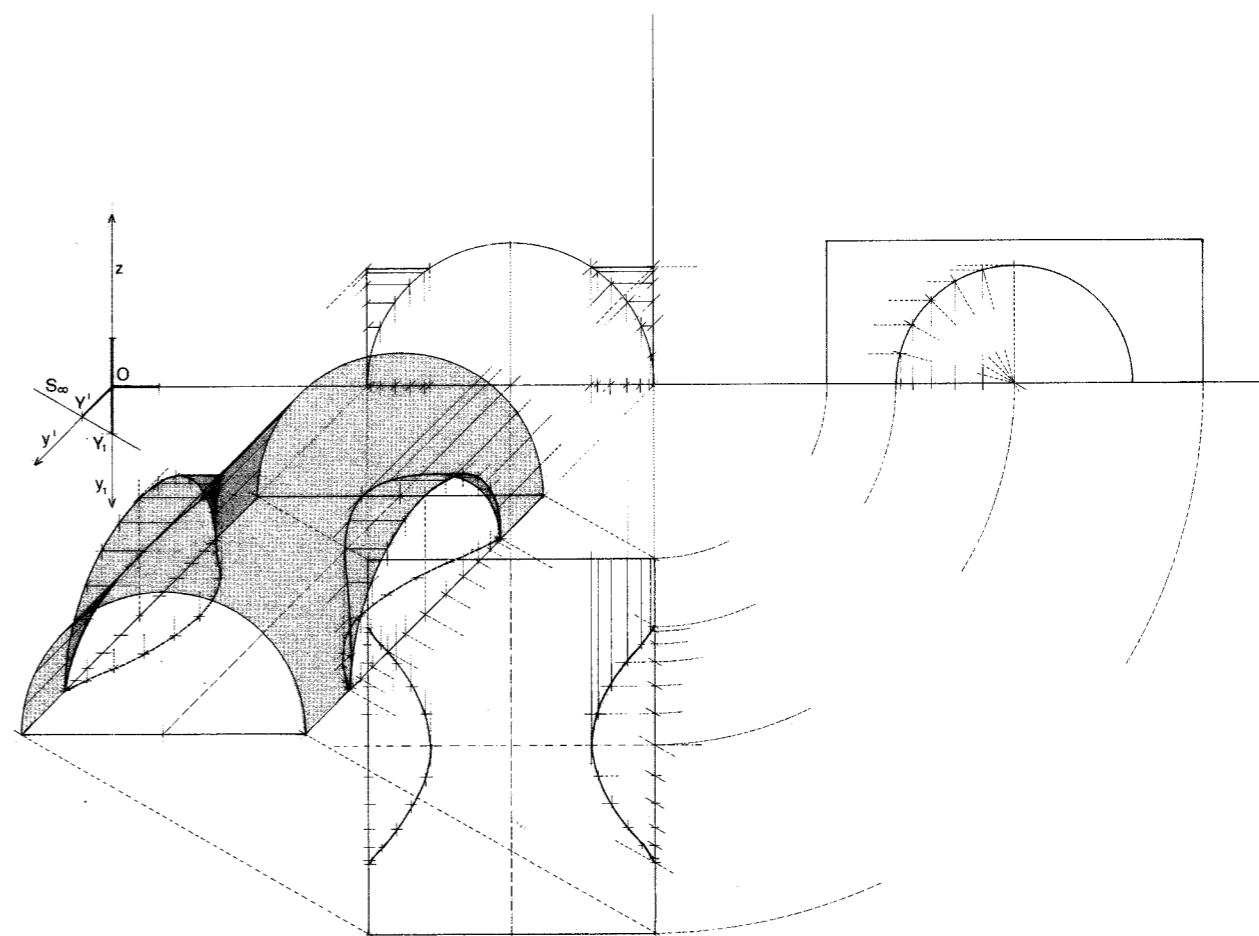


Fig. 101

della volta, inserendovi particolari strutture denominate appunto *lunette*.

