Lezione 29 novembre 2023

mercoledì 29 novembre 2023 11:16

Visto: $\underset{\mathcal{D}}{g}: \underset{\mathcal{D}}{U} \to \underset{\mathcal{B}}{V}$, $f: \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{C}}{W}$ AL

Allora: $M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(f\circ g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\cdot M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g)$

Visto: $f: V \longrightarrow V'$

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ basi di V; $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ basi di V'

basi

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = \underbrace{M^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'})}\cdot M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\cancel{\mathcal{C}}}(f)\cdot M^{\mathcal{B}'}_{\cancel{\mathcal{B}}}(Id_V)$$

$$= M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\underbrace{Id_{V'}\circ f\circ Id_V}_{=f})$$

MAT. DI CAMBIO DI BASE
DI PASSAGGIO

$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(Id_{V'})$ = matrice che permette di passare da coordinate in $\mathcal{C}$ a coordinate in $\mathcal{C}'$

$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)$ = matrice di passaggio dalla $\mathcal{B}'$ alla $\mathcal{B}$

OSS: $Id_V: \underset{\mathcal{B}}{V} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}'}{V}$ è AL ed è isom.

$\Longrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)$ è invertibile

con inversa

sett. scorsa
$\downarrow$

$$\underbrace{\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(Id_V)\right)^{-1}} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}\left((Id_V)^{-1}\right)$$

$$= \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(Id_V)}$$

CONS.: Quando una delle 2 basi è la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{K}^n$, è particolarmente facile

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_V) = \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underset{= v_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}, \dots, \underset{v_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}} \right\}$$

se ci serve calcolare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_V) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_V)\right)^{-1}$

un modo è calcolare $\longrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_V)$

COROLLARIO: Se $f: V \longrightarrow V$ AL
(in questo caso: f ENDOMORFISMO
fisici & ingegneri: f OPERATORE LINEARE)

in V fisso basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) \arrow[d] & = & \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)} \arrow[d] & \cdot & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \arrow[d] & \cdot & \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(Id_V)}_{=\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(Id_V)\right)^{-1}} \\
\underset{n\times n}{N} & = & \underset{n\times n}{P} & \cdot & \underset{n\times n}{M} & \cdot & \underset{n\times n}{P^{-1}}
\end{tikzcd}$$

Def: Date $M, N \in M_n(K)$, si dicono **SIMILI** se $\exists\ P \in GL(n, K)$ (= sottoins. delle matrici invertibili GRUPPO LINEARE)

t.c. $N = P \cdot M \cdot P^{-1}$
Scriveremo: $M \sim N$

OSS: In particolare, se M & N rappresentano la stessa $f: V \to V$, allora sono SIMILI.

Vale anche VICEVERSA:

Lemma: Cons. endomorf. $f: V \longrightarrow V$, $\mathcal{B}$ base di V, sia

$$M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f).$$

Allora se $A \sim M$, allora $\exists$ una base $\mathcal{C}$ di V t.c.

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$$

Dim: Se $A \sim M$, $\exists\, P$ invertibile

t.c. $A = P \cdot M \cdot P^{-1}$

sia $P^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$

Poniamo $w_j := p_{1j} v_1 + \cdots + p_{nj} v_n$, $\forall j = 1, \ldots, n$

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\dim V = n$

Considero $\{w_1, \ldots, w_n\}$ e osservo che formano una base

Infatti: sono n vettori
sono V. LIN. INDIP.: infatti, la matrice delle loro coordinate è proprio P^{-1}, che ha rango massimo n, perché è invertibile: $(P^{-1})^{-1} = P$

$\Rightarrow$ sono automatic. dei generatori

$\Rightarrow \{w_1, \ldots, w_n\}$ sono base di V

e $M^{e}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = P^{-1}$ per costruzione

ma allora $M^{\mathcal{B}}_{e}(\mathrm{Id}_V) = \left(M^{e}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)\right)^{-1} = (P^{-1})^{-1}$
$= P$

$$\Rightarrow \quad A = P \cdot M \cdot P^{-1} = M^{e}_{e}(f).$$

OSS.: La relazione di SIMILITUDINE $\sim$

$N \sim M \iff \exists\, P$ invertibile t.c.

