Speranza Matematica Condizionata

Speranza Matematica Condizionata

- Obbiettivo:
  - estendere il concetto di probabilità condizionata $P(A|B)$
  - prima a quello di speranza condizionata a un evento $E[X|B]$
  - poi a quello di speranza condizionata a una σ-algebra

    $$E[X|\mathscr{G}]$$

    $\mathscr{G} =$ informazione
  - in particolare, speranza condizionata a una o più variabili aleatorie

    $$E[X|Y_1, \ldots, Y_n]$$
  - collegamento con la legge condizionata

Speranza Matematica Condizionata

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $B \in \mathscr{F}$ con $P(B) > 0$, X va tale che $X \in L^1$ o $X \geq 0$
si definisce
$$E[X|B] = \frac{E[X;B]}{P(B)}$$
dove per convenzione $E[X;B] = \int_B X \mathrm{d}P = E[X1_B]$
  - se $A \in \mathscr{F}$, $P(A|B) = E[1_A|B]$
  - $E[X|B] = E_{P_B}[X]$ dove E_{P_B} = speranza sotto la probabilità P_B (p. 54)
  $\rightsquigarrow$ $E[\cdot|B]$ ha tutte le proprietà di una speranza (non condizionata)

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata (a un evento)
  - [Indipendenza] se X indipendente da B, $E[X|B] = E[X]$
  - [Disintegrabilità (I)] $(B_i)_i \subset \mathscr{F}$ partizione discreta di Ω

$$E[X] = \sum_{i:\,P(B_i)>0} P(B_i)E[X|B_i]$$

  - [Disintegrabilità (II)] Y va discreta con determinazioni $y_1, \ldots, y_n, \ldots$

$$E[X] = \sum_{i:\,P(Y=y_i)>0} P(Y = y_i)E[X|Y = y_i]$$

- L'ultima proprietà non può essere utilizzata con Y va continua!

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Lancio di due dadi, X_1, X_2 risultato del primo e secondo dado, $Z = X_1 + X_2$, $U = \min\{X_1, X_2\}$, $V = \max\{X_1, X_2\}$; calcolare

$$E[X_1|Z = i], \qquad i = 2, \ldots, 12$$
$$E[U|V = i], \qquad i = 1, \ldots, 6$$

- Esercizio. Una portafoglio di rischi è classificato in *b*uoni (20%), *n*ormali (45%), *m*ediocri (35%); il danno atteso per sinistri buoni, normali e mediocri è rispettivamente 500€, 750€ e 1500€. Calcolare il danno atteso per un rischio estratto a caso dal portafoglio.

Speranza Matematica Condizionata

- [Speranza condizionata - Teorema di Kolmogorov] $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità, $X \in L^1$, $\mathscr{G}$-sigma algebra con $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$; esiste una va Z su $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ tale che

  1. Z è $\mathscr{G}$-misurabile
  2. $Z \in L^1$
  3. per ogni $A \in \mathscr{G}$
  $$E[Z; A] = E[X; A]$$

  inoltre Z è unica: se Z' è una va che soddisfa (1), (2), (3), allora $Z = Z'$ q.c.

- $Z = E[X|\mathscr{G}]$ è la speranza condizionata di X all'informazione in $\mathscr{G}$

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni
  - [Caso nonnegativo] il teorema vale per $X \geq 0$ q.c. con (2) sostituita da
    $E[X|\mathscr{G}] \geq 0$ q.c.
  - [Medie parziali (I)] la proprietà (3) può essere scritta come

$$E[E[X|\mathscr{G}]|A] = E[X|A] \qquad \text{per ogni } A \in \mathscr{G} \text{ con } P(A) > 0$$

  - [Medie parziali (II)] (3) può essere sostituita da

$$E[E[X|\mathscr{G}]Y] = E[XY]$$

    per ogni Y $\mathscr{G}$-misurabile tale che le speranze esistono
  - [Probabilità condizionata a una σ-algebra] per $A \in \mathscr{F}$ si pone

$$P(A|\mathscr{G}) = E[1_A|\mathscr{G}]$$

Speranza Matematica Condizionata

- Osservazioni
  - se $\mathscr{G} = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ allora la notazione è

$$E[X|\mathscr{G}] = E[X|Y_1, \ldots, Y_n]$$

speranza condizionata di X all'osservazione di $Y_1, \ldots, Y_n$

  - esiste una funzione $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile tale che (p. 94)

$$E[X|Y_1, \ldots, Y_n] = h(Y_1, \ldots, Y_n)$$

e si usa la notazione

$$h(y_1, \ldots, y_n) = E[X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n]$$

