

Daniele Zaccaria

MECCANICA DELLE TRAVI

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Industriale, Ingegneria Navale



Copyright © 2016 Daniele ZACCARIA. All rights reserved.

Questo documento può essere riprodotto e distribuito in tutto o in parte, con ogni mezzo fisico o elettronico, purché questo avviso di copyright sia mantenuto su tutte le copie. La ridistribuzione commerciale non è permessa. Ogni traduzione, lavoro derivato o comprendente questo documento deve contenere questo stesso avviso di copyright : per esempio, non si possono produrre lavori derivati da questo documento ed imporre restrizioni aggiuntive sulla sua distribuzione. Per ulteriori informazioni si prega di contattare l'autore all'indirizzo zaccaria@units.it.

This document may be reproduced and distributed in whole or in part, in any medium physical or electronic, as long as this copyright notice is retained on all copies. Commercial redistribution is not allowed. All translations, derivative works, or aggregate works incorporating this document in whole or in part must be covered under this copyright notice. That is, you may not produce a derivative work from this document and impose additional restrictions on its distribution. For further information please contact the author at zaccaria@units.it.

Trieste, 9 settembre 2016

INDICE

Premessa	9
1 Fondamenti di meccanica delle travi	11
1.1 Modellizzazione geometrica	11
1.1.1 Travi snelle e tozze	12
1.1.2 Travi a grande e piccola curvatura	12
1.1.3 Travi a lenta, veloce e brusca variazione di sezione	13
1.1.4 Travi a piccola curvatura e a lenta variazione di sezione	13
1.1.5 Riferimento locale lungo l'asse della trave	14
1.2 Cinematica delle travi	14
1.2.1 Modello cinematico di sezione indeformata	15
Teoria di Vlasov	15
1.2.2 Variabili cinematiche	15
1.2.3 Componenti locali degli spostamenti e delle rotazioni	16
1.3 Dinamica delle travi	17
1.3.1 Forze esterne	17
Relazioni tra le forze e le coppie distribuite sulla linea d'asse e le forze distribuite nel volume e sulla superficie laterale della trave	18
1.3.2 Caratteristiche della sollecitazione	18
1.3.3 Componenti locali delle forze e delle caratteristiche della sollecitazione	19
1.3.4 Relazione tra le componenti delle caratteristiche della sollecitazione e le componenti di tensione	20
1.3.5 Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto	20
1.3.6 Vincoli e reazioni vincolari	21
1.4 Equazioni di equilibrio	22
1.4.1 Equazioni indefinite di equilibrio	22
1.4.2 Equazioni di discontinuità	23
1.4.3 Condizioni statiche al contorno	24
1.5 Polo di calcolo del momento	24
1.5.1 Cambiamento del polo di calcolo del momento	24
1.5.2 Vettore algebrico di sollecitazione	25
1.6 Deformazioni nelle travi	26
1.6.1 Trasformazione rigida relativa per unità di linea	26
Trasformazione rigida relativa in cinematica finita	27
1.6.2 Componenti di deformazione	27
1.6.3 Integrazione delle equazioni di congruenza	28
1.6.4 Travi inflesse	29
1.7 Polo della trasformazione rigida relativa	30
1.7.1 Cambiamento del polo della trasformazione rigida relativa	30
1.7.2 Vettore algebrico di deformazione	31
1.7.3 Deformazione locale	32
Linea longitudinale definita da un generico punto	32
1.8 Travi piane	33
1.8.1 Statica della trave piana	34
1.8.2 Cinematica della trave piana	36
Trave piana ad asse rettilineo	36
Trave piana inflessa	37
Determinazione diretta del vincolo di trave inflessa e della dilatazione della linea d'asse nel caso di trave inflessa piana ad asse rettilineo	37
1.9 Principio dei lavori virtuali per le travi	37
Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio di forze e caratteristiche della sollecitazione	38
2 Travi elastiche lineari	41
2.1 Teoria tecnica delle travi	41
2.2 Lavoro di deformazione nelle travi	42
2.3 Energia elastica di deformazione nelle travi	44
2.4 Teoremi sul lavoro di deformazione	46
2.4.1 Teorema di Clapeyron	46

