Lezione 30 novembre 2023

giovedì 30 novembre 2023 11:13

Vediamo oggi:

2 fatti riguardanti AL:

Teo: Sia $f: V \to V'$ AL, V e V' SV di dim finita.

Allora $\exists$ basi $\mathcal{B}$ di $\underset{n}{V}$ e $\mathcal{B}'$ di $\underset{m}{V'}$

tali che

$$\underset{m\times n}{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}}(f) = {\scriptstyle m-r}\left[\left(\begin{array}{c|c} \overset{r\times r}{I_r} & \overbrace{\;0\;}^{n-r} \\ \hline \underbrace{\;0\;}_{r} & \underbrace{\;0\;}_{n-r} \end{array}\right)\right.\begin{array}{l} \left.\right]r \\ \left.\right]m-r \end{array}$$

con I_r = matrice unità $r \times r$

dove $r = \mathrm{rg}\, f$

e 0 sono blocchi tutti nulli

Dim. Già visto nella dim. del Teo di Dimensione, che se

$\{v_1, \dots, v_k\}$ è base di $\ker f$

prolungo a base di V : $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

allora $\{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono base per

$\mathrm{Im}\, f$.

Per il nostro Teo, scegliamo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ come segue:

$$\mathcal{B} = \{v_{k+1}, \dots, v_n, \underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{base di } \ker f}\}$$

$$\mathcal{B}' = \{\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{\text{sono LIN. INDIP. in } V}, w_1, \dots, w_s\}$$

$n-k$ vettori; Teo. Dim. $n-k = \mathrm{rg} f = r$

li completo a base di V'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{l} r\left\{\right. \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|cccc} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\;\;0\;\cdots\;0}}^{r=n-k}} & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline & \vdots & & 0 & & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

coord. di $f(v_{k+1})$ in $\mathcal{B}'$

coord. di $f(v_{k+2})$ in $\mathcal{B}'$

coord. di $f(v_1) = 0_{V'}$ in $\mathcal{B}'$

SPAZIO VETTORIALE DUALE

Def.: Sia V SV su $\mathbb{K}$, sia $\dim V = n$.

Lo SP. V. DUALE di V è

$$V^* \, (= V^\vee) := \{f: V \to \mathbb{K} \;:\; f \text{ è AL}\}$$

$$= \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

SV su se stesso

oss.: Se $V' = \mathbb{K}$, f AL si chiama anche FORMA LINEARE.

Teo: Se $\dim V = n$, anche $\dim V^* = n$ e una base di V^* è data da:

se $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V,

base di V^* : $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

dove $v_i^*: V \to \mathbb{K}$ è l'unica AL t.c.

$$\begin{cases} v_i^*(v_1) = 0 \in \mathbb{K} \\ v_i^*(v_2) = 0 \\ \quad\vdots \\ v_i^*(v_i) = 1 \in \mathbb{K} \\ \quad\vdots \\ v_i^*(v_n) = 0 \end{cases}$$

in altre parole, se δ_{ij} indica simbolo di Kronecker :

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Dim.:

OSS.: se $v \in V$ vettore qualunque

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

$$v_i^*(v) = a_1 \underbrace{v_i^*(v_1)}_{=0} + a_2 \underbrace{v_i^*(v_2)}_{=0} + \cdots + a_n \underbrace{v_i^*(v_n)}_{=0}$$

$$= a_i \cdot v_i^*(v_i) = a_i \cdot 1 = a_i$$

cioè la AL v_i^* ad ogni v associa la sua COORDINATA i-ESIMA in $\mathcal{B}$.