curva di regressione di X su $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: X, $Y \in L^1$, $\mathscr{G}$ σ-algebra con $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$
  - [Informazione triviale] $E[X|\{\varnothing, \Omega\}] = E[X]$
  - [media della media condizionata=media]
    $$E[E[X|\mathscr{G}]] = E[X] \text{ q.c.}$$
  - [Linearità] per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
    $$E[\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}] = \alpha E[X|\mathscr{G}] + \beta E[Y|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$
  - [Monotonia] se $X \leq Y$ q.c. allora
    $$E[X|\mathscr{G}] \leq E[Y|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: X, $Y \in L^1$, $\mathscr{G}$ σ-algebra con $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$
  - [Misurabilità=costanza] se $XY \in L^1$ e Y-$\mathscr{G}$ misurabile
  $$E[XY|\mathscr{G}] = YE[X|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$
  e in particolare
  $$E[Y|\mathscr{G}] = Y \text{ q.c.}$$
  - [proprietà iterativa] se $\mathscr{G} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{F}$
  $$E[E[X|\mathscr{H}]|\mathscr{G}] = E[X|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - [Disuguaglianza di Jensen] I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ convessa
    X va, $X \in I$ q.c. con $f(X) \in L^1$
    allora $X \in L^1$

$$f(E[X|\mathscr{G}]) \le E[f(X)|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$

  - [Contrazione] se $p \ge 1$ e $X \in L^p$ allora $E[X|\mathscr{G}] \in L^p$ e

$$E[|E[X|\mathscr{G}]|^p] \le E[|X|^p]$$

  - [Indipendenza] se $X \in L^1$ indipendente da $\mathscr{G}$ allora

$$E[X|\mathscr{G}] = E[X] \text{ q.c.}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

  - [Teorema di Fubini] X, Y va con Y $\mathscr{G}$-misurabile
    $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(X, Y) \in L^1$

    $$E[g(X, Y)|\mathscr{G}] = E[g(X, y)|\mathscr{G}]|_{y=Y}$$

    se X è anche indipendente da $\mathscr{G}$

    $$E[g(X, Y)|\mathscr{G}] = E[g(X, y)]|_{y=Y}$$

Speranza Matematica Condizionata

- [Geometria in L^p] per $X, Y \in L^p$ $(p \geq 1)$ si pone

$$||X||_p = E[|X|^p]^{1/p} \qquad \text{lunghezza di } X$$

$$d_p(X,Y) = ||X - Y||_p \qquad \text{distanza tra } X \text{ e } Y$$

(identificando X con Y se $X = Y$ q.c.)

- [Geometria in L^2] per $X, Y \in L^p$ si pone

$$< X, Y >= E[XY] \qquad \text{prodotto scalare di } X \text{ e } Y$$

e X è ortogonale a Y se $< X, Y >= 0$; quando una delle variabili ha media nulla, ortogonalità≡non correlazione

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata: $\mathscr{G}$ σ-algebra con $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, $X \in L^2$
  - [Proiezione ortogonale] $E[X|\mathscr{G}]$ è l'unica variabile aleatoria $\mathscr{G}$-misurabile in L^2 tale che

    $$X - E[X|\mathscr{G}] \text{ è ortogonale a } Y$$

    per ogni $Y \in L^2$ $\mathscr{G}$-misurabile
  - [Miglior predittore] $E[X|\mathscr{G}]$ è l'unica soluzione del problema

    $$\min_{Y\,\mathscr{G}\text{-misurabile},\ Y \in L^2} d_2(X, Y)$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata
  - [Speranza condizionata a un evento (I)] se $A \neq \emptyset$ è un atomo di $\mathscr{G}$ (p. 92) e $P(A) > 0$, allora

    $$E[X|\mathscr{G}]1_A = E[X|A]1_A \text{ q.c.}$$

    quindi $E[X|\mathscr{G}]$ è costante su A ed uguale a $E[X|A]$
  - [Speranza condizionata a un evento (II)] se $Y_1, \ldots, Y_n$ sono va e $y_1, \ldots, y_n$ con

    $$P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) > 0$$

    allora su $\{Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n\}$

    $$E[X|Y_1, \ldots, Y_n] = E[X|Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n]$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della speranza condizionata

  - [Speranza condizionata ad una partizione] $\mathbb{P} = (B_i)_i \subset \mathscr{F}$ partizione discreta di Ω, $\mathscr{G} = \sigma(\mathbb{P})$

    $$E[X|\mathscr{G}] = \sum_{i:\, P(B_i)>0} 1_{B_i} E[X|B_i] \text{ q.c.}$$

    mentre su ogni B_i con $P(B_i) = 0$ si può definire $E[X|\mathscr{G}]$ arbitrariamente