$$N = P \cdot M \cdot P^{-1}$$

è una RELAZ. DI EQUIV. TRA MATRICI

Infatti: $M \sim M$: $M = I_n \cdot M \cdot I_n^{-1}$

$M \sim N \Longrightarrow N \sim M$?

$$N \overset{?}{=} P \cdot M \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} \cdot N = P^{-1}(P \cdot M \cdot P^{-1})$$

$$\overset{!}{=} (P^{-1} \cdot P) \cdot M \cdot P^{-1}$$

$$\overset{!}{=} I_n \cdot M \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} \cdot N = M \cdot P^{-1} \quad / \cdot P$$

$$P^{-1} \cdot N \cdot P = (M \cdot P^{-1}) \cdot P$$

$$= Q \cdot N \, Q^{-1} \overset{!}{=} M \cdot (P^{-1} \cdot P)$$

$$= M \cdot I_n = M$$

transitività: $M \sim N$, $N \sim R$

$N = P \cdot M \cdot P^{-1}$, $R = Q \cdot N \cdot Q^{-1}$

$$R = Q \cdot (P \cdot M \cdot P^{-1}) \cdot Q^{-1}$$

$$= \underbrace{(Q \cdot P)}_{S} \cdot M \cdot \underbrace{(P^{-1} \cdot Q^{-1})}_{= (Q \cdot P)^{-1}}$$

$$R = S \cdot M \cdot S^{-1} \Longrightarrow M \sim R$$

OSS.: Chi sono le matrici simili a I_n ?

$$N = \underbrace{P \cdot \mathbb{I}_n}_{=P} \cdot P^{-1} \qquad = P \cdot P^{-1} = \mathbb{I}_n = M_B^B(Id_V)$$

$\to$ l'unica matrice simile a $\mathbb{I}_n$ è lei stessa.

Anche O = matrice nulla ha questa proprietà

infatti:

$$N = \underbrace{P \cdot O}_{} \cdot P^{-1} = $$
$$= O \cdot P^{-1} = O$$

$\to N = O$

Esempi:

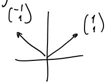
cons. la PROIEZIONE

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$p\left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$


$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \{ v_1, v_2 \}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2})$$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} \text{coordinate di } v_1 \text{ in } \mathcal{E} & \text{coord. di } v_2 \text{ in } \mathcal{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Calcolo l'inversa con OE:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbb{II} - \mathbb{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I+II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I_2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2})}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \underset{?}{=} \overset{M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2})}{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Visto: $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(p) =$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{M^{\cancel{\mathcal{E}}}_{\mathcal{E}}(p)} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\cancel{\mathcal{E}}}(Id_{\mathbb{R}^2})}$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(p \circ Id_{\mathbb{R}^2})$$

$$= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(p)$$

$=$

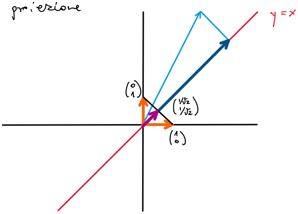
$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

Esempio: cons. un'altra proiezione

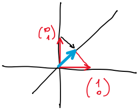
$p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

è AL



proiez. ort. sulla retta $y=x$

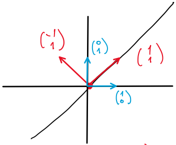
$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_2) = \begin{pmatrix}1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\\ 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2\end{pmatrix}$



$l^2 + l^2 = 1$

$2l^2 = 1$, $l^2 = \frac{1}{2}$

$l = \frac{1}{\sqrt2}$



$\mathcal{B} = \left\{\binom{1}{1}, \binom{-1}{1}\right\} = \{v_1, v_2\}$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$p_2\left(\binom{1}{1}\right) = \binom{1}{1}$

$p_2(v_1) = v_1 = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2$

$p_2\left(\binom{-1}{1}\right) = \binom{0}{0}$