2.4.2	Teorema di Betti	47		Rettangolo sottile	89
2.5	Energia potenziale totale nelle travi	50		Triangolo rettangolo	90
2.5.1	Variazione del funzionale energia potenziale totale . . .	51		Arco circolare sottile	92
2.5.2	Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale .	54		Settore circolare	94
2.5.3	Principio di minimo dell'energia potenziale totale	55	3.4.2	Sezioni Composte di parti semplici	95
2.6	Centri di flessione e di taglio	56		Sezione composta di due rettangoli	95
2.6.1	Centro di flessione	56		Sezione rettangolare con un intaglio	97
2.6.2	Centro di taglio	57		La sezione a C sottile	100
2.6.3	Energia elastica di deformazione	58		La sezione a Z sottile	102
	Coordinate dei centri di flessione e di taglio	58			
3	Modello di Eulero-Bernoulli	61	4	Distribuzione della tensione normale	105
3.1	Legame costitutivo nell'intorno di un punto	62	4.1	Criterio di snervamento	106
3.1.1	Legame costitutivo elastico	62	4.2	Forza normale centrata	107
3.1.2	Legame costitutivo elastoplastico	63	4.2.1	Sezioni omogenee	107
3.2	Legame costitutivo assiale-flessionale elastico lineare	64	4.2.2	Sezioni composte di più materiali	107
3.2.1	Legame costitutivo assiale	65	4.2.3	Concentrazioni di sforzo	109
3.2.2	Legame costitutivo flessionale	66	4.2.4	Condizioni di snervamento (sezioni omogenee)	111
3.2.3	Travi omogenee a piccola curvatura	67		Integrazione in un campo di spostamenti	111
3.2.4	Travi piane	67	4.3	Flessione retta	113
	Legame costitutivo tagliante e torcente	68	4.3.1	Sezioni omogenee	113
3.3	Geometria delle masse	70		Sezione a doppio T tipo IPE	114
3.3.1	Masse distribuite su un'area piana	70	4.3.2	Sezioni composte di più materiali	115
3.3.2	Vettore dei momenti statici	72		Omogeneizzazione	115
	Momenti statici	73		Sezione rettangolare in cemento armato	116
	Proprietà del baricentro	74	4.3.3	Condizioni di snervamento	119
3.3.3	Tensore di inerzia	77		Cenni al calcolo a rottura	119
	Momenti di inerzia	78		Integrazione in un campo di spostamenti	121
	Formule di trasposizione o del trasporto (Teorema di Huyghens-Steiner)	81	4.4	Flessione Deviata	126
	Direzioni e momenti principali di inerzia	83	4.4.1	Relazione tra asse neutro e asse di sollecitazione (coniugio)	127
	Formule di rotazione	83		Proprietà del coniugio	127
	Circonferenza di Mohr	84		Legame costitutivo nel sistema coniugato	127
	Raggi di inerzia	85		Formula del coniugio	128
	Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann)	86	4.4.2	Tensioni normali	128
3.4	Sezioni omogenee	87	4.4.3	Sezioni omogenee	130
3.4.1	Sezioni tipiche	88	4.4.4	Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia	131
	Rettangolo	88		Proprietà delle tangenti	131
			4.4.5	Sezione rettangolare con un intaglio	133

