Lezione 6 dicembre 2023

mercoledì 6 dicembre 2023 11:15

Giovedì 14 dicembre finiamo 12:45

Concerto di Natale: 11/12/23 alle
20:30 Teatro Basaglia (San Giovanni)
POSTI LIMITATI

Domanda: possiamo aggiungere 2 ore
martedì 12/12 o 19/12 dalle 14-16?

∼ · ∼ · ∼

Visto: Determinante

Altri modi per calcolare il det:

TEOREMA DI LAPLACE:

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$.

① sia $j \in \{1, \dots, n\}$ un indice di colonna fissato. Allora

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}} \quad , \quad a_{ij} := (A)_{ij}$$

dove A_{ij} = MINORE (i,j)

= SOTTOMATRICE di A ottenuta cancellando la riga i e la colonna j.

$$A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$; fisso $j = 3$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} \cdot a_{i3} \cdot \det A_{i3}$$

$$= (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \det \underbrace{A_{13}}_{2\times 2} +$$ 2 addendi

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \cdot \det \underbrace{A_{23}}_{2\times 2} +$$ 2 addendi

$$+ (-1)^{3+3} a_{33} \cdot \det \underbrace{A_{33}}_{2\times 2}$$ 2 addendi

$$= a_{13} \cdot \det A_{13} - a_{23} \det A_{23} + a_{33} \cdot \det A_{33}$$

② $\forall$ indice di riga $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{ip} \cdot \det A_{ip}$$

Dim: ① $\Rightarrow$ ② perché $\det A = \det {}^tA$

colonne di ${}^tA$ sono le righe di A

scrivo Laplace per ${}^tA$ ottengo Laplace per righe per A

①: Omessa; si tratta di verificare che l'espressione è multilineare, alternante e vale 1 nella $A = I_n$.

Per unicità della funz. determinante, si ottiene la tesi.

COR.: Sia $A \in M_n(K)$ TRIANGOLARE

(sup. o inferiore)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall \ i > j$$

Allora $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

Dim. Per induzione su n.

$n = 1$, $A = (a_{11})$

$\det A = a_{11}$ ok

Supp. vero per ogni matrice triang. superiore di tipo $(n-1) \times (n-1)$

Cons. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ $= A_{11}$

Fisso $j = 1$ prima colonna e uso Laplace ①

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} +$$

$$+ (-1)^{2+1} \underbrace{a_{21}}_{=0} \cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1} a_{31} \cdot \det A_{31} = 0$$

$+$ termini nulli

$$= a_{11} \cdot \det A_{11}$$

Osservo che A_{11} è, a sua volta, triangolare sup., è di tipo $(n-1) \times (n-1)$

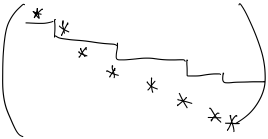
→ applico ipotesi induttiva

$\det A_{11}$ = prodotto degli elementi sulla diagonale

$$= a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots a_{nn}$$

OSS.: In particolare, questo risultato si applica alle matrici a scala



FORMULA DEI COFATTORI PER MATRICE INVERSA

Def.: $A \in M_n(\mathbb{K})$

il COFATTORE i,j di A è

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij} \in \mathbb{K}$$

MATRICE DEI COFATTORI

$$\operatorname{cof} A \in M_n(\mathbb{K})$$

$$(\mathrm{Cof}\, A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{cof}\, A = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \det A_{13} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & -\det A_{23} \\ \det A_{31} & -\det A_{32} & \det A_{33} \end{pmatrix}$$

CONVENZ: Matrice dei segni dei cofattori

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & - & \\ + & - & + & - & + & - & + & \\ - & + & - & + & - & + & - & \\ + & - & + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \end{pmatrix}$$

PROP.: $\forall\, A \in M_n(\mathbb{K})$

$$A \cdot {}^t(\mathrm{cof}\, A) = {}^t(\mathrm{cof}\, A) \cdot A = \underbrace{\det A}_{\in \mathbb{K}} \cdot I_n$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$$

COR.: Se $\boxed{\det A \neq 0}$, si ha

$$A \cdot \frac{1}{\det A}\, {}^t(\mathrm{Cof}\, A) = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\mathrm{Cof}\, A) \cdot A = I_n$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t(\mathrm{Cof}\, A)$$

formula che dipende dai a_{ij}

Dim. del Prop.:

$$\Big(\underset{n\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{{}^t(\mathrm{Cof}\,A)}\Big)_{ij} = A_{(i)}\cdot\Big({}^t(\mathrm{Cof}\,A)\Big)^{(j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\Big({}^t(\mathrm{Cof}A)\Big)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\mathrm{Cof}\,A)_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(-1)^{j+k}\cdot\det A_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\cdot\underset{\substack{\neq a_{jk}\\ i\neq j}}{\boxed{a_{ik}}}\cdot\det A_{jk} = \begin{cases}\det A & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

Form. di Laplace risp. riga j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{jk}\det A_{jk}$$

è il det della matrice

$$\begin{array}{r}\\ \\ \\ \\ \text{Riga } j \rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = A'$$

è t.c.

$(A')_{(s)} = A_{(s)}$ se $s\neq j$

$(A')_{(j)} = A_{(i)}$ $i\neq j$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a'_{jk}\cdot\det A'_{jk}$$

↓ Laplace risp. riga j

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}\cdot\det A_{jk}$$

Ora: A' ha 2 righe uguali $(A'_{(i)} = A'_{(j)} = A_{(i)})$

$$\underset{\text{alternanza}}{\Longrightarrow} \quad \det A' = 0$$

TEOREMA & FORMULA DI CRAMER

Teo Cramer: Se $A \cdot x = b$ con $A \in M_n(\mathbb{K})$ e invertibile $\Rightarrow \exists!\ s$ soluzione

$$s = A^{-1} \cdot b$$

Formule di Cramer:

se $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$, si ha

$$s_j = \frac{\det\left(\overbrace{A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(j-1)}\, b\, A^{(j+1)} \cdots A^{(n)}}^{\text{matrice ottenuta da } A \text{ sostituendo la colonna } j \text{ con la colonna dei termini noti } b}\right)}{\det A}$$

Dim: $\underset{n\times 1}{s} = \underset{n\times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n\times 1}{b}$ $\quad (A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b)$

$$s_j = (A^{-1})_{(j)} \cdot b \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

formula dei cofattori

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}(\operatorname{cof} A)_{jk} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot (\operatorname{cof} A)_{kj} \cdot b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det A_{kj} \cdot b_k$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot b_k \cdot \det A_{kj}}_{\substack{\text{Laplace} \\ \text{sviluppo del det rispetto} \\ \text{alla colonna } j \text{ della matrice}}} \Bigg)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$