Generalmente le *lunette* di una volta cilindrica o di una cupola sferica, sono costituite da *superfici cilindriche a direttrici circolari*, di diametro inferiore e generatrici ortogonali rispetto ai corrispondenti elementi della volta, oppure di generatrici parallele a un raggio orizzontale, nel caso della cupola: in entrambi i casi il contorno del vano aperto nella superficie della volta è una curva generalmente gobba, che in quanto generata dall'intersezione di due superfici quadriche (i semicilindri della volta e della lunetta) è costituita da un arco di *quartica*; l'altro ramo della quartica delimita il vano per il raccordo dell'eventuale finestra aperta nella volta in posizione simmetrica.

Rappresentata in *assonometria cavaliere* la superficie di una volta cilindrica, e assegnati posizione e

diametro dell'arco-finestra, se ne costruisca l'immagine semiellittica e si completi il contorno apparente del cilindro-lunetta con la generatrice tangente la semiellisse e parallela all'asse  $x$ . Per la costruzione dei diversi punti della quartica si possono sezionare entrambi i semicilindri con un piano variabile  $\alpha$  parallelo al coordinato  $xy$ , e dunque orizzontale, poiché con tale scelta le intersezioni con l'una e l'altra superficie sono generatrici (cfr. 3.7.4.); al variare del piano  $\alpha$  si hanno dunque per ciascuna lunetta coppie di punti della curva, di volta in volta quelli comuni a una delle generatrici del semicilindro maggiore (volta) contenuta in  $\alpha$  - l'altra generatrice interessando, se esiste, la eventuale lunetta simmetrica - e alle due generatrici del cilindro minore contenute nello stesso piano (fig. 101).

L'eventuale apertura simmetrica della volta costituisce l'altro ramo della quartica, in quanto intersezione



della volta con uno stesso cilindro, cui appartengono come abbiamo visto entrambe le lunette.

L'immagine prospettica di una volta lunettata si avvale di costruzioni analoghe, tenendo presenti la convergenza nei punti di fuga delle generatrici non parallele al quadro e le consuete riduzioni delle grandezze in profondità. Nel caso della figura 102 il piano d'imposta della volta ha, come nella realtà, una posizione elevata rispetto all'osservatore e dunque la volta appare vista dal basso.

Talvolta la lunetta di raccordo tra l'arco-finestra e la volta principale è costituita da una superficie a doppia curvatura, generalmente di rotazione essendo

circolari le sezioni con piani paralleli all'arco dell'infisso: tale superficie viene inserita tra due sezioni piane oblique, dunque ellittiche, della volta cilindrica.

2. La volta anulare lunettata, la cui superficie è quella di un toro sezionato con il piano equatoriale, copre corridoi o gallerie circolari, in cui si aprono delle finestre, o porte, ad arco. La curva intersezione di ciascuna lunetta con la superficie della volta, si costruisce come intersezione del toro con il (semi)cilindro circolare della lunetta, il cui asse coincide con un raggio del cerchio equatore.

