Teorema di sollevamento dei cammini

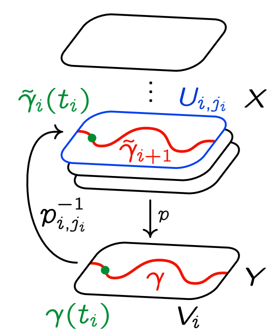
Teor. *Sia $p\colon X \to Y$ un rivestimento. $\forall\, \gamma\colon I \to Y$ continua, con $\gamma(0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde{\gamma}\colon I \to X$ sollevamento continuo di γ t.c. $\tilde{\gamma}(0) = x_0$.*

Dim. J fibra di p. $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di Y banalizzante per p. $\{\gamma^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \Rightarrow$ $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_{\alpha_i} =: V_i$ per un certo $\alpha_i \in A \Rightarrow \gamma(t_i) \in V_{i-1} \cap V_i$, $i \geqslant 1$.

$$p^{-1}(V_i) = \bigsqcup_{j\in J} U_{i,j}, \quad p_{i,j} := p|_{U_{i,j}}\colon U_{i,j} \xrightarrow{\cong} V_i, \quad U_{i,j} \text{ fogli di } p$$

$\boxed{\textit{Esistenza}}$ Solleviamo γ su $[0, t_i]$ mediante $\tilde{\gamma}_i\colon [0, t_i] \to X$ t.c. $\tilde{\gamma}(0) = x_0$. Poniamo $\tilde{\gamma}_0\colon \{0\} \to X$, $\tilde{\gamma}_0(0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{\gamma}_i \Rightarrow$ $\exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{\gamma}_i(t_i) \in U_{i,j_i}$ dato che $\gamma(t_i) \in V_i$.

$$\tilde{\gamma}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{\gamma}_i, & \text{su } [0, t_i] \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma, & \text{su } [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$



$p_{i,j_i}(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = p(\tilde{\gamma}_i(t_i)) = \gamma(t_i) \Rightarrow \tilde{\gamma}_i(t_i) = p_{i,j_i}^{-1}(\gamma(t_i)) \Rightarrow$ $\tilde{\gamma}_{i+1}$ continua. $\tilde{\gamma}_{i+1}$ sollevamento di γ su $[0, t_{i+1}]$ t.c. $\tilde{\gamma}_{i+1}(0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_n$.

$\boxed{\textit{Unicità}}$ $\forall\, \tilde{\gamma}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{\gamma}'(0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}_i$ su $[0, t_i] \Rightarrow \tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{\gamma}'([t_i, t_{i+1}])$ connesso $\Rightarrow$ $p_{i,j_i} \circ \tilde{\gamma}' = \gamma$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ su $[t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma}$ su I. $\square$

Omotopie di cammini e di cappi

$I^2 = I \times I \subset \mathbf{R}^2$ *quadrato unitario* con coordinate $(t, s) \in I^2$.
s parametro delle omotopie. t parametro dei cammini e dei cappi.

$$\begin{aligned} H\colon I^2 &\to X \quad \text{continua} \\ (t, s) &\mapsto H(t, s) =: h_s(t) \\ \gamma_0 &:= h_0,\ \gamma_1 := h_1 \end{aligned}$$

Def. *H omotopia libera di cappi* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ h_s cappio $\forall\, s \in I$: $h_s(0) = h_s(1)$.
H omotopia di cammini $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ H rel $\{0, 1\}$: $h_s(0) = x_0$, $h_s(1) = x_1$, $\forall\, s \in I$.
H omotopia di cappi $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ H rel $\{0, 1\}$ e h_s cappio $\forall\, s \in I$: $\gamma_0 \simeq_{\{0,1\}} \gamma_1$.

