martedì 5 dicembre 2023 09:25

Teo: Ogni cubica nonsingolare $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$,

$C = Z_p(F)$, è proiett. equivalente a

$$x_0 x_2^2 = x_1(x_1 - x_0)(x - c\,x_0) \qquad c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,\ c \neq 1$$

$y^2 = x(x-1)(x-c)$ FORMA DI LEGENDRE.

Dim.: $C = Z_p(F)$

H_F hessiano, $\deg H_F = 3$

Sing $C = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists$ almeno 1 flesso Q

$\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}}$

Bezout $\Rightarrow$

$C \cap Z_p(H_F) \neq \emptyset$

Cons. una proiettività t.c. $T(Q) = (0:0:1) \in U_2$

$T: \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

& t.c. tg di flesso $t_Q C$: $T(t_Q C) = Z_p(x_0)$

l'eq. affine in $U_2 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$= \{x_2 \neq 0\}$

$U_2 \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$(x_0 : x_1 : x_2) \to \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2}\right) = (z, w)$

$(z : w : 1) \longleftarrow (z, w)$

$x_0 \leftrightarrow z$

Ora: il flesso è $(0,0)$

con tg. $z = 0$.

in $U_2 \cong \mathbb{A}^2$ l'eq è:

$z + \cancel{\delta} \cdot w^2 + \alpha z w + \beta z^2 + a w^3 + b w^2 z + c w z^2 + d z^3 = 0$

flesso in $(0,0)$: quando interseco con $z = 0$

la molt. di int. in $(0,0)$ è ≥ 3

$z = 0$

$\delta w^2 + a w^3 = 0$ la radice $w = 0$ ha

molt. alg. $\geq 3 \iff \delta = 0.$

$z + \alpha z w + \beta z^2 + a w^3 + b w^2 z + c w z^2 + d z^3 = 0$

Nel proiettivo : torno in $U_2 \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

omogeneizzo risp. a x_2:

$x_0 x_2^2 + \alpha x_0 x_1 x_2 + \beta x_0^2 x_2 + a x_1^3 + b x_1^2 x_0 + c x_1 x_0^2 + d x_0^3 = 0$

Riscrivo l'equazione nella seguente forma :

$x_0 x_2^2 + 2 x_0 x_2 \left(\frac{\alpha}{2} x_1 + \frac{\beta}{2} x_0\right) + a x_1^3 + b x_1^2 x_0 + c x_1 x_0^2 + d x_0^3 = 0$

e cons. una seconda proiettività $S : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

t.c.

$$S^{-1} : \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - \frac{\alpha}{2} y_1 - \frac{\beta}{2} y_0 \end{cases}$$

con questa sostituzione troviamo un'equazione del tipo

$y_0 y_2^2 + P(y_0, y_1) = 0$ con P polinomio

omogeneo di grado 3.

in U_0 : $y^2 = a' x^3 + b' x^2 + c' x + d'$

siamo in $\mathbb{C}$: $y^2 = a'(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$

cons. una affinità:

$$A^{-1} : \begin{cases} x = (\alpha_2 - \alpha_1)\,\bar{x} + \alpha_1 \\ y = \sqrt{a'(\alpha_2 - \alpha_1)^3}\;\bar{y} \end{cases}$$

$$c := \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

oss.: Siccome C è non singolare (liscia) le tre radici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono tutte diverse tra loro (esercizio).

$$\Longrightarrow \quad \bar{y}^2 = \bar{x}\,(\bar{x} - 1)\,(\bar{x} - c)$$

Def.: Data $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cubica liscia

e sia $y^2 = x\,(x-1)\,(x-c)$ la sua rapp. di Legendre
$c \neq 0,\ c \neq 1$

il MODULO di C è

$$j(c) := \frac{(c^2 - c + 1)^3}{\underbrace{c^2\,(c-1)^2}_{\neq 0}}$$

Teo: Se $\underset{y^2 = x(x-1)(x-c)}{C} \cong \underset{y^2 = x(x-1)(x-c')}{C'}$ proiettivamente equivalenti

$$\Longleftrightarrow \quad j(c) = j(c')$$

cioè: $j(c)$ è un INVARIANTE PROIETT. che individua la classe di equiv. proiettiva.

Dim.: Idea:

$$\text{Se } C \cong C' \;; \quad \begin{array}{c} C \cong Z_p\big(h(y^2 - x(x-1)(x-c))\big) \\ \wr\wr \\ C' \end{array}$$

⇒ possiamo scegliere come modello di Legendre per C' una curva con $c' = c$.

$\Rightarrow j(c) = j(c')$.

