Variabili Aleatorie Multivariate

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vettore di variabili aleatorie

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

  - per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ poniamo

  $$I_{\boldsymbol{x}} = I_{x_1,\dots,x_n} = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$$

  iper-rettangolo chiuso illimitato
  - $\boldsymbol{X}$ è $\mathscr{F}$ misurabile se e solo se ogni X_i è $\mathscr{F}$ misurabile (p. 85)

Variabili Aleatorie Multivariate

- Misura immagine di X: per ogni $B \in \mathscr{B}^n$,

$$P_{\boldsymbol{X}}(B) = P(\boldsymbol{X} \in B) = P(\boldsymbol{X}^{-1}(B))$$

probabilità su $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$

- Funzione di ripartizione congiunta di $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{X}}(x) &= P_{\boldsymbol{X}}(I_{\boldsymbol{x}}) \\ &= P(\boldsymbol{X} \in I_{\boldsymbol{x}}) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \end{aligned}$$

per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $F_{\mathbf{X}}$

1. $F_{\mathbf{X}}$ non decrescente: se $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ con $x_i \leq y_i$ per ogni i

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n)$$

2. $F_{\mathbf{X}}$ continua "da sopra": per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{y_1 \downarrow x_1, \ldots, y_n \downarrow x_n} F_{\mathbf{X}}(y_1, \ldots, y_n) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

3. limiti: per ogni i fissato e per ogni $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

inoltre

$$\lim_{x_1 \uparrow +\infty, \ldots, x_n \uparrow +\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $F_{\boldsymbol{X}}$

4. per ogni $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$

$$\Delta^{(1)}_{a_1,b_1}\Delta^{(2)}_{a_2,b_2}\ldots\Delta^{(n)}_{a_n,b_n}F_{\boldsymbol{X}} \geq 0$$

dove

$$\Delta^{(i)}_{a,b}g(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,b,\ldots,x_n) - g(x_1,\ldots,a,\ldots,x_n)$$

(in posizione i-esima)

5. per ogni iper-rettangolo limitato $I = (a_1,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n]$ con $a_i < b_i$ per ogni i,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{X} \in I) =& P(a_1 < X_1 \leq b_1, \ldots, a_n < X_n \leq b_n) \\ =& \Delta^{(1)}_{a_1,b_1}\Delta^{(2)}_{a_2,b_2}\ldots\Delta^{(n)}_{a_n,b_n}F_{\boldsymbol{X}} \end{aligned}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $F_{\boldsymbol{X}}$
  6. per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} & P(\boldsymbol{X} \in \operatorname{Int}(I_{\boldsymbol{x}}) = \\ = & P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n) \\ = & \lim_{y_1 \uparrow x_1, \ldots, y_n \uparrow x_n} F_{\boldsymbol{X}}(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

  7. per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} & P(\boldsymbol{X} \in \operatorname{Fr}(I_{\boldsymbol{x}}) = \\ = & P(X_i \leq x_i \text{ per ogni } i, \text{ esiste } j \text{ tale che } X_j = x_j) \\ = & F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n) - \lim_{y_1 \uparrow x_1, \ldots, y_n \uparrow x_n} F_{\boldsymbol{X}}(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

  dove $\operatorname{Fr}(B) = B - \operatorname{Int}(B)$
- Osservazione: $P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \not\Rightarrow$ $F_{\boldsymbol{X}}$ continua

Variabili Aleatorie Multivariate

- Teorema: per ogni funzione $F : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ che soddisfa (2), (3), (4) (nota come funzione di ripartizione congiunta)
  - esiste un unica probabilità P su $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$ tale che
  $$P(I_{\boldsymbol{x}}) = F(x_1, \dots, x_n)$$
  per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
  - esiste un vettore di va $\boldsymbol{X}$ su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ tale che $F_{\boldsymbol{X}} = F$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Distribuzioni marginali
  - la marginale univariata di X_i si ottiene con

$$F_{X_i}(x) = \lim_{x_j \to +\infty, j \neq i} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

  - se $J \subset \{1, \ldots, n\}$, la marginale congiunta di

$$X_J = [X_i, \, i \in J]$$

si ottiene con

$$F_{X_J}(x_i, \, i \in J) = \lim_{x_j \to +\infty, j \notin J} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Caso discreto:
  - tutte le variabili sono discrete: X_i ha valori $x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}, \dots$
  - massa di probabilità congiunta: per ogni $j_1, \dots, j_n$

$$p_{j_1,\dots,j_n} = P(X_1 = x_{j_1}^{(1)}, \dots, X_n = x_{j_n}^{(n)})$$

  - basta assegnare

$$p_{j_1,\dots,j_n} \geq 0 \qquad \text{per ogni } j_1, \dots, j_n$$
$$\sum_{j_1,\dots,j_n} p_{j_1,\dots,j_n} = 1$$

e la cdf congiunta è

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{x_{j_1}^{(1)} \leq x_1, \dots, x_{j_n}^{(n)} \leq x_n} p_{j_1,\dots,j_n}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà della massa di probabilità congiunta
  - [masse marginali] si ottengono sommando rispetto agli indici delle variabili rimanenti: la massa di prob. di X_i è

$$P(X_i = x_i) = \sum_{\underbrace{j_1, \dots, j_n}_{\text{tutte tranne } i}} p_{j_1,\dots,i,\dots,j_n}$$

