Equazioni per sottospazi affini

Teorema: sia $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^m$; supponiamo che il sistema lineare $A \cdot X = b$ sia compatibile e sia S l'insieme delle sue soluzioni; allora $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è un sottospazio affine la cui giacitura è il sottospazio vettoriale $W \subseteq K^n$ delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot X = 0$; inoltre vale che

$$\dim S = \dim W = n - \operatorname{rg} A$$

(le equazioni $AX = b$ si dicono equazioni cartesiane per S)

Dim.: il teorema segue direttamente dal teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari: infatti tutte e sole le soluzioni di $AX = b$ sono della forma $s = \tilde{s} + s_0$ dove $\tilde{s}$ è una fissata soluzione di $AX = b$ ed s_0 è una qualsiasi soluzione di $AX = 0$; pertanto se interpretiamo $\tilde{s} \in K^n$ come un punto Q di $\mathbb{A}^n_K$ e se pensiamo a una soluzione s di $AX = b$ come un punto $P \in \mathbb{A}^n_K$, allora le soluzioni s di $AX = b$ determinano punti P tali che

$$\overrightarrow{QP} = s - \tilde{s} = s_0 \in \underbrace{\{\text{soluzioni di } AX = 0\}}_{W \text{ sottospazio vettoriale}}$$

in tal caso il teorema di dimensione ci dice che

$$\dim W = n - \operatorname{rg} A$$

Oss: se un sistema lineare $AX = b$ ha come insieme delle soluzioni S, allora ogni sistema lineare equivalente ad $AX = b$ avrà il medesimo insieme delle soluzioni; quindi applicando operazioni elementari ad $AX = b$ otteniamo altre equazioni cartesiane per S.

Esempio: consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

consideriamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II} - 2\cdot\text{I}]{\text{OE}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b) = 1$, pertanto per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e dunque il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di dimensione $2 - \operatorname{rg}(A) = 2 - 1 = 1$, quindi esso è una retta e sue equazioni cartesiane sono

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 6x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{ma anche} \quad \{ 3x_1 - 2x_2 = 1$$

Come possiamo esprimere S? determiniamo una soluzione particolare

$$\tilde{s} = (0, -1/2)$$

determiniamo tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 3/2\, t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

pertanto la generica soluzione di $3x_1 - 2x_2 = 1$ è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ovvero, se pensiamo alle soluzioni del sistema come a punti di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, allora esse sono i punti $P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, $P = (x_1, x_2)$ tali che

$$\begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - (-1/2) \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1/2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3t - 1/2 \end{cases} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Sia ora $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ un sottospazio affine passante per $Q \in \mathbb{A}^n_K$ e di giacitura $W \subseteq K^n$. Supponiamo che $W = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)$, dove $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base di W. Allora possiamo scrivere

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{2k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix} \qquad w_{ij} \in K$$

Allora, per definizione, se $Q = (q_1, \dots, q_n)$, i punti $P = (x_1, \dots, x_n)$ di S sono tutti e soli i punti che soddisfano $\overrightarrow{QP} \in W$.
Riscriviamo questa condizione utilizzando i termini che abbiamo introdotto

$$\overrightarrow{QP} \in W \iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \cdot w_1 + \dots + t_k w_k \quad \text{per certi } t_1, \dots, t_k \in K$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Queste ultime si dicono equazioni parametriche del sottospazio affine S.
Abbiamo quindi visto che passare dalle equazioni cartesiane a quelle parametriche è sostanzialmente l'operazione di determinare la generica soluzione di un sistema lineare. A questo punto ci possiamo chiedere: come passare da equazioni parametriche a equazioni cartesiane?
Supponiamo di avere equazioni parametriche per un sottospazio $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$, ovvero

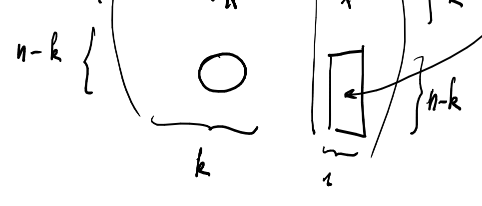
$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_k w_{1k} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_k w_{nk} \end{cases}$$

Queste equazioni valgono se e solo se il vettore $\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_k = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ \vdots \\ w_{nk} \end{pmatrix}$. Ciò vale, dato che abbiamo scelto $w_1, \dots, w_k$ come una base della giacitura di S, se e solo se i vettori $w_1, \dots, w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Questo vale se e solo se

