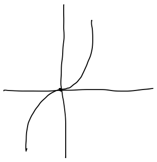
Lezione 28 novembre 23

martedì 28 novembre 2023 09:18

FLESSI DI CURVE PIANE ALG

(Sernesi, Geo 1, pag. 399)
Bollati Boringhieri

Es.: $y = x^3$



(0,0) è flesso del grafico

Da un punto di vista alg:

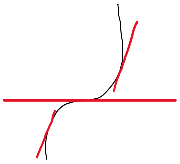
$x^3 - y = 0$ è curva affine passa per (0,0) e' un punto semplice

eq. della tg in (0,0) = parte lineare dell'eq.

$$t_{(0,0)} Z(f) : y = 0 \qquad f = x^3 - y$$

Inoltre $I_{(0,0)}(f, t_{\infty} Z(f)) = 3$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad : \quad x^3 = 0$$



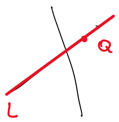
Def.: Un punto $Q \in Z_p(F)$ (oppure $Z(f)$) si dice **PUNTO DI FLESSO** per $Z_p(F)$ se:

- è un punto semplice (non singolare)
- $I_Q(F, \tau_Q(Z_p F)) \geq 3$.

τ_Q ↓ retta tg proiettiva in Q

OSS.: Per il Teo di Bézout, una conica irriducibile NON HA PUNTI DI FLESSO.

Se invece la conica è riducibile, C = unione di due rette (distinte o coincidenti), allora



$\tau_Q = L$

$I_Q(C, \tau_Q) = +\infty \geq 3$

vale $\forall Q$ semplice di C

$\Rightarrow$ C ha infiniti flessi.

Def.: Cons. $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$;

$F = F(x_0, x_1, x_2)$ omog. di grado $d \geq 2$

la MATRICE HESSIANA DI F in $Q \in \mathbb{P}^2$

$$M_F(Q) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0 x_0} F(Q) & \partial_{x_0 x_1} F(Q) & \partial_{x_0 x_2} F(Q) \\ \vdots & \partial_{x_1 x_1} F(Q) & \\ \partial_{x_2 x_0} F(Q) & \dots & \partial_{x_2 x_2} F(Q) \end{pmatrix}$$

$M_F = \left(\partial_{x_i x_j} F \right)$ 3×3

le sue entrate sono polinomi omogenei di grado $d-2$

L' HESSIANO o DETERMINANTE HESSIANO

$H_F(Q) = \det M_F(Q) \in K$

$H_F = \det M_F \in K[x_0, x_1, x_2]_{3(d-2)}$

H_F o è il polinomio nullo, opp. è un polinomio omogeneo di grado $3(d-2)$.

TEOREMA: $Z_p(F) \cap Z_p(H_F) = \{\text{flessi di } Z_p(F)\} \cup \text{Sing}\, Z_p(F)$

Dim.: $\supseteq$:

Sia $Q \in Z_p(F)$, $Q \in \text{Sing}\, Z_p(F)$

$\Rightarrow \nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$0 = \underbrace{(d-1)\,\partial_{x_0} F(Q)}_{\downarrow\ \text{Eulero}} = \rho_0\, \partial_{x_0 x_0} F(Q) + \rho_1\, \partial_{x_0 x_1} F(Q) + \rho_2\, \partial_{x_0 x_2} F(Q)$$

$Q = (\rho_0 : \rho_1 : \rho_2)$

$$0 = (d-1)\,\partial_{x_1} F(Q) = \rho_0\, \partial_{x_1 x_0} F(Q) + \rho_1\, \partial_{x_1 x_1} F(Q) + \rho_2\, \partial_{x_1 x_2} F(Q)$$

$$0 = (d-1)\,\partial_{x_2} F(Q) = \rho_0\, \partial_{x_2 x_0} F(Q) + \rho_1\, \partial_{x_2 x_1} F(Q) + \rho_2\, \partial_{x_2 x_2} F(Q)$$

$$M_F(Q) = \begin{pmatrix} \partial_{x_0 x_0} F(Q) & \partial_{x_0 x_1} F(Q) & \vdots \\ \partial_{x_1 x_0} F(Q) & \partial_{x_1 x_1} F(Q) & \vdots \\ \partial_{x_2 x_0} F(Q) & \partial_{x_2 x_1} F(Q & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\rho_0\, M_F(Q)^{(1)}}_{\downarrow\ \text{prima colonna}} + \rho_1\, M_F(Q)^{(2)} + \rho_2\, M_F(Q)^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le colonne di $M_F(Q)$ sono LIN. DIP.

$\Rightarrow \det M_F(Q) = 0 = (\det M_F)(Q)$

$\overset{!}{=} H_F(Q)$

Adesso supp. $Q \in Z_p(F)$ punto semplice

e FLESSO.

