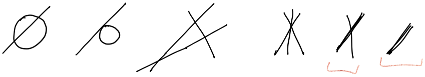
Lezione 4 dicembre 2023

lunedì 4 dicembre 2023 09:13

CUBICHE PIANE PROIETTIVE

Cons. cubiche IRRIDUCIBILI, su $\mathbb{C}$

No: riducibili



OSS.: $C = (Z_p(F), F)$

Nel caso irriducibile basta $C = Z_p(F)$.

VISTO: C cubica $\subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, irriducibile

$\Rightarrow$ # punti singolari ≤ 1

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \#\,\mathrm{Sing}\, S = 1 - \#\,\mathrm{Sing}\, S = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$g = 0$: C è razionale

$g = 1$: C è una CURVA ELLITTICA

Vogliamo dare una classif. proiettiva di tutte le cubiche irriducibili.

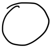
Def: C e C' sono PROI. EQUIV. se $\exists\, T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ proiettività t.c.

$$C' = T(C).$$

OSS.: La rel. di equiv. proiettiva è una relaz. di equivalenza.

OSS. Nel caso coniche proiettive in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$: se cons. le coniche irriducibili:

1 classe :



$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

INVARIANZA PER PROIETTIVITÀ:

Prop. : Sia $T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ curva , $r \subseteq \mathbb{P}^2$ retta, $r = Z_p(L)$

$r \not\subseteq Z_p(F)$.

Sia $\tilde{r} = T(r)$ retta , $\tilde{r} = Z_p\left(L\left(A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right)$

Ricordo $T(Z_p(F)) = Z_p(\tilde{F})$

$\boxed{T = [A]}$, $A \in GL(3, \mathbb{C})$

$$T(p_0, p_1, p_2) := \left[A \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

$$= \left[c A \cdot \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right]$$

Allora $\tilde{F}(x_0, x_1, x_2) := F\left(A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

Enunciato Prop : $\forall\, Q \in Z_p(F) \cap r$ si ha

$$I_Q(F, L) = I_{T(Q)}(\tilde{F}, \tilde{L})$$

Dim. $r = \lambda Q + \mu R$, $R \in r$, $Q \neq R$

$$F(\lambda Q + \mu R) = G(\lambda, \mu) = 0$$

e $I_Q(F, L)$ è la molt. alg. della radice $(1:0) = (\lambda : \mu)$ per $G(\lambda, \mu)$

Cons. $\underbrace{T(Z_p(F))}_{= Z_p(\tilde F)} \cap T(r)$ $\cap \tilde r$

$\tilde F(\lambda T(Q) + \mu T(R))$

$\tilde r = T(r) = T(\lambda Q + \mu R)$

$\overset{!}{=} \lambda T(Q) + \mu T(R)$

$= \tilde F(T(\lambda Q + \mu R))$

$= \tilde F(A \cdot (\lambda Q + \mu R))$

$= F(A^{-1} \cdot (A \cdot (\lambda Q + \mu R)))$

$= F((A^{-1} \cdot A) \cdot (\lambda Q + \mu R))$

$= F(\lambda Q + \mu R) = G(\lambda, \mu)$

COR: Le seguenti quantità sono invarianti per proiettività:

① $m_Q(Z_p(F)) = m_{T(Q)}(T(Z_p(F)))$

② r retta tg in Q $\Leftrightarrow$ $\tilde r = T(r)$ è tg a $Z_p(\tilde F)$ in $T(Q)$

③ Q è flesso per $Z_p(F)$ $\Leftrightarrow$ $T(Q)$ è flesso per $Z_p(\tilde F) = T(Z_p(F))$

Passo alle cubiche:

TEO.: Sia $C = Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ irriducibile, $d = 3$, singolare. Allora:

① se C ha un nodo $\Rightarrow$ è proiett. equiv. a $x_1^3 + x_2^3 + x_0 x_1 x_2 = 0$

eq. affine in U_0 $x^3+y^3+xy=0$: nodo in $(0,0)$
tg. $x=0$, $y=0$

② se C ha una cuspide ⟹ è proiett. equiv.

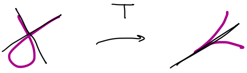
e $x_1^3+x_0x_2^2=0$

eq. affine in U_0 : $x^3+y^2=0$.

In particolare, tutte le cubiche nodate sono proi. eq.

e tutte le cubiche cuspidate sono proi. eq.

Domanda: ① & ② sono proi. equiv.?

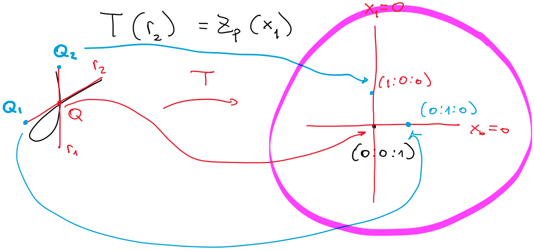


tg ⟶ tg ; impossibile, T non sarebbe iniettiva.