4.5	Forza normale eccentrica	136	6	Distribuzione della tensione tangenziale	199
4.5.1	Asse neutro	136	6.1	Formula di Jourawski	199
4.5.2	Tensione normale	137	6.2	Criteri di snervamento	200
4.5.3	Sezioni omogenee	139	6.3	Torsione	201
4.5.4	Antipolarità di inerzia	140	6.3.1	La sezione circolare	202
	Equazione segmentaria dell'asse neutro	140	6.3.2	La sezione circolare cava	203
	Corrispondenza tra rette e punti	141	6.3.3	Mensola di sezione circolare cava	204
	Teorema di reciprocità	142	6.3.4	La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa	205
	Polarità di inerzia	143		Sezione scatolare di forma rettangolare	207
4.5.5	Sezione composta di due rettangoli	143		Fattore torsionale di rigidezza	208
4.5.6	Sezione circolare composta di due materiali	147		La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse	210
4.5.7	Nocciolo centrale di inerzia	150	6.3.5	La torsione nelle travi di sezione sottile aperta	212
	Contorno del nocciolo quale luogo di punti	150		La sezione rettangolare sottile	214
	Contorno del nocciolo quale inviluppo di rette	151		La sezione sottile generica	217
	Corrispondenza tra vertici e segmenti	152		Semicirconferenza sottile	221
	Sezione rettangolare	153		La sezione a C	222
	Convessità del nocciolo centrale di inerzia	155	6.4	Taglio	225
	Sezione non reagente a trazione	156	6.4.1	Centro di taglio	225
4.5.8	Sistema di masse-momenti statici	158	6.4.2	Formula di Jourawski	226
	Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura	161		Formula di Jourawski binomia	226
				Formula di Jourawski monomia	228
				Sezione a doppio T	229
5	Modello di Saint-Venant	163	6.4.3	Il taglio nelle sezioni compatte simmetriche	230
5.1	Caratteristiche della sollecitazione	164	6.4.4	Sezione rettangolare	232
5.2	Principio e ipotesi di Saint-Venant	164	6.4.5	Sezione circolare	233
5.3	Problema di Saint-Venant	166	6.4.6	Sezione triangolare equilatera	236
5.4	Estensione del problema di Saint-Venant	169	6.4.7	Il taglio nelle sezioni sottili aperte	239
5.5	Problema della torsione	169		Fattori di taglio	242
5.5.1	Funzione di ingobbamento	169		Diagramma qualitativo su tratti rettilinei a spessore costante	243
5.5.2	Legame costitutivo torsionale	174		Equilibrio in un nodo triplo	245
5.5.3	Funzione delle tensioni	176	6.4.8	La sezione a doppio T	246
5.6	Centro di taglio	180	6.4.9	La sezione a L a lati uguali	248
5.6.1	Problema di flessione, taglio e torsione	180	6.4.10	La sezione a C	249
5.6.2	Energia complementare mutua	181		Taglio parallelo all'anima passante per il centro di taglio Centro di taglio	249 252
	Soluzione del problema di Saint-Venant	185		Taglio agente secondo l'asse di simmetria	253
5.7	Legame costitutivo tagliante	195	6.4.11	Sezione a Z	254
	Fattori di taglio	195			

6.4.12 Il taglio nelle sezioni sottili chiuse simmetriche	258
6.4.13 Sezione scatolare rettangolare	260
Riferimenti bibliografici	261
Indice analitico	263

PREMESSA

In questa seconda dispensa di *Scienza delle Costruzioni* vengono introdotti i principali concetti di base riguardanti la meccanica della trave. Si sviluppano innanzitutto la cinematica e la statica delle travi. Ci si rivolge poi a descrivere il legame costitutivo elastico lineare e a sviluppare in tale ambito sia il modello di Eulero-Bernoulli che quello di Saint-Venant. Nell'ambito di tali modelli viene risolto anche il problema della determinazione dello sforzo interno nel solido trave a partire dalla conoscenza delle caratteristiche della sollecitazione.

FONDAMENTI DI MECCANICA DELLE TRAVI

1.1 Modellizzazione geometrica

Come già detto, una trave è geometricamente un solido monodimensionale descritto dalla linea d'asse e dalle sezioni rette associate ai punti della stessa linea d'asse (fig. 1.1). Alla linea d'asse si richiederà di essere mono-