Speranza Matematica Condizionata

- Dato un vettore di va

$$\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_n]^{\mathsf{T}} = [\underbrace{X_1, \ldots, X_m}_{=\boldsymbol{X}'}, \underbrace{X_{m+1}, \ldots, X_n}_{=\boldsymbol{X}''}]^{\mathsf{T}}$$

con pdf congiunta $f_{\boldsymbol{X}}$ e pdf marginale di $\boldsymbol{X}''$ $f_{\boldsymbol{X}''}$
la densità condizionata di $\boldsymbol{X}'$ a $\boldsymbol{X}'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ è

$$f_{\boldsymbol{X}'|\boldsymbol{X}''}(x_1, \ldots, x_m | x_{m+1}, \ldots, x_n) = \frac{f_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)}{f_{\boldsymbol{X}''}(x_{m+1}, \ldots, x_n)}$$

se $f_{\boldsymbol{X}''}(x_{m+1}, \ldots, x_n) > 0$, 0 altrimenti

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della distribuzione condizionata
  - per ogni $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ con $f_{\boldsymbol{X}''}(x_{m+1}, \ldots, x_n) > 0$

    $$f_{\boldsymbol{X}'|\boldsymbol{X}''}(\cdot | x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

    è una pdf
  - $\boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{X}''$ indipendenti se e solo se $f_{\boldsymbol{X}'|\boldsymbol{X}''} = f_{\boldsymbol{X}'}$
  - congiunta di $(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'')$=marginale di $\boldsymbol{X}''$ & condizionata $\boldsymbol{X}'|\boldsymbol{X}''$
  - [Speranza e legge condizionata] per ogni $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ con $f_{\boldsymbol{X}''}(x_{m+1}, \ldots, x_n) > 0$ e ogni $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(\boldsymbol{X}') \in L^1$

    $$E[g(X')|\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{x}''] = \int_{\mathbb{R}^m} g(x') f(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}'') \mathrm{d}\boldsymbol{x}'$$

Speranza Matematica Condizionata

- Varianza e covarianza condizionata; per $X, Y \in L^2$
  - varianza di X condizionata all'informazione in $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}[X|\mathscr{G}] =& E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}] \\ =& E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2 \geq 0 \quad \text{q.c.}\end{aligned}$$

  - covarianza di X e Y condizionata all'informazione in $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}[X, Y|\mathscr{G}] =& E[(X - E[X|\mathscr{G}])(Y - E[Y|\mathscr{G}])|\mathscr{G}] \\ =& E[XY|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]E[Y|\mathscr{G}]\end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Proprietà della varianza/covarianza condizionata: $X, Y, Z \in L^2$
  - [Simmetria]

$$\mathrm{COV}[X, Y|\mathscr{G}] = \mathrm{COV}[Y, X|\mathscr{G}] \text{ q.c.}$$

  - [Varianza e covarianza]

$$\mathrm{VAR}[X|\mathscr{G}] = \mathrm{COV}[X, X|\mathscr{G}]$$

  - [Bilinearità] se A, B, C sono $\mathscr{G}$ misurabili tali che tutte le speranza sono finite

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}[AX + B|\mathscr{G}] =& A^2\mathrm{VAR}[X|\mathscr{G}] \text{ q.c.}\\ \mathrm{COV}[AX + BY + C, Z|\mathscr{G}] =& A\,\mathrm{COV}[X, Z|\mathscr{G}] + B\mathrm{COV}[Y, Z|\mathscr{G}] \text{ q.c.}\end{aligned}$$

  - [Covarianza “between” e “within”]

$$\begin{aligned}\mathrm{VAR}[X] =& E[\mathrm{VAR}[X|\mathscr{G}]] + \mathrm{VAR}[E[X|\mathscr{G}]] \text{ q.c.}\\ \mathrm{COV}[X, Y] =& E[\mathrm{COV}[X, Y|\mathscr{G}]] + \mathrm{COV}[[E[X|\mathscr{G}], E[Y|\mathscr{G}]] \text{ q.c.}\end{aligned}$$

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Lanciando una moneta la probabilità di testa è $V \sim U(0,1)$; si lancia la moneta $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ volte, con N indipendente da V ; sia X il numero di teste;
  calcolare
  1. $E[X|N,V]$
  2. $E[X|N]$
  3. $E[X|V]$
  4. $E[X]$
  5. $\text{VAR}[X|N,V]$
  6. $\text{VAR}[X|N]$
  7. $\text{VAR}[X]$
  8. $\text{COV}[X,V|N]$
  9. $\text{COV}[X,N|V]$

Speranza Matematica Condizionata

- Esercizio. Si sceglie a caso un punto U_1 nell intervallo $(0,1)$; per $n \geq 1$, dato U_n, si sceglie a caso un punto U_{n+1} su $(0, U_n)$. Dimostrare che la successione U_n converge q.c. a 0

- Esercizio. [distribuzione composta] Il numero di sinistri in un portafoglio è $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$; l'ammontare dell'$i$-esimo sinistro è X_i; le va

$$X_1, \ldots, X_n, \ldots$$

sono indipendenti e identicamente distribuite (iid) con media μ e varianza σ^2, e indipendenti da N; il danno totale è

$$S = X_1 + \ldots + X_N$$

Calcolare $E[S]$, $\text{VAR}[S]$, $\text{COV}[S, N]$.