Teorema di sollevamento delle omotopie

Teor. *Sia $p\colon X \to Y$ un rivestimento. $\forall\, H\colon I^2 \to Y$ cont., con $H(0,0) = y_0$, $\forall\, x_0 \in p^{-1}(y_0) \Rightarrow \exists!\, \tilde{H}\colon I^2 \to X$ sollevamento cont. di H t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$. H rel $\{0,1\} \Rightarrow \tilde{H}$ rel $\{0,1\}$.*

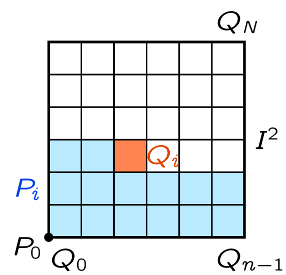
Dim. L'idea è simile al caso dei cammini di cui manteniamo la notazione. $\{H^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ricoprimento aperto di $I^2 \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue $\rightsquigarrow$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ suddivisione di I t.c. $t_i - t_{i-1} < \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$.

Numeriamo i quadratini $[t_i, t_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]$ in modo crescente rispetto all'ordine lessicografico sulle coppie $(i,k) \rightsquigarrow Q_0, \dots, Q_N$ $(N = n^2 - 1) \Rightarrow$ $\operatorname{diam} Q_i < \delta \Rightarrow H(Q_i) \subset V_i$.

$$P_0 := \{(0,0)\}$$

$$P_i := \bigcup_{k=0}^{i-1} Q_k \;\Rightarrow\; T_i := P_i \cap Q_i = \begin{cases} \text{1 vertice } (i=0) \\ \text{1 lato} \\ \text{2 lati consecutivi} \end{cases}$$

$T_i \neq \emptyset$ connesso per archi.



$\boxed{\textit{Esistenza}}$ Solleviamo H su P_i mediante $\tilde{H}_i\colon P_i \to X$ t.c. $\tilde{H}(0,0) = x_0$. Poniamo $\tilde{H}_0\colon P_0 \to X$, $\tilde{H}_0(0,0) := x_0$. Supponiamo di aver definito $\tilde{H}_i \Rightarrow$ $\exists!\, j_i \in J$ t.c. $\tilde{H}(T_i) \subset U_{i,j_i}$ dato che $H(T_i) \subset H(Q_i) \subset V_i$ e T_i connesso.

$$\tilde{H}_{i+1} := \begin{cases} \tilde{H}_i, & \text{su } P_i \\ p_{i,j_i}^{-1} \circ H, & \text{su } Q_i. \end{cases}$$

$p_{i,j_i} \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = p \circ \tilde{H}_i|_{T_i} = H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_i|_{T_i} = p_{i,j_i}^{-1} \circ H|_{T_i} \Rightarrow \tilde{H}_{i+1}$ continua. $\tilde{H}_{i+1}$ sollevamento di H su P_{i+1} t.c. $\tilde{H}_{i+1}(0,0) = x_0 \rightsquigarrow \tilde{H} := \tilde{H}_N$.

$\boxed{\textit{Unicità}}$ $\forall\, \tilde{H}'$ sollevamento continuo t.c. $\tilde{H}'(0,0) = x_0$. Per induzione se $\tilde{H}' = \tilde{H}_i$ su $P_i \Rightarrow \tilde{H}'(Q_i) \subset U_{i,j_i}$ perché $\tilde{H}'(Q_i)$ connesso $\Rightarrow$ $p_{i,j_i} \circ \tilde{H}' = H$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = p_{i,j_i}^{-1} \circ H = \tilde{H}$ su $Q_i \Rightarrow \tilde{H}' = \tilde{H}$ su I^2.

$\boxed{\textit{Rel } \{0,1\}}$ $H(\{0\} \times I) = y_0 \Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(y_0)$.
$x_0 \in \tilde{H}(\{0\} \times I)$ connesso e $p^{-1}(y_0)$ discreto $\Rightarrow \tilde{H}(\{0\} \times I) = x_0$.
Analogamente si ha $\tilde{H}(\{1\} \times I) = x_1$, con $p(x_1) = y_1 = H(\{1\} \times I)$. $\square$

Oss. H omotopia rel $\{0,1\}$ di cappi $\Rightarrow \tilde{H}$ omotopia rel $\{0,1\}$ di cammini, ma non necessariamente di cappi (vedremo esempi più avanti).