Lezione 30 novembre 2023

giovedì 30 novembre 2023 16:12

Visto : $F(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$; $d \geq 3$

$H_F(x_0, x_1, x_2) = \det M_F$ è omog. di grado $3(d-2)$

$Z_p(H_F) \subseteq \mathbb{P}^2$

$Z_p(H_F) \cap Z_p(F) = \mathrm{Sing}\, Z_p F \cup \{\text{flessi}\}$

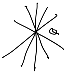
COR: Se $Z_p(F)$ è liscia, e $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$\Rightarrow Z_p(F)$ ha almeno 1 flesso

$Z_p(F) \cap Z_p(H_F) \neq \emptyset$

e $\#$ flessi $\leq 3d(d-2)$

OSS: Se $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ è unione di d rette passanti per un punto $Q \in \mathbb{P}^2$



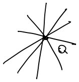
$\Rightarrow H_F \equiv 0$

Infatti: osserviamo che $\forall\, T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ proiettività

$H_F \equiv 0 \iff H_{\tilde{F}} \equiv 0$

$$T(Z_p(F)) = Z_p\Big(\underbrace{F\Big(T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Big)}_{=: \tilde{F}}\Big)$$

Se $Z_p(F) =$

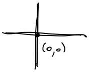


con proiettività $T : Q \to (1:0:0)$

$\tilde{F} = \prod_{i=1}^{d} L_i$, con $Z_p(L_i)$ è retta passante per $(1:0:0)$

Fascio di rette per $(1:0:0)$

la generica equazione $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$



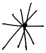
$$\tilde{F} = \prod_{i=1}^{d} (\lambda_i x_1 + \mu_i x_2) = \tilde{F}(x_1, x_2)$$

$$M_{\tilde{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_1 x_1}\tilde{F} & \partial_{x_1 x_2}\tilde{F} \\ 0 & \partial_{x_2 x_1}\tilde{F} & \partial_{x_2 x_2}\tilde{F} \end{pmatrix}$$

$$H_{\tilde{F}} \equiv 0$$

TEOREMA GORDON- NOETHER:

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ ha $H_F \equiv 0$ $\Longleftrightarrow$

$Z_p(F) =$ 

Dim. : omesso.

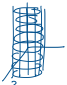
OSS: $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]_d$

$\Rightarrow H_F \equiv 0$

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^n$

(recall: in $\mathbb{R}^3$: $x^2+y^2 = 1$

$x^2+y^2-1 = 0$



$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

manca x_3

è un CONO PROIETTIVO: con vertice

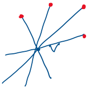
$(0:0:0:1)$

Gordan - Noether: tutti i coni proiettivi (ipersuperfici che sono unione di rette passanti per un punto VERTICE V) hanno $H_F \equiv 0$

HESSE: Cong. $H_F \equiv 0 \Longleftrightarrow Z_p(F)$ è cono proiettivo in $\mathbb{P}^n$

$F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$

OSS: Un cono in $\mathbb{P}^2$:



GN: Cong. Hesse vera in $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^3$

FALSO in $\mathbb{P}^4$:

Controesempio: $x_0 x_3^2 + 2 x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4^2 = 0$

Esercizio: calcolare H_F

Cong. H. in $\mathbb{P}^5$, in $\mathbb{P}^n$ $n \geq 5$: PROBLEMA
APERTO

Vedremo: geometria dei flessi di cubiche irriducibili $\subseteq \mathbb{P}^2$

Prima vediamo: curve polari associate $Z_p(F)$:

$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$, $d \geq 2$

e sia $Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

Def: La PRIMA **POLARE** $Pol_Q F$ di **F**

RISP. a Q è la curva di eq:

$Q = (q_0 : q_1 : q_2)$

$$q_0 \underbrace{\partial_{x_0} F}_{\equiv 0} + q_1 \underbrace{\partial_{x_1} F} + q_2 \underbrace{\partial_{x_2} F} = 0$$

opp. pol. om. di grado $d-1$

$$([Pol_Q F] \in \Lambda = \mathbb{P}(\mathrm{Span}(\partial_{x_0} F, \partial_{x_1} F, \partial_{x_2} F))$$

Prop.: Sia $Q \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_d$ $d \geq 2$

$$Z_p(Pol_Q F) \cap Z_p(F) = \mathrm{Sing}\, Z_p(F) \cup \{R_1, \dots, R_k\}$$

F irriducibile

dove R_i sono i punti di tangenza delle rette tangenti a $Z_p(F)$ uscenti da Q.

