Gruppo fondamentale

Def. Uno *spazio puntato* (X, x_0) è uno spazio topologico X con $x_0 \in X$.

Def. Lo *spazio dei cappi* di (X, x_0) è l'insieme

$$\Omega(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha\colon I \to X \mid \alpha \text{ continua e } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

x_0 lo riguardiamo anche come cappio costante (*cappio banale*).
$\simeq_{\{0,1\}}$ relazione d'equivalenza su $\Omega(X, x_0) \rightsquigarrow [\alpha]$ *classe di* $\alpha \in \Omega(X, x_0)$.
Per brevità la indichiamo con $\sim$.

$$\begin{aligned} \text{Dati } \alpha_0, \alpha_1 \in \Omega(X, x_0),\ \alpha_0 \sim \alpha_1 \Leftrightarrow \exists\, H\colon I^2 \to X \ &\text{ continua t.c.} \\ h_0 = \alpha_0,\ h_1 &= \alpha_1 \\ h_s(0) = h_s(1) &= x_0,\ \forall\, s \in I. \end{aligned}$$

Consideriamo l'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_0) \overset{\text{def}}{=} \Omega(X, x_0)/{\sim} = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}.$$

Definiamo la seguente operazione binaria su $\pi_1(X, x_0)$

$$[\alpha] \cdot [\beta] \overset{\text{def}}{=} [\alpha \cdot \beta],\ \forall\, [\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0).$$

Teor. *$\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo rispetto a questa operazione, con elemento neutro $1 = [x_0]$ e $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.*

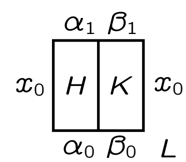
Def. $\pi_1(X, x_0)$ si chiama *gruppo fondamentale* di X con *punto base* x_0.

Dim. $\boxed{[\alpha][\beta] \text{ Ben definito}}$ Mostriamo che non dipende dai rappresentanti.

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 \sim \alpha_1 &\ \rightsquigarrow\ H\colon I^2 \to X \\ \beta_0 \sim \beta_1 &\ \rightsquigarrow\ K\colon I^2 \to X \end{aligned}\right\} \text{omotopie rel } \{0, 1\}.$$

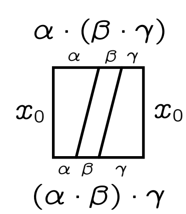
$$L\colon I^2 \to X \quad L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ K(2t-1, s), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\alpha_0 \cdot \beta_0 \sim \alpha_1 \cdot \beta_1$$



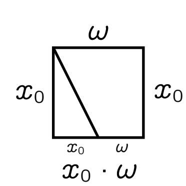
$\boxed{\text{Proprietà associativa}}$

$$\begin{aligned} [\alpha]([\beta][\gamma]) &= [\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma] \\ &= ([\alpha][\beta])[\gamma] \end{aligned}$$



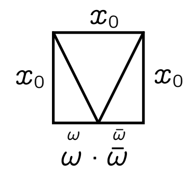
$\boxed{\text{Elemento neutro}}$

$$[x_0][\omega] = [x_0 \cdot \omega] = [\omega]$$
$$[\omega][x_0] = [\omega \cdot x_0] = [\omega]$$



$\boxed{\text{Inverso}}$

$$[\omega][\omega]^{-1} = [\omega \cdot \bar{\omega}] = [x_0]$$
$$[\omega]^{-1}[\omega] = [\bar{\omega} \cdot \omega] = [x_0]$$



$\square$

Oss. Analoghe proprietà algebriche valgono anche per prodotti di cammini (se il prodotto ha senso). La dimostrazione è la stessa.

Oss. $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = 0$ (l'unico cappio è quello banale).

Funtorialità.

$f : X \to Y$ continua t.c. $f(x_0) = y_0 \rightsquigarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$

Teor. *f_* è un omomorfismo di gruppi.* $\qquad f_*([\alpha]) \overset{\text{def}}{=} [f \circ \alpha]$

Def. f_* è detto *omomorfismo indotto da f*.

Dim. f_* ben definita perché $\simeq_{\{0,1\}}$ compositiva.
Scrivendo esplicitamente la formula si verifica subito l'identità

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta).$$

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= f_*([\alpha \cdot \beta]) \\ &= [f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha)][(f \circ \beta)] = f_*([\alpha]) f_*([\beta]). \end{aligned}$$ $\square$

Scriviamo $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ per dire che $f(x_0) = y_0$.

Teor (di funtorialità)**.** *$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ continue $\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Dim.

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= g_*(f_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha]). \end{aligned}$$ $\square$

Oss. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Oss. $f : (X, x_0) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0)$ omeo $\Rightarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo con inversa $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$. Quindi π_1 è un *invariante topologico*.

Oss. $c \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ costante $\Rightarrow c_* = 1$ (omomorfismo banale).

Teor (Invarianza omotopica)**.** *$f, g \colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ continue t.c. $f \simeq_{x_0} g$ $\Rightarrow f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Dim. $\exists\, H : X \times I \to Y$ omotopia rel x_0, $h_0 = f$, $h_1 = g$, $h_s(x_0) = y_0$, $\forall s$.
$\forall\, [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \rightsquigarrow K : I^2 \to Y,\ K(t, s) := H(\alpha(t), s) \Rightarrow$
$f_*([\alpha]) = g_*([\alpha])$. $\square$