- Esercizio. Trovare la legge congiunta del minimo U e massimo V di 2 dadi

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esempio. Distribuzione multinomiale: n prove indipendenti, ognuna delle quali può avere k esiti mutualmente esclusivi con prob. $p_1, \ldots, p_k \geq 0$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$; $X_i =$ numero di volte in cui si verifica l'esito i

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k) &= \frac{n!}{j_1! \ldots j_k!} p_1^{j_1} \cdots p_k^{j_k} \quad \text{se } j_1 + \ldots + j_k = n \\
&= 0 \qquad \text{altrimenti}
\end{aligned}
$$

le marginali sono Binomiali(n, p_i)

Variabili Aleatorie Multivariate

- Caso continuo: la cdf congiunta $F_{\boldsymbol{X}}$ è continua,

$$P(\boldsymbol{X} \in \mathrm{Fr}(I_x)) = 0$$

per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

  - ogni marginale è continua (non viceversa!)
  - tipicamente, nel caso assolutamente continuo, si assegna una densità congiunta $f_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, integrabile, tale che

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \geq 0 \text{ per ogni } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$$

e allora

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

è una cdf multivariata continua

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà della densità congiunta
  - [Densità marginali] si ottengono integrando rispetto alle variabili rimanenti: la densità marginale di X_i è

$$f_{X_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \underbrace{\mathrm{d}x_1, \ldots \mathrm{d}x_n}_{\text{tutte tranne } x}$$

  - [Densità da funzione di ripartizione]:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial F_{\boldsymbol{X}}}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \qquad \text{q.o.}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà della distribuzione congiunta:
  - [Integrazione rispetto alla misura immagine] se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è misurabile e tale che $g(X) \in L^1$ o $g \geq 0$

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) \mathrm{d}P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

  - [Caso discreto]

$$E[g(X)] = \sum_{j_1, \dots, j_n} g(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) p_{j_1, \dots, j_n}$$

  - [Caso continuo con densità]

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  - $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ va sono indipendenti se sono indipendenti le σ-algebre
  $$(\sigma(X_\alpha))_{\alpha \in I}$$
  - per ogni $\alpha \in I$, $\mathscr{X}_\alpha$ è un insieme di va
  $(\mathscr{X}_\alpha)_{\alpha \in I}$ sono indipendenti se sono indipendenti le σ-algebre
  $$(\sigma(X, X \in \mathscr{X}_\alpha))_{\alpha \in I}$$
  - le va in ogni $\mathscr{X}_\alpha$ potrebbero non essere indipendenti; in particolare ogni $\mathscr{X}_\alpha$ potrebbe essere un vettore di va

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^T$ vettore di va; le seguenti proprietà sono equivalenti

  1. $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti:

     $$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n)$$

     per ogni $B_1, \ldots, B_n \in \mathscr{B}$
  2. per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

     $$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

  3. per ogni $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabili tali che tutte le variabili sono integrabili,

     $$E[g_1(X_1) \cdots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)] \cdots E[g_n(X_n)]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\top$ vettore di va; le seguenti proprietà sono equivalenti

4. [Funzione caratteristica] per ogni $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}^\top \boldsymbol{X}}] = \varphi_{X_1}(t_1) \cdots \varphi_{X_n}(t_n)$$

5. [Caso discreto] per ogni $j_1, \ldots, j_n$

$$p_{j_1, \ldots, j_n} = p_{j_1}^{(1)} \cdots p_{j_n}^{(n)}$$

dove $p_j^{(i)} = P(X_i = x_j^{(i)})$ è la massa di prob. marginale di X_i

6. [Caso continuo con densità] per ogni $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esercizio. Esponenziale bivariata: per $-1 \leq \alpha \leq 1$

$$F_{X,Y}(x,y) = (1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y})(1+\alpha\mathrm{e}^{-x-y}), \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

1. verificare che si tratta di una cdf bivariata
2. verificare che le marginali sono esponenziali standard
3. mostrare che X, Y sono indipendenti se e solo se $\alpha = 0$
4. trovare la pdf congiunta
5. calcolare $E[XY]$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Calcolo di speranze iterate - Teorema di Fubini
  - X, Y va indipendenti,
    $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ misurabile con $g(X, Y) \in L^1$ oppure $g \geq 0$
    allora
    $$E[g(X, Y)] = E[E[g(x, Y)]|_{x=X}]$$
    in particolare, per ogni $B \in \mathscr{B}^2$
    $$P((X, Y) \in B) = E[P((x, Y) \in B)|_{x=X}]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Esercizio. Calcolare la legge di $X + Y$ se X, Y sono indipendenti e X, $Y \sim \text{Exp}(1)$

