Geometria affine

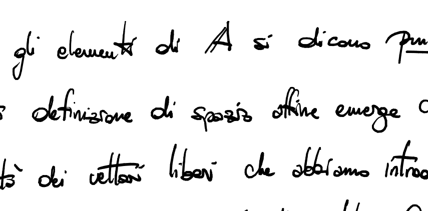
La geometria affine tratta di spazi di punti e utilizza gli spazi vettoriali come spazi di direzioni. Degli oggetti che andremo a definire, i quali si chiameranno sottospazi affini, studieremo due modi per codificarli: le equazioni cartesiane e le equazioni parametriche.

Def.: sia V uno spazio vettoriale su K; un insieme A si dice spazio affine su V se esiste una funzione
$$\sigma : A \times A \longrightarrow V$$
(e denotiamo, per ogni $P, Q \in A$, $\sigma(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$)
che soddisfi le seguenti due proprietà:

SA1. $\forall P \in A$ e $\forall v \in V$ esiste un unico $Q \in A$ tale che $v = \overrightarrow{PQ}$

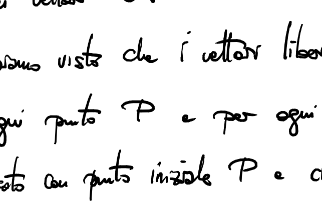
SA2. $\forall P, Q, R$ (non necessariamente distinti) vale che
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$
gli elementi di A si dicono punti.

Questa definizione di spazio affine emerge come generalizzazione delle proprietà dei vettori liberi che abbiamo introdotto all'inizio del corso. Infatti, abbiamo visto che i vettori liberi formano uno spazio vettoriale e che per ogni punto P e per ogni vettore libero v esiste un vettore applicato con punto iniziale P e classe di equipollenza v.



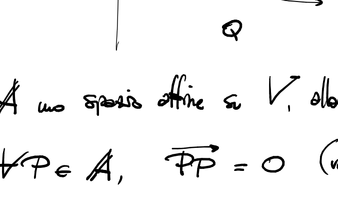
Il punto Q che è determinato è unico e vale che $[\overrightarrow{PQ}] = v$

Inoltre in questa situazione vale anche la seconda proprietà:



Esempio: possiamo prendere $A = K^n$ (ovvero ad esempio $\mathbb{R}^n$) e scegliere $V = K^n$ (attenzione! qui K^n gioca due ruoli distinti: quello di spazio vettoriale e quello di spazio affine); quando pensiamo K^n come spazio affine denotiamo i suoi elementi come vettori riga, mentre quando pensiamo K^n come spazio vettoriale denotiamo i suoi elementi come vettori colonna; la funzione σ che rende K^n uno spazio affine è:
$$\begin{array}{ccccc} & A & \times & A & \longrightarrow & V \\ \sigma : & K^n & \times & K^n & \longrightarrow & K^n \\ & P & , & Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & (p_1, \dots, p_n) & & (q_1, \dots, q_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} \end{array}$$
quando pensiamo a K^n come spazio affine, lo indichiamo con A^n_K

ad esempio, se $n=2$, possiamo considerare i punti
$$P = (1,1) \quad e \quad Q = (2,0)$$
allora $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Lemma: sia A uno spazio affine su V, allora vale che

1. $\forall P \in A$, $\overrightarrow{PP} = 0$ (vettore nullo in V)
2. $\forall P, Q \in A$, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Dim.: le due proprietà seguono dalle proprietà SA1 ed SA2

1. mostro che per ogni $v \in V$ vale $v + \overrightarrow{PP} = v$
   per SA1 esiste $Q \in A$ tale che $v = \overrightarrow{PQ}$, allora
   $$v + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + v = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PQ} = v$$
2. mostro che $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0$ (vettore nullo)
   $$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{PP} \overset{\text{punto precedente}}{=} 0$$

Def.: sia A uno spazio affine su V, spazio vettoriale di dimensione finita; definiamo la dimensione di A, denotata $\dim A$, come la dimensione di V, ovvero $\dim A = \dim V$;

- se $\dim A = 0$ parliamo di punto affine
- se $\dim A = 1$ parliamo di retta affine
- se $\dim A = 2$ parliamo di piano affine
- se $\dim A = 3$ parliamo di spazio affine.

Def.: sia A uno spazio affine su V, con V di dimensione finita; un riferimento affine su A è una coppia $(O, \mathcal{B})$ dove $O \in A$ e $\mathcal{B}$ è una base di V; il punto O si dice origine del riferimento affine; dato un riferimento affine $(O, \mathcal{B})$ e dato $P \in A$, le coordinate di P rispetto al riferimento $(O, \mathcal{B})$ sono la n-upla $(p_1, \dots, p_n)$ (dove $n = \dim V$) data dalle coordinate nella base $\mathcal{B}$ del vettore $\overrightarrow{OP}$