Viceversa: Supp. $j(c) = j(c')$, con $c' \neq c$

Osservo che c' è radice del polinomio

$$Q(x) := (x^2 - x + 1)^3 - j(c) \cdot x^2 \cdot (x-1)^2$$

$$j(c) := \frac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2 (c-1)^2} = \frac{(c' - c' + 1)^3}{(c')^2 (c'-1)^2}$$

$$Q(c') = 0$$

il polinomio $Q(x)$ ha grado 6

⇒ ha 6 radici (contate con molteplicità)

e le sue radici sono:

$$\left\{ c,\ 1/c,\ 1-c,\ \frac{1}{1-c},\ \frac{c-1}{c},\ \frac{c}{c-1} \right\}$$

$c \neq 0$, $c \neq 1$

Quindi: $j(c) = j(c') \iff c' \in \{ \quad \}$

Infine: in ognuno dei 6 casi per c', si può esibire una proiettività T che

$$T\left(Z_p\left(h\left(y^2 - x(x-1)(x-c)\right)\right)\right) = Z_p\left(h\left(y^2 - x(x-1)(x-c')\right)\right)$$

vedere : Sernesi Geo 1.

Teorema: $j(c) = \dfrac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2 (c-1)^2}$

$j : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \underset{\overline{j}}{\underset{\ni}{\mathbb{C}}}$ è SURIETTIVA.

Dim: Fisso $\overline{j} \in \mathbb{C}$

Cons. $Q(x) = (x^2 - x + 1)^3 - \overline{j}\, x^2 (x-1)^2 \in \mathbb{C}[x]$

$\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \Longrightarrow \exists$ una radice di $Q(x)$

la chiamo $\underset{\in \mathbb{C}}{c}$: $\exists$ $Q(c) = 0$

cioè $(c^2 - c + 1)^3 - \overline{j}\, c^2 (c-1)^2 = 0$

cioè: $\overline{j} = \dfrac{(c^2 - c + 1)^3}{c^2 (c-1)^2} = j(c)$

Siamo sicuri che $c \neq 0$ e $c \neq 1$?

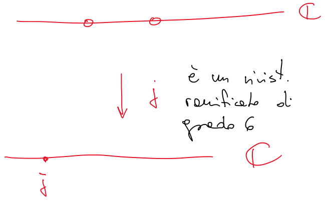
sì: $Q(0) = 1 - \overline{j} \cdot 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow 0$ non è radice

$Q(1) = (1 - 1 + 1)^3 - \overline{j}\, 1^2 \cdot 0 = 1 \neq 0 \Longrightarrow 1$ non è radice.

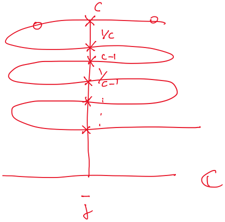
OSS.: $j : \mathbb{C} - \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$

la generica fibra: $\overline{j} \in \mathbb{C}$, $z \in \underset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{C}$

$\# j^{-1}(\overline{j}) = 6$

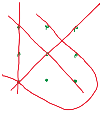


è un rivest. ramificato di grado 6



COR.: Le classi di equiv. proiettive delle cubiche lisce di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono ∞, una per ogni scelta di $j \in \mathbb{C}$, cioè sono classificate da $\mathbb{C}$.

Vedremo: Usando la forma di Legendre è possibile dimostrare che ogni cubica liscia ha esattamente 9 flessi, a 3 a 3 allineati.



* * *

STRUTTURA DI GRUPPO ABELIANO SU CUBICHE

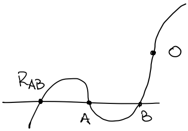
Sia $C \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ cubica liscia

Fisso flesso $O \in C$

Def.: $*: C \times C \to C$

$(A, B) \longmapsto A * B := R_{AB}$ t.c.

$\overline{AB} \cap C = \{A, B, R_{AB}\}$



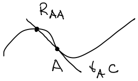
Se $A = B$

invece di $\overline{AB}$ cons. $t_A C$

R_{AA} è definito:

$t_A C \cap C$ = per Bèzout 3 punti contati molt.

pongo: R_{AA} = punto di int. residua ad A in $t_A C \cap C$ se A NON



è flesso

(in questo caso $m_A(C, t_A C) = 2$)

e quindi per Bézout c'è un ulteriore punto di $C \cap t_A C$

invece $R_{AA} := A$ se A flesso

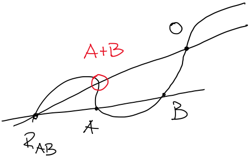
Quindi: $A * A = \begin{cases} R_{AA} \neq A & \text{se } A \text{ non flesso} \\ A & \text{se } A \text{ flesso} \end{cases}$

OSS.: $*$ è commutativa? Sì per costruzione.

Def.: $+ : C \times C \to C$

$(A, B) \to A + B := (A * B) * O$

$= R_{AB} * O$

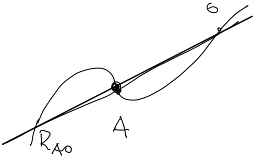


Teorema: $(C, +)$ è un gruppo abeliano

Dim.: • Neutro: cons. O flesso

$A + O = (A * O) * O$

$R_{AO} * O = A$



• commutativo perché $*$ lo è.