Dim. Teo: devo dim. $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ sono LIN. INDIP & GENERATORI per V^*

LIN. INDIP.:

$$c_1 v_1^* + c_2 v_2^* + \cdots + c_n v_n^* = 0_{V^*}$$

$\downarrow$

AL NULLA

quindi $(c_1 v_1^* + \cdots + c_n v_n^*)(v) = 0 \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V$

in particolare

$$(c_1 v_1^* + \cdots + c_n v_n^*)(v_j) = c_1 v_1^*(v_j) + \cdots + c_n v_n^*(v_j) = 0$$

$\downarrow$ per def. di + e · di AL

$$= c_j = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \qquad \text{LIN. INDIP.}$$

Sono dei generatori per V^* :

devo dimostrare che $\forall f \in V^*$, $f: V \to K$

$\exists$ coeff. $b_1, \ldots, b_n$ t.c.

$$f = b_1 v_1^* + b_2 v_2^* + \cdots + b_n v_n^*$$

$\downarrow$

uguaglianza di AL

OSS. che se questi b_j esistono, si dovrà avere

$$f(v) = (b_1 v_1^* + \cdots + b_n v_n^*)(v) \ \forall v \in V$$

in part. $\underbrace{f(v_j)}_{\in \mathbb{K}} = (b_1 v_1^* + \cdots + b_n v_n^*)(v_j)$

$$= b_1 v_1^*(v_j) + \cdots + b_n v_n^*(v_j)$$

$\downarrow$ per def di + e · in V^*

$$= b_j \in \mathbb{K}$$

Affermo che $$f \underset{\circledast}{=} \overbrace{\underbrace{f(v_1)}_{\in \mathbb{K}} v_1^* + \underbrace{f(v_2)}_{\in \mathbb{K}} v_2^* + \cdots + f(v_n) v_n^*}^{h}$$

Infatti: per il Teo. Struttura per AL, basta verificare che $\circledast$ vale per tutti i vettori di $\mathcal{B}$

cioè: $$\begin{cases} f(v_1) = h(v_1) \\ f(v_2) = h(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) = h(v_n) \end{cases}$$

$f(v_1)$, $h(v_1) = \left(f(v_1) v_1^* + \dots + f(v_n) v_n^* \right)(v_1)$

$\quad\quad\quad\quad = f(v_1) v_1^*(v_1) = f(v_1)$

$\vdots$

$h(v_n) = \left(f(v_1)\, v_1^* + \dots + f(v_n) v_n^* \right)(v_n)$

$\quad\quad\quad\quad = f(v_n).$

OSS: $f: V \to \mathbb{K} = V'$, $\dim \mathbb{K} = 1$

$\mathcal{B}$ $\quad$ base di $\mathbb{K}$, ad es., 1

$\mathcal{B}' = \{1\}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(f(v_1) \;\; f(v_2) \;\; \dots \;\; f(v_n) \right)$$

$1 \times n$ $\quad$ $\downarrow$ coord. di $f(v_1)$ in $\mathcal{B}'$ $\in \mathbb{K}$

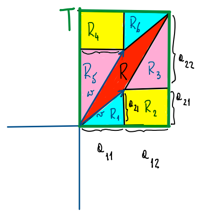
DETERMINANTE

Idea: Se $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, non nulli e non proporzionali

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \in \mathbb{R}$$

questo numero ha una interpretazione geometrica

supp. per semplicità $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$



$v = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$w = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

calcoliamo $\text{Area}(R) = \text{Area}\, T - \sum_{i=1}^{6} \text{Area}(R_i)$

oss. $\text{Area } R_1 = \text{Area } R_6 = \dfrac{a_{11} \cdot a_{21}}{2}$

$\text{Area } R_2 = \text{Area } R_4 = a_{12} \cdot a_{21}$

$\text{Area } R_3 = \text{Area } R_5 = a_{12} \cdot a_{22} / 2$

$\text{Area } T = (a_{11} + a_{12}) \cdot (a_{21} + a_{22})$

$$\text{Area } R = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} + a_{12} a_{22} - \left(2 \cdot \frac{a_{11} \cdot a_{21}}{2}\right) - \left(2 \cdot a_{12} \cdot a_{21}\right) - \left(2 \cdot \frac{a_{12} \cdot a_{22}}{2}\right)$$

$$= \cancel{a_{11} a_{21}} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} a_{22} + \cancel{a_{12} a_{22}} - \cancel{a_{11} a_{21}} - 2\, a_{12} \cdot a_{21} - \cancel{a_{12} a_{22}}$$

$$= \boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} = \det A$$

Se $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ sono proporzionali

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} \\ \mu a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \mu a_{11} \\ a_{21} & \mu a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cancel{\mu} a_{21} - \cancel{\mu} a_{11} a_{21} = 0$$

Vogliamo def. DETERM. in spazi arbitrari V di dim finita, arbitraria.

