4 dicembre

Martedì 15 - 17 aula C7 ed B
tutorato di An. Mat.

Teor Sia $f \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Dim Consideriamo la funzione $f' \in C^0([a,b])$ sappiamo che, posto $F(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$, dal precedente teorema sappiamo che $F'(x) = f'(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Notiamo $(F(x) - f(x))' = F'(x) - f'(x) \equiv 0$ in $[a,b]$

Allora $\exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = F(x) + c$ in $[a,b]$.

Notiamo che $F(a) = \int_a^a f'(t)\,dt = 0$

$F(b) = \int_a^b f'(t)\,dt$.

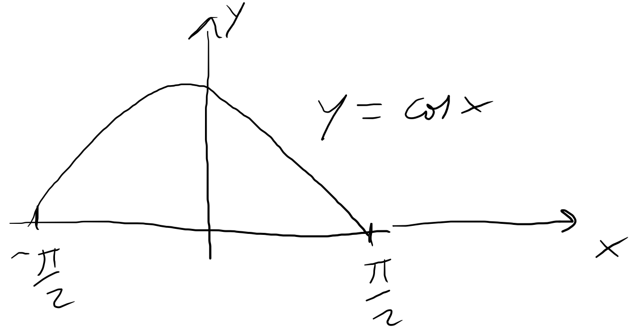
Pertanto $\int_a^b f'(t)\,dt = F(b) - F(a) =$

$F(x) = f(x) - c \quad \forall x \in [a,b]$

$= (f(b) - c) - (f(a) - c) =$

$= f(b) - \cancel{c} - f(a) + \cancel{c} = f(b) - f(a)$

Esempio



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}'(x) \, dx$$

$$\sin'(x) = \cos x$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

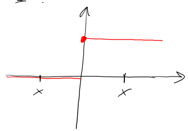
$$\sin x = -\cos'(x)$$
$$= (-\cos x)'$$

Def Dato $f: I \to \mathbb{R}$, I un intervallo, g si dice una primitiva di f in I se $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Una f che ammette primitive si dice primitivabile.

Es. Sia $f \in C^0(I)$, I un intervallo, allora f è primitivabile in I; Infatti $f \in L_{loc}(I)$ e per ogni $x_0 \in I$ la funzione $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è t.c. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Es $$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$H(x)$ non è primitivabile in $\mathbb{R}$

Supponiamo per assurdo che $\exists$ G in $\mathbb{R}$ t.c. $G'(x) = H(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$H \in L_{loc}(\mathbb{R})$. Sia $F(x) = \int_0^x H(t)\,dt$

Notare che se $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x 1\,dt = x$

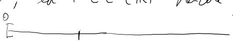
se $x < 0$ $F(x) = -\int_x^0 H(t)\,dt = -0\,(-x) = 0$

Consideriamo $(G(x) - F(x))' = 0$ $\forall x \neq 0$.

$(F'_d(0) = 1,\ F'_s(0) = 0)$

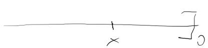
In $\mathbb{R}$ la funzione $G(x) - F(x)$ è continua perché $G \in C^0(\mathbb{R})$ perché è derivabile dappertutto in $\mathbb{R}$, ed $F \in C^0(\mathbb{R})$ perché è una funzione integrale

Su $[0, +\infty)$



$G(x) - F(x) = G(0) - F(0) = c$

Anche $(-\infty, 0]$

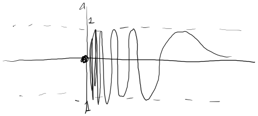


$G(x) - F(x) = G(0) - F(0) = c$

Allora $G(x) = F(x) + c$ su $\mathbb{R}$

si ottiene un assurdo perché non si può avere in contemporanea $F'_d(0) = 1$, $F'_s(0) = 0$ e $G'(0) = H(0)$ perché si deve avere $F'(0) = G'(0)$ ma questo è assurdo

Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ $\quad g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$$= 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos'\left(\frac{1}{x}\right) \left(x^{-1}\right)'$$

$$g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\cancel{-} \sin \frac{1}{x}\right) \left(\cancel{-} x^{-2}\right)$$

$$g'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = g'(x) - 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = g'(x) - h(x) = g'(x) - K'(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Qui $h \in C^0(\mathbb{R})$ e quindi è primitivabile su $\mathbb{R}$ con primitiva K con $K' = h$ in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) = g'(x) - K'(x) = (g-K)'(x) \quad \forall x \neq 0$$

Verifichiamo che quest'ultima riga è vera anche per $x = 0$

$f(0) = 0$ per definizione

$K'(0) = h(0) = 0$. Mi resta da verificare che $g'(0) = 0$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Allora $\quad f(0) = g'(0) - K'(0) = (g - K)'(0)$

e quindi $\quad f(x) = (g - K)'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\alpha \neq -1$
x^{-1}	$\lg\lvert x\rvert + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + C$	

$x > 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \tan x \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0$$

$$= 1$$

$$\int (x^2 + x + 3)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 3\,dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x\,dx + 3\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$\int_0^1 (x^2 + x + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\Big]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3$$

Teor (Integrazione per parti) Siano $f, g \in C^1(I)$ allora

$$\int f' g \, dx = f g - \int f g' \, dx \qquad (1)$$

e se $[a, b] \subseteq I$ allora

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx . \qquad (2)$$

Dim (1) si parte da $(fg)' = f' g + f g'$

$$f' g = (fg)' - f g'$$

$$\int f' g \, dx = \int \left((fg)' - f g' \right) dx$$

$$= \int (fg)' - \int f g' \, dx$$

$$= f g - \int f g' \, dx$$

(2) $\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx$

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, dx = \int f'(x) g(x) \, dx \Big]_a^b =$$

$$= \left(f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx \right) \Big]_a^b = f(x) g(x) \Big]_a^b - \int f(x) g'(x) \, dx \Big]_a^b$$

$$= f(x) g(x) \Big]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) \, dx$$