$Q = (\rho_0 : \rho_1 : \rho_2)$

Sia $R = (r_0 : r_1 : r_2) \in \mathbb{P}^2$ qualsiasi, $R \neq Q$

Retta $\overline{QR}$: il suo generico punto

$$= \mathbb{P}\left(\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\right)\right)$$

il generico punto di $\overline{QR}$: $\lambda Q + \mu R$

Cerco R t.c. $I_Q(F, \overline{QR}) \geq 3$

$$F(\lambda Q + \mu R) = \overbrace{F(Q)}^{=0 \quad Q \in \mathcal{Z}_p(F)} \cdot \lambda^d + \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q) r_i\right)}_{} \lambda^{d-1} \mu +$$

FORMULA DI TAYLOR OMOGENEA

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{2} \partial_{x_i x_j} F(Q) r_i r_j\right)}_{} \lambda^{d-2} \mu^2 + \cdots$$

$$= G(\lambda, \mu)$$

(visto $F(Q + t R)$; omogeneizzando
$= g(t)$
$h\,g(t) = \lambda^{\deg g} \cdot g\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$
si trova la For. Taylor omogenea)

Il punto Q corrisponde alla coppia $(1:0) = (\lambda : \mu)$

Q è flesso $\iff I_Q(F, \overline{QR}) \geq 3$

$\iff (1:0)$ è radice di molt. almeno 3 di $G(\lambda, \mu)$

$\iff \sum \partial_{x_i x_j} F(Q) r_i r_j = 0 \quad \forall R$ tale che

$\sum \partial_i F(Q) r_i = 0 \iff {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = 0$

$\iff R \in$ retta $\underbrace{{}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0}_{= \mathcal{E}_Q(\mathcal{Z}_p(F))}$

se $R \in \mathcal{E}_Q(\mathcal{Z}_p(F))$

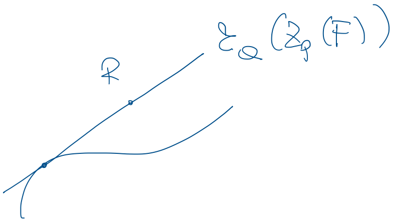
voglio

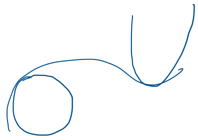
cioè R annulla $\underbrace{\sum \partial_{x_i x_j} F(Q) \cdot x_i x_j = 0}_{\text{eq. di una CONICA } F_Q}$

si dicono

CONICA OSCULATRICE

a $Z_p(F)$ in Q

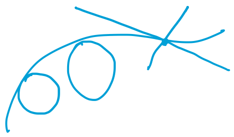




$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}_Q(Z_p(F)) \subseteq \Gamma_Q$ $\Longrightarrow$ Γ_Q è una CONICA DEGENERE

$\Longrightarrow$ det della $\underbrace{\text{matrice simmetrica}}_{= M_F(Q)}$ ass. a Γ_Q $= 0$

$\Longrightarrow$ $H_F(Q) = 0$



Viceversa: se $Q \in Z_p(F) \cap Z_p(H_F)$

$H_F(Q) = 0 = \det M_F(Q)$

$\Longrightarrow$ Γ_Q è degenere

Se dimostro che $\Gamma_Q \ni Q$ e che

$\Gamma_Q \supseteq \mathcal{E}_Q(Z_p(F))$, usando Taylor avrò $I_Q(F, \mathcal{E}_Q) \geq 3$

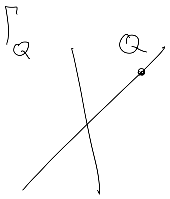
Per Eulero:

$$\underbrace{\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j} F(Q) z_i z_j}_{\Gamma_Q(Q)} = \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_0 x_j} F(Q) z_j\right)}^{=(d-1)\partial_{x_0}F(Q)} z_0 + \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_1 x_j} F(Q) z_j\right)}^{=(d-1)\partial_{x_1}F(Q)} z_1 + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{2} \partial_{x_2 x_j} F(Q) z_j\right)}_{=(d-1)\partial_{x_2}F(Q)} z_2$$

$$= (d-1) \underbrace{\sum_{i=0}^{2} \partial_{x_i} F(Q)\, q_i}_{d \cdot F(Q)} = d\,(d-1)\, F(Q) = 0 \qquad Q \in Z_p(F)$$

$$\Rightarrow \Gamma_Q(Q) = 0.$$

Osservo: le rette tg e Γ_Q in Q:



$$\tau_Q \Gamma_Q \text{ ha } \underset{1\times 3}{(q_0\; q_1\; q_2)} \cdot \underset{3\times 3}{M_F(Q)} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = 0$$

cioè: $\sum_{i,j} \partial_{x_i x_j} F(Q) \cdot q_i \; x_j = 0$

con Eulero: $= (d-1) \sum_{j=0}^{2} \partial_{x_j} F(Q)\, x_j = 0$

$$\overset{!}{=} (d-1) \cdot \quad {}^t\nabla F(Q) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

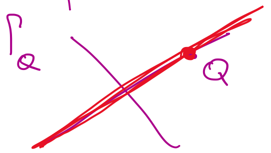
è anche eq. di $\tau_Q(Z_p(F))$

Inoltre: si ha che: o Q è sing.

$\nabla F(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, oppure

$\nabla F(Q) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau_Q \Gamma_Q = \tau_Q(Z_p(F))$

Ma per una conica riducibile, la tg. in un punto liscio = componente per quel punto



$\Rightarrow \tau_Q(Z_p(F)) \subseteq \Gamma_Q$

$\underset{\text{Taylor}}{\Rightarrow}$ Q è FLESSO.