Abbiamo bisogno delle PERMUTAZIONI:

Sia $I_n = \{1, 2, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$

Def.: Una **PERMUTAZIONE** di I_n è

una biiezione
(funz. biiettiva)

$$\begin{aligned} \sigma : I_n &\longrightarrow I_n \\ 1 &\longrightarrow \sigma(1) \\ 2 &\longrightarrow \sigma(2) \\ &\vdots \\ n &\longrightarrow \sigma(n) \end{aligned}$$

es: $n=3$: $I_3 = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6 possibili permutazioni

Def.: $S_n = \{$ permutazioni di $I_n \}$

è un GRUPPO con le COMP. di permutazioni

GRUPPO SIMMETRICO su n OGGETTI

OSS.: $\# S_n = n!$

$n=3$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Def.: Una permutazione si dice **TRASPOSIZIONE** o **SCAMBIO** se è del tipo:

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i, \quad \sigma(k) = k \quad \forall k \neq i,\ k \neq j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 4 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Prop.: 8.2.4

Ogni permutazione σ è composizione di un numero finito di trasposizioni (non nec. in modo unico)

es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tau$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ μ = scambio 1 2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tau'$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ μ': scambio tra primo e terzo elemento

Dim. Omessa

Prop.: In generale, il # di trasposizioni che sono necessarie per dare una permutazione σ fissata non è ben determinato

(cioè non c'è 1 unico modo di fattorizz. σ come comp. di trasp.)

però: $\forall$ rappresentazione di σ come comp. di trasp.

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_k \quad , \quad \tau_i \text{ trasposizioni}$$

la **PARITÀ DI k** dipende solo da σ.

Def: SEGNO DI $\sigma \in S_n$

se $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

FATTO: S_n con $n \geq 3$ NON SONO

COMMUTATIVI.

Def.: Sia V sv su $\mathbb{K}$, di $\dim V = n$.

Una funzione

$$D: \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n\text{-volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice MULTILINEARE se è AL in ogni variabile; cioè:

$$D((w_1, w_2, \dots, w_n)) \in \mathbb{K}$$

se fisso $w_2, \dots, w_n \in V$

$$D((\cdot, w_2, \dots, w_n)) : V \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{è AL}$$

$$v \longrightarrow D((v, w_2, \dots, w_n))$$

In generale: $D((w_1, \dots, w_{i-1}, \alpha w_i + \beta w_i', w_{i+1}, \dots, w_n))$

$$= \alpha D((w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, \dots, w_n)) + \beta D(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i', \dots, w_n)$$

Def.: $D: \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n\text{-volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$

si dice ALTERNANTE se ogni volta che 2 argomenti sono uguali, il valore di $D = 0$

$$D((w_1, w_2, \dots, \underbrace{w_i, w_{i+1}, \dots, w_{j-1}, w_i}_{=}, \dots, w_n)) = 0$$

DEF.: Se $D: \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n\text{ volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$ è MULTILINEARE & ALTERNANTE, allora D si dice FUNZIONE DETERMINANTE su V.

PROP.: Sia D funzione determinante su V.