- Esercizio. Calcolare la legge di U/V se U, V sono indipendenti e U, $V \sim U(0, 1)$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Covarianza: se X, $Y \in L^2$, si definisce

$$\mathrm{COV}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- Proprietà: se X, Y, $Z \in L^2$
  - $\mathrm{COV}[X,X] = \mathrm{VAR}[X]$; $\mathrm{COV}[X,Y] = 0$ se Y degenere
  - $\mathrm{COV}[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
  - [Simmetria] $\mathrm{COV}[X,Y] = \mathrm{COV}[Y,X]$
  - [Bilinearità] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{COV}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha \mathrm{COV}[X,Z] + \beta \mathrm{COV}[Y,Z]$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$
  - [Indipendenza] $\mathrm{COV}[X,Y] = 0$ se X, Y indipendenti (non viceversa!)
  - [Varianza della somma]

    $$\mathrm{VAR}[X+Y] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y] + 2\mathrm{COV}[X,Y]$$

    e quindi

    $$\mathrm{VAR}[X+Y] = \mathrm{VAR}[X] + \mathrm{VAR}[Y]$$

    se X, Y indipendenti
  - [Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz]

    $$|\mathrm{COV}[X,Y]| \leq \sqrt{\mathrm{VAR}[X]\mathrm{VAR}[Y]}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Coefficiente di correlazione (di Pearson): se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$, si definisce

$$\rho_{X,Y} = \mathrm{CORR}[X, Y] = \frac{\mathrm{COV}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{VAR}[X]\mathrm{VAR}[Y]}}$$

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
  - [Simmetria] $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$
  - [Invarianza di scala e locazione] per ogni $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\rho_{\alpha X+\beta,Y} = \rho_{X,Y}$
  - [Normalizzazione] $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ e $|\rho_{X,Y}| = 1 \iff Y = \alpha X + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\mathrm{sgn}(\alpha) = \mathrm{sgn}(\rho_{X,Y}))$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà: se $X, Y \in L^2$, $\sigma_X^2 \sigma_Y^2 > 0$
  - [Indipendenza] $\rho_{X,Y} = 0$ se X, Y indipendenti
  - [Regressione lineare di Y su X] il problema

$$\min_{a,b} E[(Y-(aX+b))^2]$$

ha soluzione $\widehat{a}, \widehat{b}$ tale che

$$\widehat{a} = \rho_{X,Y} \sqrt{\frac{\mathrm{VAR}[X]}{\mathrm{VAR}[Y]}}$$

inoltre

$$R^2 = 1 - \frac{E[(Y-(\widehat{a}X+\widehat{b}))^2]}{\mathrm{VAR}[Y]} = \rho_{X,Y}^2$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^\mathsf{T}$ vettore di va con $X_i \in L^2$ per ogni i; la matrice varianze-covarianze è

$$\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]_{i,j} = \mathrm{COV}[X_i, X_j], \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

- Proprietà di $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$
  - [Simmetria] $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ è simmetrica
  - [Linearità] per ogni A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + b$$

vettore di va in $\mathbb{R}^m$ con

$$E[\boldsymbol{Y}] = AE[\boldsymbol{X}] + b, \qquad \mathrm{COV}[\boldsymbol{Y}] = A\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]A^\mathsf{T}$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Proprietà di $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$
  - $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]_{ii} = \mathrm{VAR}[X_i]$
  - $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ è semi definita positiva: per ogni $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{z}^{\mathsf{T}} \mathrm{COV}[\boldsymbol{X}] \boldsymbol{z} \geq 0$$

  - se $\mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$ non è di rango pieno, esiste una combinazione lineare di $X_1, \ldots, X_n$ degenere (relazione lineare tra le variabili)
- Proprietà simili valgono per la matrice di correlazione

$$\mathrm{CORR}[\boldsymbol{X}]_{i,j} = \rho_{X_i, X_j}, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

Variabili Aleatorie Multivariate

- Normale multivariata: $\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]$ è normale se per ogni $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$z_1 X_1 + \ldots + z_n X_n$$

  è normale univariata (una va degenere è normale di varianza 0)

  - tutte le marginali (univariate e multivariate) sono normali
  - ogni trasformazione lineare è normale (univariata o multivariata)
  - posto $\mu = E[\boldsymbol{X}]$ e $\Sigma = \mathrm{COV}[\boldsymbol{X}]$, se Σ è di rango pieno allora la pdf di $\boldsymbol{X}$ è

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \mu)^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \mu) \right\}$$