# Forme bilineari

Da questo momento $V$ sarà uno *spazio vettoriale reale* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

**Def.** Una *forma bilineare* su $V$ è una funzione

$$\begin{aligned} b\colon V \times V &\to \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto b(v, w) \end{aligned}$$

che sia lineare in ciascun argomento, ossia $\forall\, u, v, w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ si ha

(1) $b(u + v, w) = b(u, w) + b(v, w)$

(2) $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$

(3) $b(\alpha v, w) = b(v, \alpha w) = \alpha b(v, w)$.

**Oss.** $b(0_V, v) = b(v, 0_V) = 0$. Infatti $b(0_V, v) = b(00_V, v) = 0b(0_V, v) = 0$.

**Def.** Una forma bilineare $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è *simmetrica* se $b(v, w) = b(w, v)$, $\forall\, v, w \in V$.

**Def.** Una forma bilineare simmetrica $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ è *definita positiva* se $b(v, v) > 0$, $\forall\, v \in V - \{0_V\}$.

**N. B.** La condizione $b(v, v) > 0$ è per ogni $v \neq 0_V$ perché $b(0_V, 0_V) = 0$.

**Def.** Un *prodotto scalare* su $V$ è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Scriviamo $b(v, w) = \langle v, w\rangle$ ($v$ *scalare* $w$).
Uno *spazio vettoriale Euclideo* è uno spazio vettoriale reale $V$ dove è assegnato un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

**Forma bilineare associata ad una matrice quadrata.**

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \ \rightsquigarrow\ b_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$b_A(X, Y) \overset{\text{def}}{=} {}^tXAY,\ \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n \quad \text{(vettori colonna).}$$

$b_A$ bilineare per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne.

**Def.** $b_A$ è detta *forma bilineare associata ad* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A = (a_{ij}) \ \rightsquigarrow\ b_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

**Oss.** $b_A$ simmetrica $\Leftrightarrow$ $A$ simmetrica, ossia ${}^tA = A$.

**N. B.** Non confondere la forma bilineare e l'applicazione lineare associata

$$b_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

**Prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$.** Forma bilineare associata a $I_n$.

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\langle X, Y\rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

$\langle X, Y\rangle = \langle Y, X\rangle$, $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$ (simmetrica).
$\langle X, X\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$, $\forall\, X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

**Def.** Una matrice quadrata simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è *definita positiva* se $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

**Esempio.** $I_n$ definita positiva perché induce il prodotto scalare canonico.

**Esempio.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_A$ simmetrica perché ${}^tA = A$. Abbiamo

$${}^tXAY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

$b_A$ definita positiva infatti

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \\ &= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0, \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}. \end{aligned}$$

Quindi $A$ definisce un prodotto scalare (non canonico) su $\mathbb{R}^2$.

**Def.** Un *minore principale* di $A \in M_n(\mathbb{R})$ è il det di una sottomatrice quadrata formata dalle prime $p$ righe e colonne di $A$, con $1 \leqslant p \leqslant n$.

Un altro metodo per verificare se $A$ è definita positiva è il seguente.

**Prop.** *Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di $A$ sono $> 0$.*

**Oss.** $A \in M_2(\mathbb{R})$ simmetrica è definita positiva $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ e $\det A > 0$.

**Matrice di una forma bilineare.** $b : V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ base per $V \rightsquigarrow \rightsquigarrow M_{\mathcal{V}}(b) \overset{\text{def}}{=} (b(v_i, v_j)) \in M_n(\mathbb{R})$.

**Def.** $M_{\mathcal{V}}(b)$ è detta *matrice di $b$ rispetto alla base $\mathcal{V}$*.

$$A = M_{\mathcal{V}}(b),\ a_{ij} = b(v_i, v_j),\ v = X^{\mathcal{V}},\ w = Y^{\mathcal{V}} \in V \rightsquigarrow$$
$$\begin{aligned} b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = {}^tXAY = b_A(X, Y). \end{aligned}$$

$M_{\mathcal{V}}(b)$ consente di calcolare $b$ in coordinate mediante $b_A$.