Allora:

① D è ANTISIMMETRICA

$$D(w_1, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n) = -D(w_1, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, w_n)$$

② se $\sigma \in S_n$, allora $D(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \dots, w_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot D(w_1, \dots, w_n)$

③ Se $w_1, \dots, w_n$ sono vettori LIN. DIP. di V

$$\Longrightarrow D(w_1, \dots, w_n) = 0$$

In particolare, se uno dei vettori è nullo, si ha $D(w_1, \dots, w_n) = 0$

Dim.: ① $D(w_1, \dots, \overbrace{w_i + w_j}^{\text{posiz. } i}, \dots, \overbrace{w_i + w_j}^{\text{posiz. } j}, \dots, w_n) = 0$

per l'ALTERNANZA

MULTILINEARITÀ

$$D(w_1, \dots, w_i, \dots, w_i + w_j, \dots, w_n) +$$

$$+ D(w_1, \dots, w_j, \dots, \boxed{w_i + w_j}, \dots, w_n) =$$

$$= D(w_1, \dots, \boxed{w_i}, \dots, \boxed{w_i}, \dots, w_n)^{=0} +$$

$$+ D(w_1, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n) +$$

$$D(w_1, \dots, w_j, \dots, w_i, \dots, w_n) +$$

$$D(w_1, \dots, \boxed{w_j}, \dots, \boxed{w_j}, \dots, w_n) = 0$$

② Se σ è una trasposizione, segue da ①

Se σ non è una trasposizione, la posso scrivere come comp. di trasp.; ad ogni trasp., il segno di D cambia!

③ $w_1, \dots, w_n$ LIN. DIP.

è possibile scrivere uno di essi come comb. degli altri

per semplicità supp. $w_n = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{n-1} w_{n-1}$

$$D((w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_n)) = \dots =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i D(\underbrace{w_1, \dots, w_{n-1}, w_i}_{\text{c'è una ripetizione di } w_i})}_{=0} = 0$$

FORMULA DI LEIBNIZ PER DET

Fisso $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

Sia D una funzione det su V

sia $w_1, \dots, w_n \in V$ vettori

Vogliamo scrivere $D(w_1, \dots, w_n)$ in termini delle coordinate di w_i in $\mathcal{B}$

$$w_i = \sum_{j_i=1}^{n} x_{i j_i} v_{j_i} \quad \left(= \sum_{l=1}^{n} a_{l i} v_l \right)$$

$$D(w_1, \dots, w_n) = D\left(\sum_{j_1=1}^{n} x_{1 j_1} v_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} x_{n j_n} v_{j_n} \right)$$

$$\underset{\text{MULTILINEARITÀ}}{=} \dots$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} x_{1j_1} x_{2j_2} \cdots x_{nj_n} \underbrace{D(v_{j_1}, \dots, v_{j_n})}_{\neq 0}$$

$\iff$ non ci sono ripetizioni

$\iff$ $j_1, \dots, j_n$ sono tutti diversi

$\iff$ sono una permutazione di $1, \dots, n$

Quindi:

$$D(w_1, \dots, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)} D(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

$$\underset{\text{Prop. ②}}{\overset{\downarrow}{=}} \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)} \cdot \right) D(v_1, \dots, v_n) \quad \neq 0$$

COR.: D è FUNZ. DET. non nulla su V.

Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V $\iff$

$D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

Dim. Se non sono base, allora LIN. DIP.

per Prop. ③ $\Rightarrow$ $D(v_1, \dots, v_n) = 0$

Se $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ indip.

Viceversa: se D non è la funzione nulla, $\exists$ $w_1, \dots, w_n$ t.c.

$$D(w_1, \dots, w_n) \neq 0$$

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base, $\Rightarrow$ = Formula di Leibniz

Teorema: V sv su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

Allora $\exists!$ funzione determinante $D: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$

t.c. $D(v_1, \dots, v_n) = 1 \in \mathbb{K}$

Dim.: Unicità: segue Leibniz

(∗) $$\left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \cdots x_{n\sigma(n)} \cdot \right) = D(w_1, \dots, w_n)$$

Esistenza: bisogna dimostrare che questa D

è multilin., alternante e $D(v_1, \dots, v_n) = 1$