Dim.: ① C cubica nodale, $Q\in \operatorname{Sing} C$ nodo; $r_1\neq r_2$ siano le tg distinte in Q

Cons.: $T:\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$T(Q)=(0:0:1)$$
$$T(r_1)=Z_p(x_0)$$
$$T(r_2)=Z_p(x_1)$$



L'eq affine della curva immagine in $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longleftrightarrow \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right) = (x, y) \qquad U_2 \cong A^2$$

$$(0:0:1) \longleftrightarrow (0,0)$$

tg: $x = 0$ & $y = 0$

l'unione delle 2 tg ha eq. $x \cdot y = 0$

$$f:\ xy + a x^3 + b x^2 y + c x y^2 + d y^3 = 0$$

$$F = hf = \boxed{x_0 x_1 x_2 + a x_0^3 + b x_0^2 x_1 + c x_0 x_1^2 + d x_1^3}$$

rispetto x_2

osservo che $a \cdot d \neq 0$

infatti: se $a = 0$, $f = y \cdot (x + b x^2 + c x y + d y^2)$

$\Rightarrow$ f e quindi F sarebbero riducibili

analog. se $d = 0$, sarebbe riducibile.

Cons. una seconda proiettività $S : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

t.c. S^{-1} ha equazioni:

→ una qualunque radice cubica

$$S^{-1}: \begin{cases} x_0 = \sqrt[3]{d^{-1}}\, y_0 \\ x_1 = \sqrt[3]{a^{-1}}\, y_1 \\ x_2 = -c\sqrt[3]{d^{-1}}\, y_0 - b\sqrt[3]{a^{-1}}\, y_1 + \sqrt[3]{ad}\, y_2 \end{cases}$$

$$S(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$$

$$S^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = (x_0 : x_1 : x_2)$$

cioè: $S^{-1} = [B]$

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{d^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{a^{-1}} & 0 \\ -c\sqrt[3]{d^{-1}} & -b\sqrt[3]{a^{-1}} & \sqrt[3]{ad} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO: Sostituendo $S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in F si trova

$$\tilde{F}(y_0, y_1, y_2) = y_1^3 + y_2^3 + y_0 y_1 y_2$$

② C cubica con cuspide, Q cuspide

Cons. $T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ t.c.

$$T(Q) = (1:0:0) \in U_0$$

retta tg r : $T(r) = \tilde{r} = Z_p(x_1)$

eq. affine in $U_0 \cong \mathbb{A}^2$: $y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$

$(1:0:0) \to (0,0)$

$(x_0:x_1:x_2) \to \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = (x,y)$

F : $x_0x_2^2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_2 + c x_1 x_2^2 + d x_2^3 = 0$

$(1:x:y) \longleftarrow (x,y)$

Cons. seconda proiettività $S: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con

S^{-1} data da:

$$S^{-1} : \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 - \frac{b}{3a} y_0 \\ x_2 = y_2 + \left(\frac{b^2}{3a} - c\right) y_1 \end{cases}$$

si trova un' equazione del tipo

$$y_0 y_2^2 + a y_1^3 + \delta = 0$$

e con l'ulteriore proiettività:

$$Z^{-1} : \begin{cases} y_0 = z_0 \\ y_1 = -\sqrt[3]{a^{-1}}\, z_1 \\ y_2 = z_2 - \delta z_0 \end{cases}$$

si trova $z_0 z_2^2 - z_1^3 = 0$.

Questo conclude la questione della class. delle cubiche irrid. singolari.

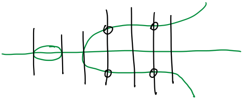
CASO CUBICHE LISCE in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

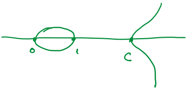
Teo: Ogni cubica irr. liscia in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiett. equivalente a:

$$\circledast \quad x_0 x_2^2 = x_1(x_1-x_0)(x_1-\underset{\downarrow}{\boxed{c}}\,x_0) \qquad c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,\ c \neq 1$$

ovvero: in U_0: $\boxed{y^2 = x(x-1)(x-c) \quad \text{FORMA DI LEGENDRE}}$

Esercizio: il pol. di Legendre è irriducibile, e def. una curva liscia.





oss: le eq. $\circledast$ sono INFINITE

Domanda: per valori diversi di c, $c \neq 0$, $c \neq 1$, ottengo cubiche proiettiv. eq. o no?

$$\boxed{y^2 = x(x-1)(x-c)}$$

Risposta è: NO in generale.

Vedremo: le classi di eq. proiettive sono INFINITE.

Esercizio: Trovare tutti i flessi di $\circledast$.

Ricordo: # flessi $\leq 3 \cdot d(d-2) = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$

Spoiler: 9 flessi.

Teo: Ogni cubica liscia di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è proiett. equivalente alla cubica di eq.:

$F:\quad x_0 x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_1 x_0^2 - g_3 x_0^3$

in U_0: $\quad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ FORMA DI WEIERSTRASS

$$g_2, g_3 \in \mathbb{C}, \quad \text{t.c.} \quad \underline{g_2^3 - 27 g_3^2} \neq 0$$

ESERCIZIO: $Z_p(F)$ è liscia $\Longleftrightarrow$ $h(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$
Non ha radice multiple

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta(h)}{4} = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$$

$$\Delta(h) := R_x(h, h')$$