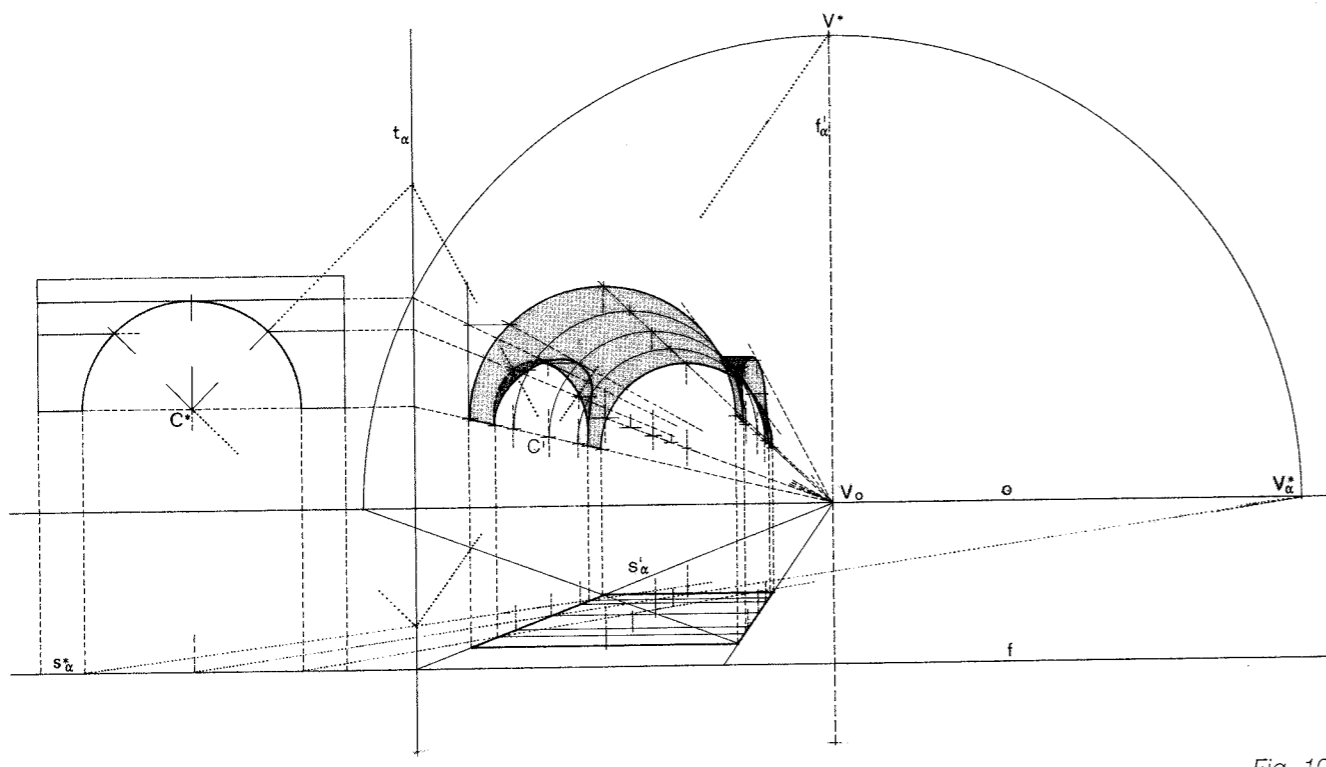


Fig. 102

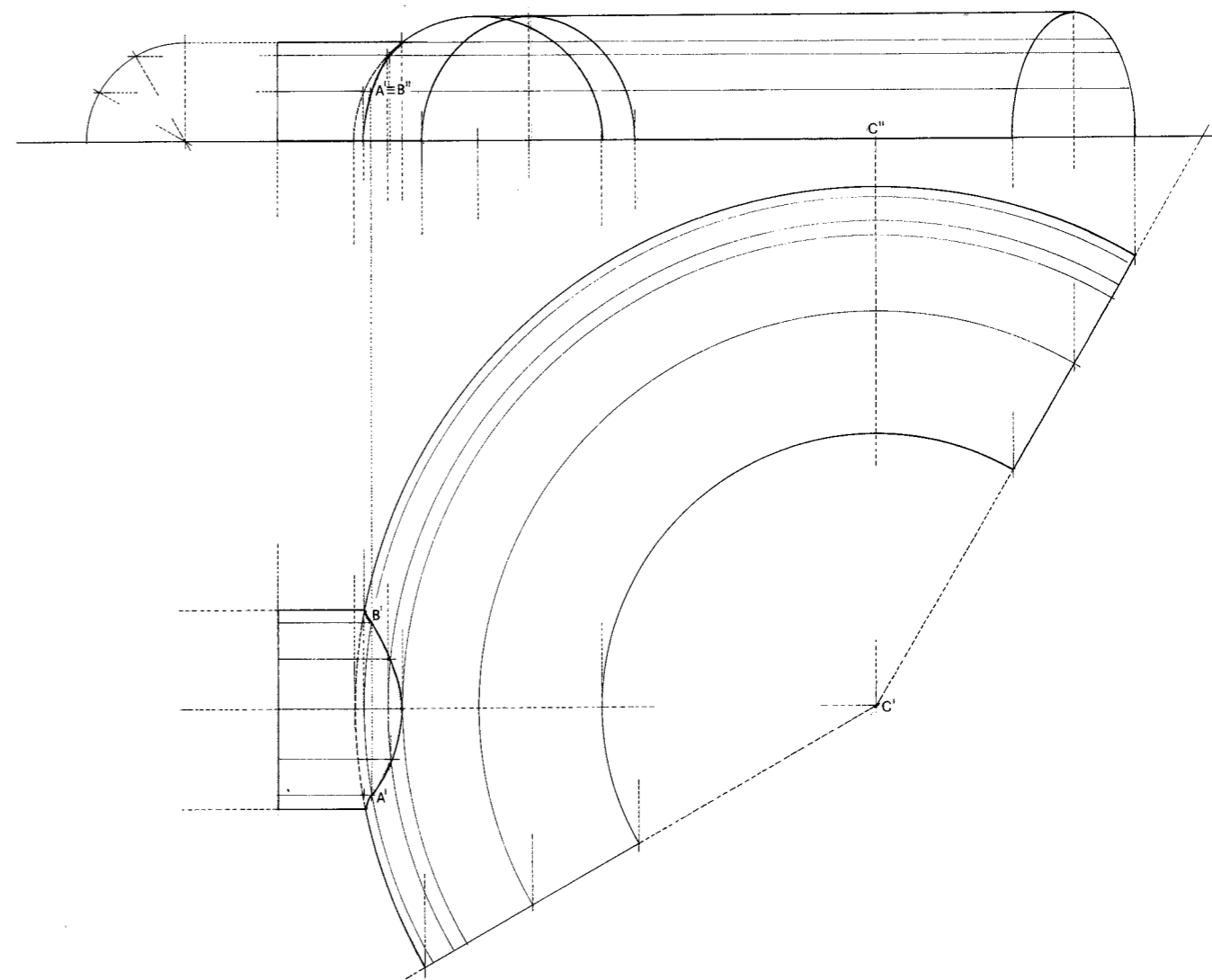


Fig. 103

Rappresentata la volta nel metodo di Monge, i diversi punti di ciascuna curva si costruiscono secondo con un piano orizzontale variabile il toro e il semicilindro lunetta (fig. 103): i due punti comuni al parallelo del toro e alle due generatrici del cilindro, secondo cui il piano interseca rispettivamente l'una e l'altra superficie, appartengono al ramo della curva cercata, che costituisce il profilo del vano aperto nella volta in corrispondenza di ogni lunetta. Le coppie di punti  $A'$ ,  $B'$ , individuati in prima proiezione, determinano mediante le rette di richiamo, i punti coincidenti  $A'' \equiv B''$  sul segmento orizzontale, seconda proiezione del relativo parallelo.

#### 4.5 Volte sferiche

1. La più semplice tra le volte sferiche, cioè la cupola sferica, la cui superficie è appunto una semisfera, viene adottata generalmente per coprire spazi a pianta circolare oppure a pianta quadrata, come la zona sacra di numerose basiliche, in questo caso essendo tuttavia necessaria l'introduzione di opportuni elementi di raccordo tra i vertici del quadrato e il cerchio d'imposta; tali elementi, la cui superficie è un triangolo sferico, sono detti pennacchi sferici; ancora sferica è la superficie di un altro tipo di volta atta a coprire spazi a pianta generalmente quadrata,

precisamente la *volta a vela*.

Per la rappresentazione in *assonometria cavaliere* della *cupola sferica*, rimandando il lettore a quanto descritto a proposito della sfera (cfr. 3.3.10. e fig. 56), ricordiamo che il *contorno apparente* di questa volta è costituito da una semiellisse obliqua – immagine del (semi)cerchio di contatto dell'ideale cilindro circoscritto alla sfera dal centro  $R_\infty$  dell'assonometria – tangente a un'altra semiellisse, immagine del cerchio d'imposta, cioè dell'equatore della sfera.

La *rappresentazione mongiana della semisfera* può essere semplificata se facciamo coincidere il piano  $\pi_1$  con il piano d'imposta: in tal modo la prima traccia  $s_\alpha$  del piano  $\alpha$  perpendicolare alla direzione  $R_\infty$  dell'assonometria – piano che contiene il contorno apparente della sfera da  $R_\infty$  – passa per il punto

$C \equiv C_1$  in cui coincidono il centro della semisfera e la sua prima proiezione.