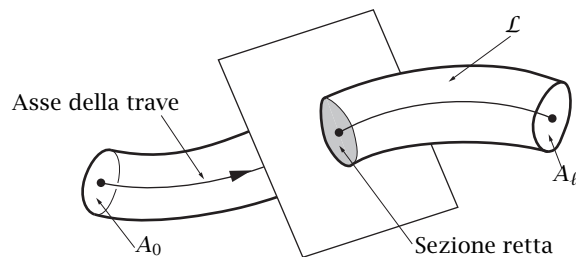


Figura 1.1: Trave

connessa e quindi di avere due punti di estremità di cui l'uno sarà, opportunamente orientata la linea d'asse, il punto di prima estremità 0 e l'altro di seconda estremità ℓ . La linea d'asse e le associate sezioni rette ricostruiscono un solido $\mathcal{B}$ caratterizzato da un dominio avente la superficie di contorno $\partial\mathcal{B}$ composta dalle due sezioni A_0 e A_ℓ di prima e seconda estremità rispettivamente e dalla parte restante $\mathcal{L}$ detta *superficie laterale della trave*.

La scelta di una linea d'asse da associare ad un generico corpo monodimensionale ha, allo stato attuale, ampi margini di arbitrarietà. Se, e quando, lo sviluppo dei particolari di un dato modello di trave dovesse fornire un significato fisico preciso a certi punti di una sezione retta, la scelta della linea d'asse ne potrà essere condizionata. È implicita in tale asserzione che un solido monodimensionale, descrivibile da un'unica linea d'asse, deve potersi considerare anche quale insieme di fibre longitudinali, ovverossia di fibre che hanno più o meno l'andamento del solido. Affinché tali fibre siano più o meno scambiabili tra loro nella descrizione del solido occorre anche che debbano avere più o meno lo stesso andamento. Il senso preciso di tale affermazione è che una volta prescelta una certa rappresentazione tramite una linea d'asse e le associate sezioni rette, sia possibile scegliere un insieme di fibre longitudinali che abbiano più o meno la stessa lunghezza tra due qualunque sezioni rette e siano tutte se non ortogonali, come lo è la linea d'asse, almeno quasi ortogonali alle sezioni rette.

Si noti che il modello geometrico prescelto di trave non deve, obbligatoriamente, coincidere con un dato corpo monodimensionale ma può semplicemente approssimarlo, soprattutto se in tal modo si semplifica l'analisi del problema. A supporto di tale affermazione si consideri una tipica mensola in cemento armato, quale quella riportata in fig. 1.2, di sezioni verticali rettangolari. Innanzitutto, la forma della mensola suggerirebbe una linea d'asse leggermente inclinata rispetto alla orizzontale ma, data la piccolezza, e quindi l'ininfluenza, di tale inclinazione è prassi la scelta di una linea d'asse orizzontale. Le sezioni rette (verticali) sono rettangolari e quindi

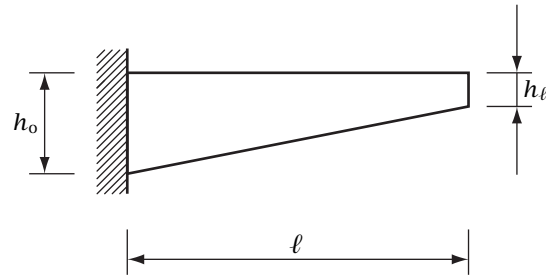


Figura 1.2: Casseratura della mensola

doppiamente simmetriche e potrebbe essere quindi desiderabile scegliere quale linea d'asse il luogo dei punti intersezione degli assi di simmetria. Con tale scelta il modello geometrico individua il corpo di fig. 1.3, che non

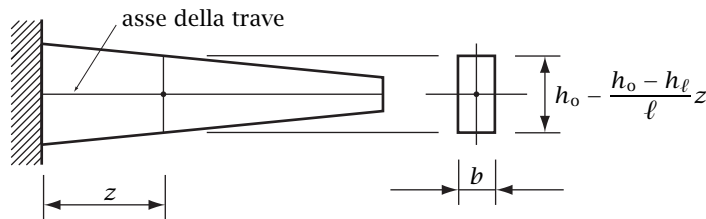


Figura 1.3: Modello geometrico della mensola

coincide geometricamente con la mensola originale che il modello vuole descrivere ma, più semplicemente, l'approssima.

