# ESERCIZI SU DIAGONALIZZAZIONE
## ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
## MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
## A.A. 2023/24

### Esercizio 1

Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

(i) **Scrivi** la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ associata alla base standard $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.
(ii) **Calcola** il polinomio caratteristico di $f$.
(iii) **Determina** lo spettro di $f$.
(iv) **Decidi** se $f$ sia diagonalizzabile o meno.
(v) Nel caso in cui $f$ sia diagonalizzabile, **determina** una base $\mathcal{B}$ di autovettori di $f$ e **calcola** le due matrici del cambiamento di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.

(1)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x+2y+14z \\ 10x+3y+22z \\ -5x-y-10z \end{pmatrix}$$

(2)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x-2y+2z \\ 3x+z \\ -3y+6z \end{pmatrix}$$

(3)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -8x+6z \\ -4x-y+5z \end{pmatrix}$$

(4)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+5y-z \\ 5y-z \\ 9y-z \end{pmatrix}$$

(5)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x-3y+9z \\ -9x-7y+27z \\ -3x-3y+11z \end{pmatrix}$$

(6)
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -11x-6y+6z \\ 20x+13y-4z \\ -5x-3y+2z \end{pmatrix}$$

*Risoluzione.*

(1)

(i) La matrice associata a $f$ rispetto alla base standard è

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 14 \\ 10 & 3 & 22 \\ -5 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di $f$ è

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 & 14 \\ 10 & 3-\lambda & 22 \\ -5 & -1 & -10-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda + 6\,.$$

(iii) Lo spettro di $f$ è ottenuto determinando le radici del polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico si fattorizza come

$$p_f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$$

per cui lo spettro di $f$ è l'insieme $\{1, 2, -3\}$.

(iv) Abbiamo che $f$ è un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale di dimensione 3 in se stesso e dato che $f$ ammette 3 autovalori distinti. Otteniamo che $p_f(\lambda)$ si fattorizza completamente in fattori di grado 1 e ciascuno degli autovalori ha molteplicità algebrica uguale a 1; pertanto anche la molteplicità geometrica di ciascuno di tali autovalori è uguale a 1. Quindi molteplicità algebrica e molteplicità geometrica coincidono per ogni autovalore, e quindi $f$ è diagonalizzabile.

(v) Per determinare gli autospazi dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(1) &= \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\,, \\ \mathrm{Aut}(2) &= \ker(f - 2\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\,, \\ \mathrm{Aut}(-3) &= \ker(f + 3\cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\,. \end{aligned}$$

È quindi necessario risolvere i tre sistemi lineari omogenei

$$\left(\begin{pmatrix} 7 & 2 & 14 \\ 10 & 3 & 22 \\ -5 & -1 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\left(\begin{pmatrix} 7 & 2 & 14 \\ 10 & 3 & 22 \\ -5 & -1 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\left(\begin{pmatrix} 7 & 2 & 14 \\ 10 & 3 & 22 \\ -5 & -1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i conti otteniamo che

$$\mathrm{Aut}(1) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

$$\mathrm{Aut}(2) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}),$$

$$\mathrm{Aut}(-3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Quindi una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ è data da

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

## Esercizio 2

Considera una generica applicazione lineare:

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \end{array}$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sono generici numeri reali. Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^2$ e considera la matrice associata $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$. **Dimostra** che, se denotiamo con $p_f(\lambda)$ il polinomio caratteristico di $f$, allora $p_f(\lambda)$ si può scrivere come

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\big(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)\big) + \det\big(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)\big),$$

dove $\mathrm{tr}(\cdot)$ è la *traccia* di una matrice, ovvero la somma degli elementi sulla diagonale.

*Risoluzione.* Abbiamo che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pertanto il polinomio caratteristico di $f$ è dato da

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \mathrm{tr}\big(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)\big) + \det\big(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)\big). \end{aligned}$$

## Esercizio 3

**Dimostra** che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

*Risoluzione.* Se $A$ e $B$ sono due matrici simili, allora esiste una matrice invertibile $P$ tale per cui

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P\,.$$

Per il teorema di Binet

$$\det(P^{-1} \cdot B \cdot P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(P)$$

e dato che $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$ otteniamo $\det(A) = \det(B)$.

## Esercizio 4

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e sia $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^n$. **Dimostra** che $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$.

*Risoluzione.*

Ricordiamo che $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$ è la matrice le cui colonne solo le coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$ delle immagini degli elementi della base $\mathcal{E}$ attraverso l'applicazione lineare $L_A$.

Un calcolo esplicito mostra che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$

$$L_A(e_i) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(i)}\,.$$

Ora, la colonna formata dalle coordinate di $A^{(i)}$ rispetto a $\mathcal{E}$ è proprio $A^{(i)}$. Quindi la colonna $i$-esima di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$ è uguale a $A^{(i)}$, pertanto $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) = A$.

## Esercizio 5

Sia $f\colon V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita. Supponiamo che $f$ sia diagonalizzabile. **Dimostra** che l'applicazione lineare $f \circ f$, ottenuta componendo $f$ con se stessa, è anch'essa diagonalizzabile.

*Risoluzione.* Per definizione, se $f$ è diagonalizzabile, esiste una base $\mathcal{B}$ di $V$ tale che la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, ovvero

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove $n = \dim(V)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono elementi del campo $K$, non necessariamente distinti. Ricordando che la matrice associata alla composizione di due applcazioni lineari (rispetto a opportune basi) è il prodotto delle matrici associate a ciascuna delle due applicazioni lineari (rispetto a opportune basi) abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a $f \circ f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è diagonale, ovvero $f \circ f$ è diagonalizzabile.