Per la costruzione dell'*immagine prospettica della cupola sferica*, aggiungiamo a quanto illustrato a proposito della *prospettiva della sfera* (cfr. 3.3.11. e fig. 60) che anche in questo caso è necessario limitare l'immagine alla sola semisfera superiore, sezionando la superficie con il piano orizzontale  $\pi_1$  passante per il centro  $C$ , costruendo cioè l'immagine ellittica del cerchio equatore: ribaltato il piano  $\pi_1$  (la cui fuga coincide con la retta  $o$  e la traccia passa per il punto  $T_d$ ) e con esso il cerchio equatore, se ne costruisca l'immagine mediante la consueta omologia. Il ribaltamento del piano  $\pi_1$  è stato effettuato nel verso che porta il punto  $V^*$  al di sotto della traccia.

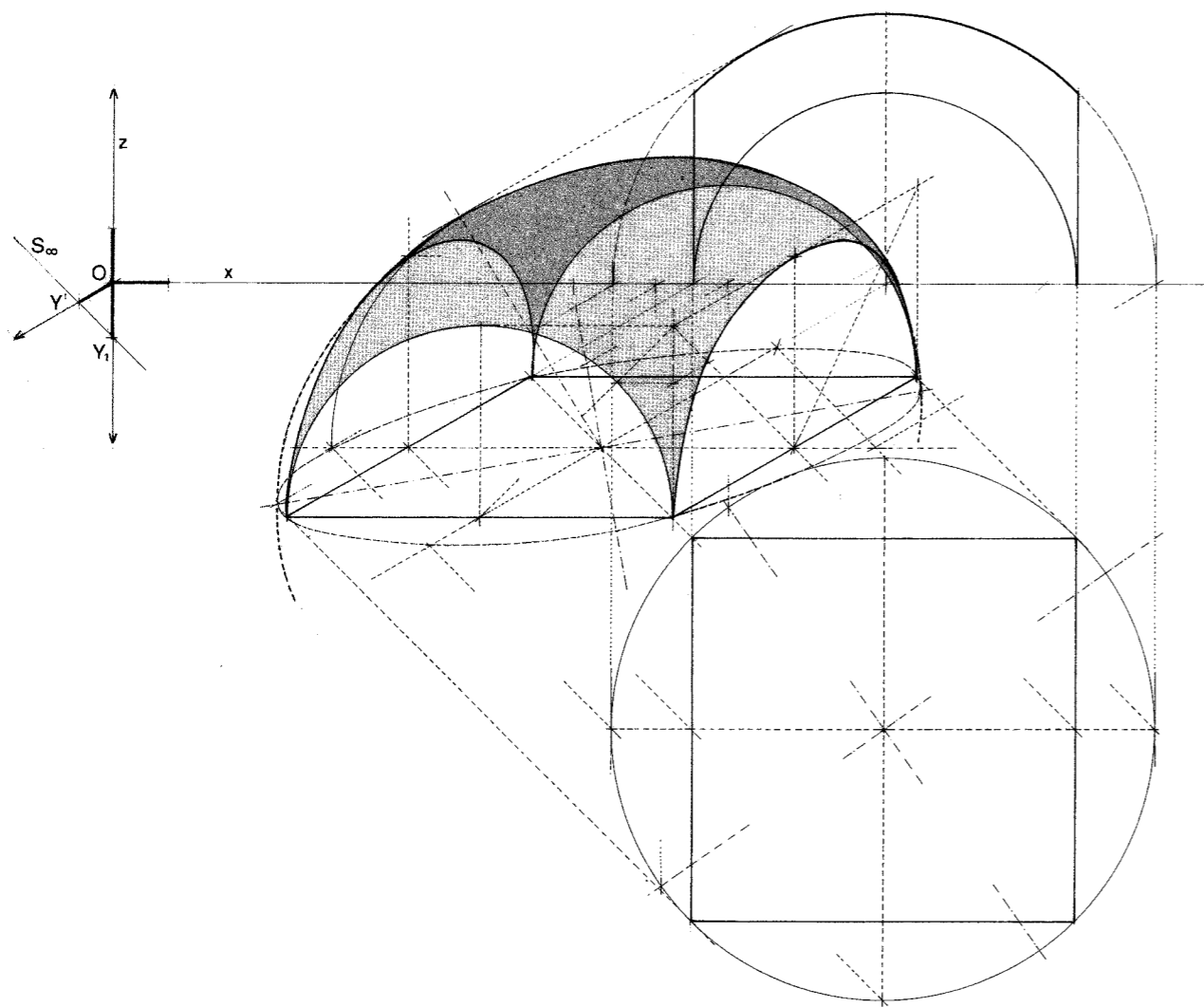


Fig. 104

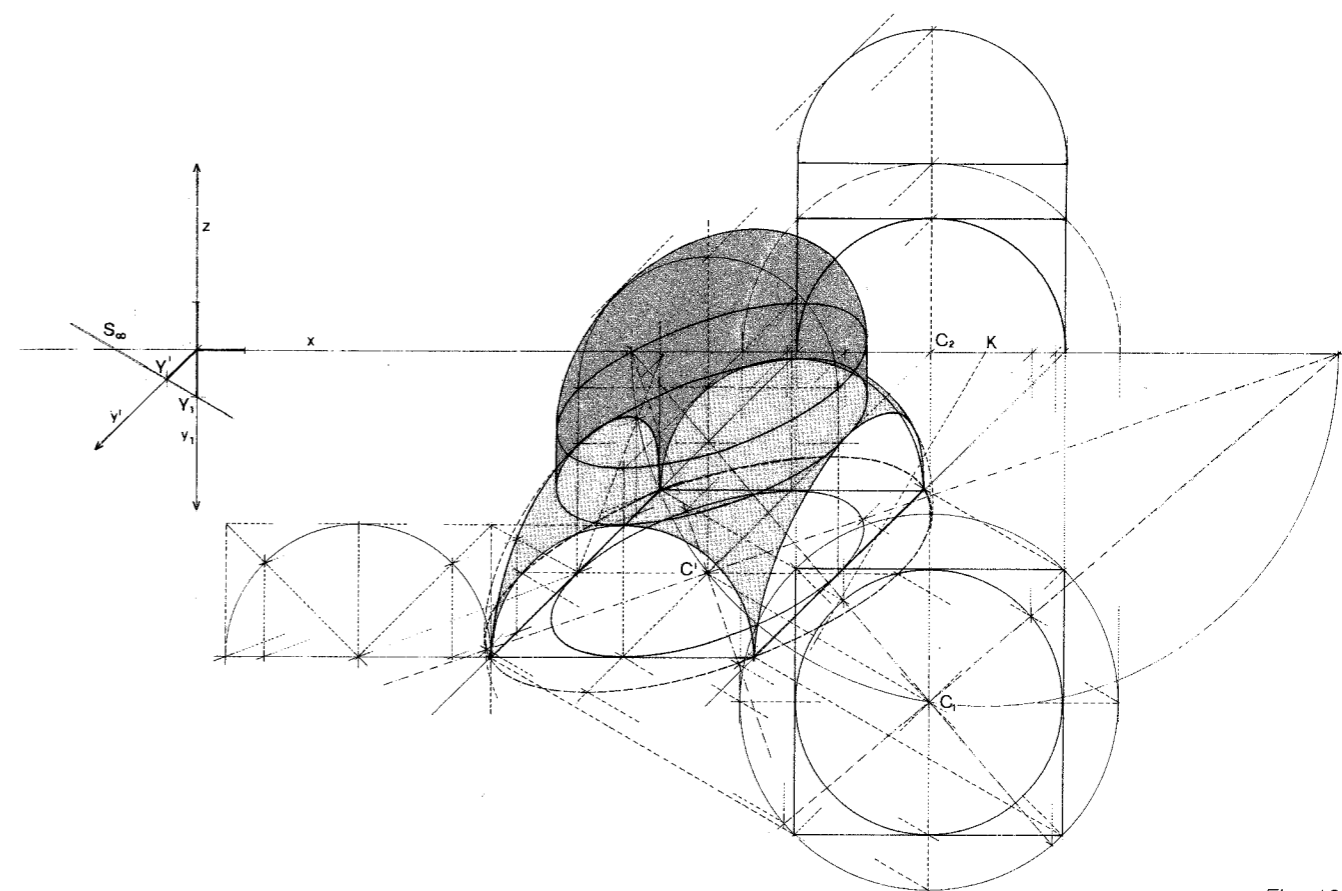


Fig. 105

2. La *volta a vela* copre, come la volta a crociera, spazi a pianta quadrata, chiusi oppure aperti: la superficie di questa volta è riconducibile a quella di una semisfera con il cerchio-equatore circoscritto al quadrato d'imposta, che viene sezionata con quattro piani verticali passanti per i lati dello stesso quadrato; le sezioni con tali piani sono evidentemente semicerchi di diametro uguale al lato del quadrato, e dunque inferiore a quello della sfera, e costituiscono i profili dei quattro archi laterali che poggiano sui pilastri.