1.1.1 Travi snelle e tozze

L'attendibilità del modello di trave dipende dal rapporto ℓ/H tra la lunghezza della linea d'asse ℓ e una dimensione significativa H delle sezioni rette. A parità di forma della sezione, più tale rapporto è grande e più la trave è *snella*, viceversa più tale rapporto è piccolo e più la trave è *tozza*.¹

¹Nella letteratura inglese, per esprimere che una trave è snella, oltre al termine *slender*, si utilizzano spesso i termini *long* e *thin*, a volte anche insieme.

Più una trave è tozza e meno il solido che rappresenta si presta ad essere descritto da un modello monodimensionale.

In alcuni casi, all'aumentare del rapporto ℓ/H , potrebbe diventare significativo anche il concetto di *trave molto snella*, a differenza di quello di *trave molto tozza* che non può che significare il fatto che ormai il solido non ha più niente di monodimensionale e che quindi non è più modellabile come trave.

1.1.2 Travi a grande e piccola curvatura

Nel caso in cui la linea d'asse sia curvo, oltre al rapporto precedente occorre però considerarne anche un altro che riguarda la curvatura della linea d'asse. Ciò dipende dal fatto che un solido monodimensionale deve potersi anche considerare, come detto, quale insieme di fibre longitudinali senza forti differenze di lunghezza tra di loro, cosa che invece avverrebbe se il raggio di curvatura a fosse commisurabile alla dimensione H della sezione (fig. 1.4). A parità di forma della sezione, più il rapporto H/a

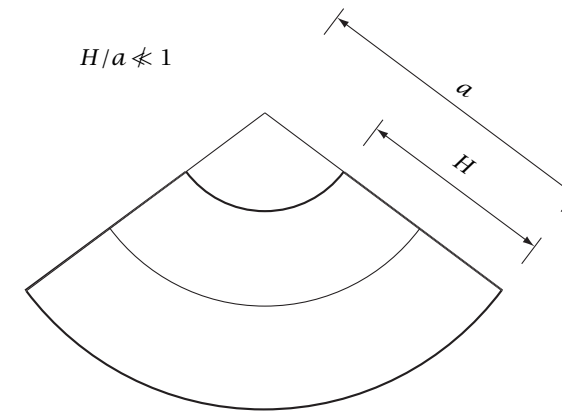


Figura 1.4: Trave a grande curvatura

è piccolo e più la trave è a *piccola curvatura*, mentre più tale rapporto è grande e più la trave è a *grande curvatura*.² Più una trave è a grande

²Nella letteratura inglese, per esprimere che una trave curva è a piccola curvatura si usa il termine *thin*, mentre per esprimere che è a grande curvatura si usa il termine *thick*.

curvatura e meno il solido che rappresenta si presta ad essere descritto da un modello monodimensionale.

1.1.3 Travi a lenta, veloce e brusca variazione di sezione

In generale le sezioni rette delle travi saranno variabili da punto a punto della linea d'asse. Un esempio di tal genere è rappresentato dalla trave ad asse rettilineo di fig. 1.3. Come detto più sopra, il solido deve poter essere descritto da un insieme di fibre longitudinali quasi ortogonali alle sezioni rette, il che impone che l'eventuale variazione di sezione deve essere sufficientemente lenta.

Se ΔH è la variazione di una lunghezza significativa della sezione (significativa dal punto di vista della variazione) tra due sezioni poste alla distanza Δs allora più il rapporto $\Delta H / \Delta s$ è piccolo (eventualmente al limite nell'intorno di una data sezione) e più la trave ha una *lenta variazione di sezione* tra le due sezioni (nell'intorno della data sezione), mentre più il rapporto è grande e più la trave ha una *veloce variazione di sezione*. Se il rapporto, al limite nell'intorno di un dato punto della linea d'asse, va all'infinito la trave ha invece una *brusca variazione di sezione* in corrispondenza del dato punto, punto a cui non può essere pertanto associata nessuna sezione retta.

Nel caso di fig. 1.3, quale lunghezza significativa si può assumere l'altezza della sezione rettangolare mentre la variazione di sezione, data la sua uniformità, può essere commisurata alle sezioni iniziale e finale ottenendo il rapporto $\frac{h_o - h_f}{l}$.