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1k} & x_1 - q_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nk} & x_n - q_n \end{pmatrix} = k$$

$$\left(\left. \begin{array}{l} w_1, \dots, w_k \text{ base di } W \Rightarrow \operatorname{rg} \geq k \\ w_1, \dots, w_k, \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \text{ linearmente dipendenti} \Rightarrow \operatorname{rg} \leq k \end{array} \right\} \operatorname{rg} = k \right)$$

Abbiamo ottenuto una matrice $n \times (k+1)$ e vogliamo che il suo rango sia k. Quello che facciamo è applicare l'algoritmo di gradinizzazione di Gauss alla matrice, fino a portarla nella forma:



$n-k$ equazioni lineari in $x_1, \dots, x_n$
Affinché il rango sia k imponiamo che tutte queste equazioni si annullino e in tal modo troviamo $n-k$ equazioni cartesiane per S.

Esempio: consideriamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il sottospazio affine S dei punti $P = (x, y)$ con equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x - 0 = t \\ y - 2 = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y - 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora per ottenere equazioni cartesiane considero la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} - \text{I}]{} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y - 2 - x \end{pmatrix}$$

notiamo che $\dim S = \dim(\text{giacitura di } S) =$

$$= \dim \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

dobbiamo imporre che la matrice precedente abbia rango 1, ovvero che la seconda riga sia tutta nulla, il che è equivalente ad imporre

$$y - 2 - x = 0$$

abbiamo quindi in tal modo trovato una equazione cartesiana per S.

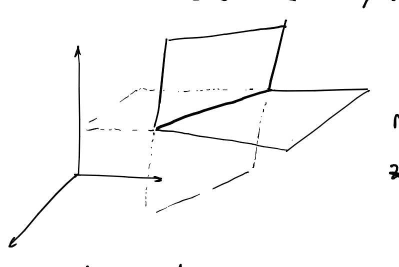
Oss: da quanto abbiamo visto, un sottospazio affine S in $\mathbb{A}^n_K$ di dimensione k è descritto da $n-k$ equazioni cartesiane; pertanto una retta in $\mathbb{A}^2_K$ è descritta da 1 equazione cartesiana; un piano in $\mathbb{A}^3_K$ è descritto da 1 equazione cartesiana; una retta in $\mathbb{A}^3_K$ è descritta da 2 equazioni cartesiane.

Oss: se $S \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è un iperpiano, allora $\dim S = n - 1$ e dunque S è descritto da $n - (n-1) = 1$ equazioni cartesiane;
viceversa, ogniqualvolta imponiamo una equazione (non banale) cartesiana, allora determiniamo un iperpiano in $\mathbb{A}^n_K$; in altre parole, ogni iperpiano di $\mathbb{A}^n_K$ è descritto da un'equazione del tipo:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = d$$

Oss: se $S \subseteq \mathbb{A}^3_K$ è una retta, allora essa è descritta da $3 - 1 = 2$ equazioni cartesiane, ovvero è descritta da un sistema della forma

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = d_1 & \leftarrow \text{questa equazione determina un piano} \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = d_2 & \leftarrow \text{questa equazione determina un piano} \end{cases}$$



ritroviamo il fatto che ogni retta nello spazio è intersezione di due piani.

Concludiamo ricordando che:

- le equazioni parametriche sono utili per produrre punti di un sottospazio affine
- le equazioni cartesiane sono utili per verificare se un punto appartenga o meno a un sottospazio affine.

Cominciamo ora a studiare la geometria del piano affine.
Ci concentreremo su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. Abbiamo che $\dim \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.
Sia $S \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ un sottospazio affine. Abbiamo tre possibilità:

- $\dim S = 0$, allora S è un punto di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 1$, allora S è una retta di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$
- $\dim S = 2$, allora $S = \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

Ci focalizziamo sul caso $\dim S = 1$, ovvero S è una retta.
Allora S essendo un sottospazio affine è determinato da un punto Q e dalla sua giacitura W. Dato che $\dim S = 1$, allora $\dim W = 1$, quindi $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \right)$. Supponiamo inoltre che $Q = (q_1, q_2)$
Allora abbiamo equazioni parametriche per S: se $P = (x, y) \in S$, allora

$$\begin{cases} x = q_1 + t \cdot l \\ y = q_2 + t \cdot m \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Se vogliamo ottenere equazioni cartesiane per S, dobbiamo considerare la matrice

$$\begin{pmatrix} l & x - q_1 \\ m & y - q_2 \end{pmatrix}$$

e imporre che essa abbia rango 1

Questo è equivalente a imporre che il determinante sia nullo.