Esercizi di Geometria
2023/2024 - ottavo foglio

December 4, 2023

1. Per la seguente matrice reale A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   trovare matrici quadrate invertibili S e T tali che SAT sia una matrice a blocchi della forma canonica $\begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & - & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

2. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 nella indeterminata t. Considerare i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1(t) = -1 + t$, $q_2(t) = -1 + t - t^2$, $q_3(t) = 2t + 2t^2$. Dimostrare che $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3)$ e $\mathcal{B} = (q_1, q_2, q_3)$ sono due basi di V e determinare le matrici di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e da $\mathcal{B}$ ad $\mathcal{A}$.

3. Denotiamo con E_{ij} una matrice avente tutti gli elementi nulli, tranne quello di posto ij uguale a 1. Denotiamo poi con $E_{\lambda,i}$ una matrice quadrata diagonale avente sulla diagonale principale gli elementi

$$1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1$$

   con λ al posto d'indice i. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in K.

   (a) Calcolare il prodotto righe per colonne $E_{ij}A$ dove E_{ij} è di ordine $m \times m$;
   (b) analogamente calcolare $E_{\lambda,i}A$;
   (c) dedurre che le matrici ottenute da A con una trasformazione elementare si possono esprimere nella forma MA, con M matrice opportuna.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(Suggerimento: usare opportune trasformazioni elementari...)

6. Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è invertibile.