La *rappresentazione mongiana* della volta a vela è costituita in prima proiezione dal solo quadrato d'imposta; in seconda proiezione da un arco di cerchio – con centro in  $C_2$  e raggio uguale a quello del cerchio circoscritto al quadrato (equatore della superficie sferica) –, dal semicerchio con centro ancora in  $C_2$  e raggio uguale alla metà del lato del quadrato, e dai segmenti verticali di uguale misura, che rappresentano i due archi laterali: la zona compresa tra queste quattro linee è la seconda proiezione della superficie della volta (fig. 104). L'*assonometria cavaliere* della volta a vela si costruisce dunque come

quella della semisfera, inserendovi la rappresentazione del quadrato d'imposta, inscritto nel cerchio equatore, e dei quattro archi-sezione: tutte le operazioni sono quelle consuete per la trasformazione delle immagini mongiane nella corrispondente immagine assonometrica.

Sono ancora superfici sferiche quelle dei particolari elementi, detti *pennacchi sferici*, che svolgono il ruolo di raccordo tra il quadrato ideale – che caratterizza la zona sacra di numerose basiliche ed è definito da quattro punti di appoggio – e il cerchio d'imposta della cupola: tali raccordi costituiscono la parte residua di una volta a vela sezionata con un piano orizzontale passante per i punti-chiave degli archi laterali. Per conferire maggiore altezza alla struttura voltata, tra i pennacchi e la cupola viene spesso inserito un ulteriore elemento, il *tamburo*, la cui superficie è cilindrica nel caso della cupola sferica, mentre nelle cupole a padiglione, assume la forma di prisma ottagonale.

Nella figura 106 sono rappresentati i *pennacchi sferici*, il *tamburo* e la *calotta sferica*, tutti elementi che costituiscono l'intradosso di una *cupola*.

## Note

- 1 È detto *raggio di curvatura* di una curva in un punto il raggio del cerchio tangente internamente alla curva in quel punto; dicesi *curvatura* di una curva in un punto il numero inverso della misura del raggio di curvatura nello stesso punto: quanto minore è il raggio tanto maggiore è dunque la curvatura, e viceversa.
- 2 Come sappiamo, la somma delle distanze di ciascun punto dell'ellisse dai fuochi è uguale alla misura dell'asse maggiore.
- 3 Il cerchio di curvatura di una curva in un punto è il cerchio che tocca internamente la curva in quel punto (cfr. nota 1).
- 4 Le quattro terne delle coordinate di questi punti, non necessariamente tutte reali, sono le soluzioni del sistema, ancora di quarto grado, formato dalle due equazioni delle quadriche e da un'equazione di primo grado in tre variabili, che rappresenta un piano.
- 5 Infatti il sistema di secondo grado formato da un'equazione di secondo grado in tre variabili che rappresenta una quadrica e da un'equazione di primo grado ancora in tre variabili che rappresenta un piano, ammette come soluzioni infinite terne di numeri, le coordinate di un insieme di punti che appartengono a una curva ancora di secondo grado, cioè una conica.
- 6 M. Docci - R. Magliari, *Scienza della rappresentazione*, NIS, Roma 1992, pp. 38-40.
- 7 Non può mai verificarsi il caso in cui l'immagine della sfera sia una parabola o un'iperbole, perché non compatibile con l'ampiezza del cono visivo.
- 8 La misura del passo deve essere calcolata in base all'altezza del fruitore, onde consentirne la salita.
- 9 M. Docci - R. Magliari, *Op. cit.*, pp. 38-40.
- 10 In tale caso i coni sono mutuamente tangenti e in quella generatrice coincidono due rette che appartengono alla quartica intersezione, la cui residua parte è dunque una *conica*.