Dim.: Oss. che F irrid. di grado d allora $Pol_Q F$ ha grado $d-1$, non ha comp. irriducibili comuni (non è possibile $F \mid Pol_Q F$)

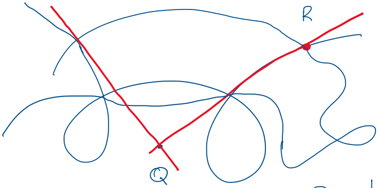
Posso app. Teo. di Bezout

$$\#\left(\underline{Z_p(Pol_Q F) \cap Z_p(F)}\right) \le d \cdot (d-1)$$

È chiaro che $\operatorname{Sing} Z_p(F) \subseteq$

Sia $R \in Z_p(Pol_Q F) \cap Z_p(F)$, R liscio

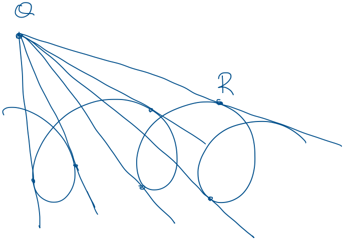
quindi: $$\begin{cases} F(R) = 0 \\ q_0\, \partial_{x_0} F(R) + q_1\, \partial_{x_0} F(R) + q_2\, \partial_{x_2} F(R) = 0 \end{cases}$$



$$\boxed{{}^t\nabla F(R) \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0}$$

Ricordo: R liscio, è def. la retta tg proiettiva in R

$${}^t\nabla F(R) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$



$Q \in \mathcal{T}_R Z_p(F)$

$$^t\nabla F(R) \cdot \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow R \in Pol_Q(F)$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \text{e se inoltre } F(R) = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow Q \in \mathcal{T}_R Z_p(F).$$

COR.: $Z_p(F)$, $Q \in \mathbb{P}^2_K$, F irriducibile

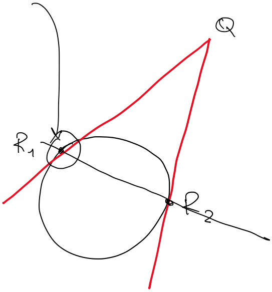
allora # rette tg a $Z_p(F)$ uscenti da $Q \leq d(d-1)$.

Se $K = \overline{K}$, # —"— ≥ 1

Esempio: $d = 2$, $\deg F = 2$, $Z_p(F)$ conica

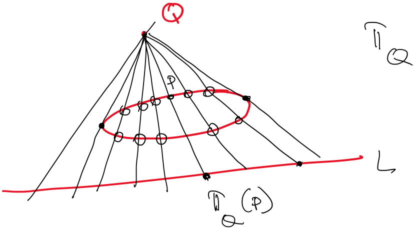
$$Pol_Q F = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lineare}}}{q_0 \partial_{x_0} F + q_1 \partial_{x_1} F + q_2 \partial_{x_2} F}$$

$Z_p(Pol_Q F)$ è una retta



Es. $d=3$, $\#$ tg uscenti da $Q \leq 3.2 = 6$

CONS. La proiezione di una curva piana su $\mathbb{P}^1$ con centro di proiezione $Q \notin Z_p(F)$



$$\pi_Q : \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\} \longrightarrow \mathbb{P}^1 \cong L$$

$$\overset{\cup}{P} \Longrightarrow \overline{PQ} \cap L$$

$$\pi_Q\big|_{Z_p(F)} : Z_p(F) \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$$

Es. 1 ⓑ Primo foglio:

$$f = x^4 + y^4 - y(x^2+y^2) \qquad \text{su } \mathbb{C}$$

$$= f_d + f_{d-1}$$

Visto: se f_d e f_{d-1} non fattori irriduc.

comuni $\Rightarrow$ f è irriducibile

x^4+y^4

$-y(x^2+y^2) = -y\cdot(x-iy)(x+iy)$

radici $(1:0)$ $\leftrightsquigarrow$ $\mathbb{P}^1$

$(i:1)$

$(-i:1)$

oss. che nessuna di queste annulla x^4+y^4

$1+0=1$

$1+1=2$

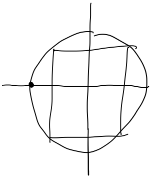
$1+1=2$

$(a:b)$ annulla $F(x,y)$ $\Rightarrow$ $(bx-ay)\mid F$

Come trovo fattori di x^4+y^4

deom. risp. y: $x^4+1=0$

$x^4=-1$



$\xi_1,\dots,\xi_4$: $x^4+1=(x-\xi_1)(x-\xi_2)(x-\xi_3)(x-\xi_4)$

$\Rightarrow$ $x^4+y^4=(x-\xi_1y)(x-\xi_2y)\cdots$

Es. ② punti sing. $(1:0:0)$

$x_0x_1^5-x_0x_1^3x_2^2-x_2^6=0$ $(1:0:0)\in U_0$

deom. risp. x_0

e $(1:0:0)$

$\underbrace{x^5 - xy^2}\, - y^6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ è di molt. 5

rette tg $\quad x^5 - x^3y^2 = 0$

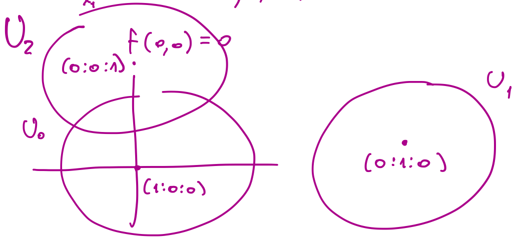
$$x^3(x^2 - y^2) = x^3(x-y)(x+y) = 0$$

3 tg distinte: $\quad x = 0, \quad x - y = 0, \quad x + y = 0$

OSS: $F(x_0, x_1, x_2) = 0 \quad$ e $\quad (0:1:0) \in U_1 \overset{j_1}{\cong} \mathbb{A}^2$

$$j_1^{-1}(Z_p(F)) = Z(aF)$$

$\downarrow$ deom. risp. a x_1

$$a_{x_1}F = F(z, 1, w) = f(z, w)$$