Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 10

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Sia $r : X \to A$ una retrazione continua e X di Hausdorff. Dimostrare che A è chiuso in X.

2) Sia $U \subset R^n$ un aperto non vuoto e connesso. Dimostrare che ogni cammino continuo in U è omotopo rel $\{0, 1\}$ ad un cammino poligonale (cioè un cammino che è unione finita di segmenti consecutivi).[1]

3) Dimostrare che $\mathrm{GL}_2(R)$ si deforma su $\mathrm{O}(2)$.[2]

4) Generalizzare a $\mathrm{GL}_n(R) \searrow \mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{GL}_n(C) \searrow \mathrm{U}(n)$.

5) Sia $K \subset R^n$ compatto non vuoto. Dimostrare che $R^n - K$ ammette una retrazione su S^{n-1}_r, sfera centrata in 0 di raggio r sufficientemente grande.

6) Sia $K \subset R^n$ compatto non vuoto, con $n \geq 2$. Dimostrare che $R^n - K$ ammette un'unica componente connessa illimitata.

7) Dimostrare che le proiettività di RP^n e CP^n sono omeomorfismi.

8) Dimostrare che la composizione di due rivestimenti finiti è un rivestimento. Qual è il grado?

9) Sia $f : S^n \to X$ continua. Dimostrare che $f \simeq$ costante se e solo se f si puo estendere ad un'applicazione continua $\tilde{f} : B^{n+1} \to X$.

10) Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su uno spazio X. Supponiamo che tutte le classi d'equivalenza e lo spazio quoziente siano connessi. Dimostrare che X è connesso.

11) Dimostrare che l'inclusione $i : S^1 \hookrightarrow S^2$ è omotopa a costante.

12) Dimostrare che esiste un omeomorfismo di R^2 che manda l'asse x nella parabola $y = x^2$.

13) Dimostrare che $R \cong R^n \Rightarrow n = 1$.

---

[1] Suggerimento: utilizzare un ricoprimento di bocce aperte e usare il numero di Lebesgue.

[2] Suggerimento: usare Gram-Schmidt in modo continuo.