# 1

Data $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int dx\, h(x) \neq 0$, si consideri la successione

$$u_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int dx\, h(x)} \ . \tag{1}$$

Si mostri che $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \delta(x)$ nel senso delle distribuzioni, dove $\delta(x)$ denota la delta di Dirac (o equivalentemente usando la notazione dei funzionali, che $\lim_{n\to\infty} T_{u_n} = \delta_0$).

# 2

Considera le distribuzioni: $\delta(x-x_0)$, $\mathrm{sgn}(x-x_0)$ e $|x-x_0|$. La prima è stata definita a lezione, le altre due sono definite tramite l'integrale della funzione test moltiplicata per la funzione indicata. Usando le operazioni di moltiplicazione per variabile e derivata per distribuzioni, prova le seguenti identità:

- $x\delta(x-x_0) = x_0\delta(x-x_0)$
- $\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x-x_0) = 2\delta(x-x_0)$
- $(x-x_0)\mathrm{sgn}(x-x_0) = |x-x_0|$
- $\frac{d}{dx}|x-x_0| = \mathrm{sgn}(x-x_0)$

Infine mostra che la quarta identitá si puó ottenere anche scrivendo la distribuzione $|x-x_0|$ come prodotto, usando la terza identitá, e applicando la regola di Leibniz.