Esempio: se consideriamo $A = A^n_K$ e il riferimento affine $(O, \mathcal{E})$ dove $O = (0, \dots, 0)$ (punto con tutte le entrate nulle) ed $\mathcal{E}$ è la base standard di K^n, allora il riferimento $(O, \mathcal{E})$ è detto il riferimento standard di A^n_K e le coordinate rispetto a $(O, \mathcal{E})$ sono dette le coordinate standard;
ad esempio se $P \in A^3_{\mathbb{R}}$, $P = (3,1,2)$, allora per ottenere le coordinate standard di P dobbiamo considerare il vettore
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
e dobbiamo prendere le sue coordinate rispetto alla base standard; vale che
$$\overrightarrow{OP} = 3 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$$
quindi le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\mathcal{E}$ sono $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
e pertanto le coordinate di P rispetto a $(O, \mathcal{E})$ sono $(3,1,2)$;
se avessimo considerato sempre $P = (3,1,2)$, ma avessimo preso il riferimento affine $(O', \mathcal{B})$ dove $O' = (1,0,0)$ e
$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, allora avremmo dovuto considerare il vettore
$$\overrightarrow{O'P} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
e le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$; vale che
$$\overrightarrow{O'P} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
quindi le coordinate di P rispetto a $(O', \mathcal{B})$ sono $(1,1,-2)$

Def.: sia A uno spazio affine su V e consideriamo

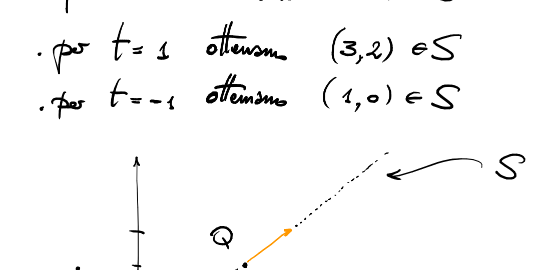
- $Q \in A$
- $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale

definiamo il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W come l'insieme
$$\{P \in A : \overrightarrow{QP} \in W\} \subseteq A$$
se denotiamo con S tale sottospazio affine diciamo che W è la giacitura di S.

Esempio: consideriamo $A = A^2_{\mathbb{R}}$ e $V = \mathbb{R}^2$ e prendiamo
$$Q = (2,1) \quad e \quad W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
analizziamo quindi il sottospazio affine passante per Q e parallelo a W:
$$\begin{aligned} S &= \{P \in A^2_{\mathbb{R}} : \overrightarrow{QP} \in W\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in A^2_{\mathbb{R}} : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in A^2_{\mathbb{R}} : \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per un certo } t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in A^2_{\mathbb{R}} : \begin{cases} x_1 - 2 = t \\ x_2 - 1 = t \end{cases} \text{ per un certo } t \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2) \in A^2_{\mathbb{R}} : \underbrace{\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}}_{} \text{ per un certo } t \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$
vedremo a breve che questa è la cosiddetta formulazione di S con equazioni parametriche

la formulazione parametrica permette di ottenere facilmente punti di S:

- per $t = 0$ otteniamo $(2,1) \in S$
- per $t = 1$ otteniamo $(3,2) \in S$
- per $t = -1$ otteniamo $(1,0) \in S$



notiamo ad esempio che $(-1,1) \notin S$; infatti se fosse $(-1,1) \in S$ avremmo $\begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
$$\begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
e quest'ultima affermazione è falsa!

Def.: sia A uno spazio affine su V e sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W; diciamo che la dimensione di S è definita come la dimensione di W, ovvero $\dim S = \dim W$.

Prop.: sia A uno spazio affine su V e sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine di giacitura W passante per Q; allora

1. $Q \in S$
2. per ogni $P_1, P_2 \in S$ vale che $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$
3. per ogni $R \in S$ vale che S è il sottospazio affine affine passante per R, di giacitura W.

Dim.:
1. $Q \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{QQ} \in W \Leftrightarrow 0 \in W$ che è vero perché W è sottospazio vettoriale.
2. siano $P_1, P_2 \in S$, dobbiamo mostrare che $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$
   vale che $\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \in W$ per definizione, quindi
   $$\overrightarrow{P_1P_2} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2} = (-\underbrace{\overrightarrow{QP_1}}_{\in W}) + \underbrace{\overrightarrow{QP_2}}_{\in W}$$
   pertanto $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.
3. dobbiamo mostrare che
   $$S = \{P \in A : \overrightarrow{RP} \in W\}$$
   "$\subseteq$" sia $P \in S$, allora $\overrightarrow{QP} \in W$; d'altro canto $R \in S$, quindi $\overrightarrow{QR} \in W$; allora
   $$\overrightarrow{RP} \overset{SA2}{=} \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = (-\underbrace{\overrightarrow{QR}}_{\in W}) + \underbrace{\overrightarrow{QP}}_{\in W}$$
   pertanto $\overrightarrow{RP} \in W$
   "$\supseteq$" sia $P \in A$ tale che $\overrightarrow{RP} \in W$; dato che $R \in S$ vale che $\overrightarrow{QR} \in W$ e quindi
   $$\overrightarrow{QP} = \underbrace{\overrightarrow{QR}}_{\in W} + \underbrace{\overrightarrow{RP}}_{\in W}$$
   pertanto $\overrightarrow{QP} \in W$, ovvero $P \in S$.

Oss.: se A è uno spazio affine su V ed $S \subseteq A$ è sottospazio affine con giacitura W, si può mostrare che S è uno spazio affine su W.

Def.: sia A uno spazio affine su V e sia $S \subseteq A$ un sottospazio affine; se $\dim A = n$ e $\dim S = n-1$, allora S si dice iperpiano.
(dunque i punti sono gli iperpiani di A^1_K, le rette sono gli iperpiani di A^2_K, i piani sono gli iperpiani di A^3_K)

Teorema: gli insiemi di soluzioni di sistemi lineari compatibili sono sottospazi affini le cui giaciture sono gli insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei associati.