Dim. b: $\dim \Lambda_{d-1} = 1$

Per assurdo: supp. $\dim \Lambda_{d-1} \geq 2$

Posso imporre passaggio per ulteriori 2 punti di $\Sigma_p(F)$: $S_1 \in S_2$

$\exists\, D$: polin. di grado $d-1$

$[D] \in \Lambda_{d-1}$ e $D(S_1) = 0$, $D(S_2) = 0$

Cons. $\Sigma_p(D)$:

$$\sum_{P \in \Sigma_p(F) \cap \Sigma_p(D)} I_P(F, D) \overset{\text{Bezout}}{=} d \cdot (d-1)$$

$$\sum_{P \in \Sigma_p(F) \cap \Sigma_p(\Sigma_p(F))} I_P(F, D) + \sum_{i=1}^{2d-3} I_{Q_i}(F, D) + I_{S_1}(F, D) + I_{S_2}(F, D)$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i - 1) + (2d-3) \cdot 1 + 1 + 1$$

$= (d-1)(d-2)$ (perché $g = 0$)

$= (d-1)(d-2) + (2d-3) + 2$

$= d^2 - 3d + 2 + 2d - 3 + 2 = d^2 - d + 1 + d(d-1) + 1$ $\leq d(d-1)$

ASSURDO

$\Rightarrow \dim \Lambda_{d-1} = 1$ è un fascio

$\Rightarrow \Lambda_{d-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(G_1, G_2))$

$\cup$

$[G] = [t_0 G_1 + t_1 G_2]$

Cons. $R_{x_2}(F, t_0 G_1 + t_1 G_2) = \tilde{R}(x, x_0, t_0, t_1)$

Per ipotesi: $\mathrm{Sing}\, \Sigma_p(F) \subseteq U_0$

posso decom. il risultante rispetto a x_0;

decom. anche rispetto a t_0:

(vedremo che grado al più 1 punto nella costruzione della parametrizzazione)

$\rightarrow$ sottingo $R = R(x, t) = R_y(aF, aG_1 + t\, aG_2)$

ha grado $d(d-1)$ nella x; pongo $N = d(d-1)$

$R(x, t) = b_N(t) x^N + b_{N-1}(t) x^{N-1} + \dots + b_1(t) x + b_0(t)$

$b_N(t) \neq 0$

$R(x, t)$ è annullato dai a_i con molt. $m_i(m_i - 1)$

$P_i = (1 : a_i : b_i)$

è annullato dai c_j con molt. 1

$Q_j = (1 : c_j : d_j)$

$$R(x, t) = \prod_{i=1}^{s} (x - a_i)^{m_i(m_i-1)} \cdot \prod_{j=1}^{2d-3} (x - c_j) \cdot (x - \Phi(t)) \cdot b_N(t)$$

$N = d(d-1)$

Quindi al variare di $t \in \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1 = 0\}$

$\cong \mathbb{P}^1 \setminus \{(0:1)\}$

trovo un punto su $\Sigma(aF) \subset \mathbb{A}^2$, la sua prima coordinata è $\Phi(t)$.

Affermo che posso esprimere $\Phi(t)$ come quoziente di polinomi in t:

$$b_{N-1}(t) = -b_N(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{s} m_i(m_i - 1) a_i + \sum_{j=1}^{2d-3} c_j + \Phi(t) \right)$$

$$-\frac{b_{N-1}(t)}{b_N(t)} = \sum m_i(m_i - 1) a_i + \sum c_j + \Phi(t)$$

$$\Phi(t) = -\frac{b_{N-1}(t)}{b_N(t)} - \sum m_i(m_i - 1) a_i - \sum c_j$$

$\Rightarrow$ ho parametrizzato la prima coordinata dell'N-esimo punto di $\Sigma(aF) \cap \Sigma(aG_1 + t\, aG_2)$

Per avere la seconda coord. di questo punto mobile, inferisco il procedimento cons.

$R_{x_1}(F, t_0 G_1 + t_1 G_2)$

ovvero $R_x(aF, aG_1 + t\, aG_2) = R(y, t)$

di grado $N = d(d-1)$

Trovo $\rho: \mathbb{A}^1 \setminus \Sigma \longrightarrow \Sigma(aF) \setminus \{\mathrm{Sing}\, \Sigma(aF)\} \setminus \{Q_j\}$

$\rho(t) = (\Phi(t), \psi(t))$

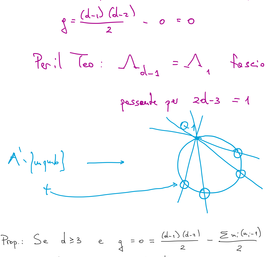
con $\Phi(t)$ e $\psi(t)$ quozienti di polinomi in t.

$\Rightarrow \Sigma(aF)$ e $\Sigma_p(F)$ è curva razionale.

$(d \geq 2)$: $d = 2$, conica irriducibile non ha punti sing.:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 0 = 0$$

Per il Teo: $\Lambda_{d-1} = \Lambda_1$ fascio di rette passante per $2d-3 = 1$ punto della curva Q_1



Prop.: Se $d \geq 3$ e $g = 0 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum m_i(m_i-1)}{2}$

una parametrizzazione si può ottenere con un fascio di curve aggiunte di grado $d-2$ e passanti per ulteriori $d-3$ punti di $\Sigma_p(F)$.

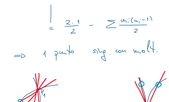
Dim. Uguale a prima.

Es.: $d = 3$;

$$g = 0 = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{2} - \sum \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

$\Rightarrow$ 1 punto sing con molt. $m_1 = 2$



aggiunte di grado $d-2 = 1$

passanti per P_1 con molt. $m_1 - 1 = 1$

e per ulteriori $d-3 = 0$ punti

aggiunte di grado $d-1 = 2$

passanti per P_1 con molt. $m_1 - 1 = 1$

e per ulteriori $2d-3 = 6-3 = 3$ punti