Tutorato di Analisi 1 - Studio di Funzione

Riccardo Berforini D'Aquino

4 Dicembre 2023

Esercizio. Si studi la funzione

$$f(x) = \left| \frac{x^2-4}{x^2+4} \right| - \frac{1}{2}.$$

Dominio. In questo caso gli unici punti da escludere sono quelli in cui si annulla il denominatore, ovvero dobbiamo imporre

$$x^2 + 4 \neq 0$$

ma questo è vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

Limiti agli estremi del dominio e asintoti. Prima di continuare, poiché $f(x)$ contiene un valore assoluto, conviene riscriverla per casi eliminando i valori assoluti. In questi casi ricordiamoci che

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+4} - \frac{1}{2} & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ \\ \frac{4-x^2}{x^2+4} - \frac{1}{2} & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2+4} - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 2 \text{ o } x \leq -2 \\ \\ \frac{4-x^2}{x^2+4} - \frac{1}{2} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

ovvero

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-12}{2(x^2+4)} & \text{se } x \leq -2 \\ \\ \frac{4-3x^2}{x^2+4} & \text{se } -2 < x < 2 \\ \\ \frac{x^2-12}{2(x^2+4)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

dove entrambe le scritture sono comode, in base a cosa dobbiamo calcolare. In questo caso ci interessano i limiti a $+\infty$ e $-\infty$, per cui prestiamo attenzione nel primo caso ad utilizzare la formula di f per $x \geq 2$ e nel secondo caso la formula di f per $x \leq 2$. Otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-12}{2(x^2+4)} = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-12}{2(x^2+4)} = \frac{1}{2}$$

dove in entrambi i casi facciamo attenzione al fatto che ci stiamo avvicinando a $\frac{1}{2}$ *da sotto*. Possiamo dunque concludere che $y = \frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale.

Simmetrie. f è una funzione pari, infatti

$$f(-x) = \left|\frac{(-x)^2-4}{(-x)^2+4}\right| - \frac{1}{2} = \left|\frac{x^2-4}{x^2+4}\right| - \frac{1}{2} = f(x).$$

Intersezioni con gli assi e segno. Siccome $f(0) = \frac{1}{2}$, il grafico della funzione interseca l'asse y nel punto $(0, \frac{1}{2})$. Per trovare gli zeri è comoda la seconda rappresentazione di f. Ricordiamo che una frazione si annulla se e solo se si annulla il suo numeratore, quindi

$$f(x) = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 12 = 0 \\ x \geq 2 \ \text{ o } \ x \leq -2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 4 - 3x^2 = 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Risolvendo questi due sistemi otteniamo le quattro soluzioni (simmetriche rispetto all'asse y, come ci aspettavamo),

$$(2\sqrt{3}, 0), \quad (-2\sqrt{3}, 0), \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Per trovare il segno di f non dobbiamo fare altro che risolvere gli stessi sistemi, con una disequazione al posto dell'equazione (infatti il denominatore di f è positivo in tutti gli intervalli). Quindi

$$f(x) > 0 \iff \begin{cases} x^2 - 12 > 0 \\ x \geq 2 \ \text{ o } \ x \leq -2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} 4 - 3x^2 > 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Quello che troviamo è

$$f(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right).$$

Derivata prima e suo segno. Massimi e minimi. Per calcolare la derivata di f è utile la prima forma in cui l'abbiamo scritta senza aver fatto il denominatore comune, visto che la derivata delle costanti è 0. Ricordiamo che i punti 2 e -2 sono punti di *raccordo* tra due parti di f definite diversamente, quindi per ora limitiamoci a derivare f in $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Utilizzando la formula per la derivata di un quoziente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

otteniamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{16x}{(x^2+4)^2} & \text{se } x > 2 \text{ o } x < -2 \\ \\ -\frac{16x}{(x^2+4)^2} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

osserviamo che

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{16x}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2^+} -\frac{16x}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}.$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{16x}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} -\frac{16x}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Pertanto f non è derivabile in -2 e 2.
Osserviamo che la derivata di f si annulla solamente in $x = 0$. Per calcolarne il segno dobbiamo distinguere i casi come prima.

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} \frac{16x}{(x^2+4)^2} > 0 \\ x \geq 2 \quad \text{o} \quad x \leq -2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} -\frac{16x}{(x^2+4)^2} > 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Quello che troviamo è

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty).$$

Intervalli	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Segno f'	-	+	-	+
f	decrescente	crescente	decrescente	crescente

da cui possiamo concludere che $x = -2$ e $x = 2$ sono punti di minimo relativo (e assoluto, visto il comportamento globale della funzione) mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo e assoluto (in cui la derivata si annulla, mentre ricordiamo che gli altri due punti sono di non derivabilità).

Derivata seconda e suo segno. Intervalli di convessità e concavità. Deriviamo la f esclusivamente nei punti in cui ammetteva derivata prima, utilizzando ancora una volta la regola di derivazione di un quoziente. Otteniamo

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3} & \text{se } x > 2 \text{ o } x < -2 \\ \\ -\frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Osserviamo che f'' si annulla solamente in $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, che sono due punti di flesso. Per calcolarne il segno dobbiamo distinguere i casi come prima.

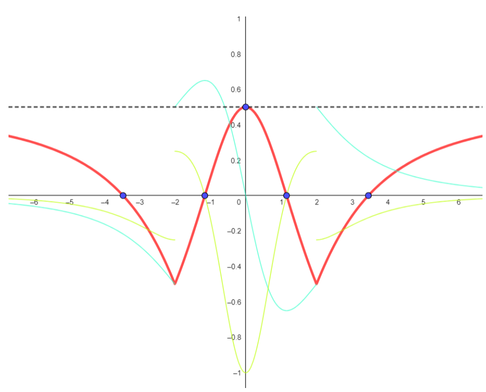
$$f''(x) > 0 \iff \begin{cases} \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3} > 0 \\ x \geq 2 \quad \text{o} \quad x \leq -2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} -\frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3} > 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Quello che troviamo è

$$f''(x) > 0 \iff x \in \left(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right).$$

Intervalli	$\left(-\infty, -2\right)$	$\left(-2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$	$\left(2, +\infty\right)$
Segno f''	-	+	-	+	-
f	concava	convessa	concava	convessa	concava

Grafico.



In blu le intersezioni con gli assi (due delle quali coincidono con i punti di flesso), in rosso il grafico di f, in azzurro quello di f', in giallo quello di f''.