1.1.4 Travi a piccola curvatura e a lenta variazione di sezione

Si consideri un tronco di trave V intorno di una data sezione retta A e corrispondente di un tratto Δs della linea d'asse di una data trave. Sotto l'ipotesi di piccola curvatura e di sezione lentamente variabile la situazione geometrica del dato tronco di trave è approssimata da quella di un tronco di trave cilindrico di sezione A , almeno se Δs è piccolo, ovvero sia per $\Delta s \rightarrow 0$ (fig. 1.5).

Tenendo conto che “normalmente” una trave vera e propria che non sia ad asse rettilineo e a sezione costante “dovrebbe essere” a piccola curvatura e a lenta variazione di sezione, nel seguito di questa trattazione alcune

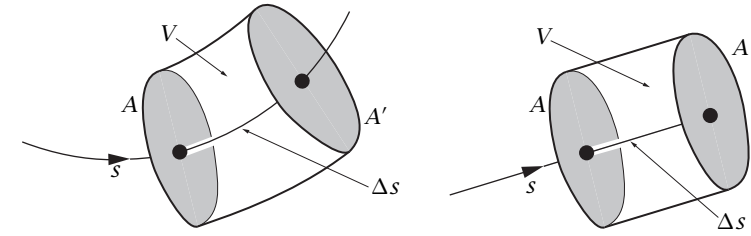


Figura 1.5: Approssimazione di un tronco di trave

relazioni che riguardano l'intorno di una sezione retta saranno ricavate con riferimento ad un tronco di trave cilindrico. Per evitare equivoci si ribadisce che al limite per $\Delta s \rightarrow 0$ si avrà in generale una buona approssimazione, non un risultato esatto. Il risultato ottenuto sarà esatto solo per la trave ad asse rettilineo e a sezione costante, cioè nel caso in cui effettivamente i tronchi di trave nell'intorno di una data sezione siano esattamente cilindrici. Si faccia attenzione alla dizione “risultato esatto”, poiché lo è solo nei limiti delle particolari ipotesi che saranno state utilizzate e che caratterizzeranno un particolare modello di trave. Un modello di trave diverso può avere ipotesi diverse e originare risultati diversi, esatti, per quel dato modello, nel caso di trave ad asse rettilineo e a sezione costante.

Un primo uso della detta approssimazione è la riduzione di un integrale esteso ad un tronco di trave V , intorno di una sezione A , di una quantità f_V (non ha importanza se scalare, vettoriale oppure tensoriale) per unità di volume ad una integrazione nell'area A seguita da una integrazione sulla parte di linea Δs che definisce il tronco di trave (fig. 1.5):³

$$\int_V f_V dV = \int_{\Delta s} \left(\int_A f_V dA \right) ds. \quad (1.1)$$

Si noti che tale riduzione vale solo nel caso di un volume cilindrico e che quindi in generale la riduzione stessa è solo approssimata.⁴ Dalla (1.1) risulta evidente che la grandezza f definita dalla seguente relazione:

$$f = \int_A f_V dA. \quad (1.2)$$

³Per il *teorema di riduzione* si veda per esempio Gilardi (1996, pp. 465–477)

⁴In realtà la (1.1), come si evince dal teorema di riduzione citato alla nota precedente, vale in modo esatto anche nel caso in cui l'asse sia rettilineo e la sezione variabile, indipendentemente dalla velocità di variazione.

rappresenta una grandezza per unità di linea che integrata lungo la linea riproduce l'integrale nel volume del tronco di trave dell'originale grandezza f_V per unità di volume. Attenzione ad interpretare correttamente la (1.2): per ottenere il valore di f in corrispondenza di un dato punto della linea d'asse occorre integrare la f_V sui punti della corrispondente sezione retta A .

1.1.5 Riferimento locale lungo l'asse della trave

Un generico punto O della linea d'asse della trave può essere individuato da una coordinata curvilinea s che, ora e nel seguito, si assume essere la sua lunghezza d'arco (fig. 1.6a). Alla linea d'asse di una trave si richiederà

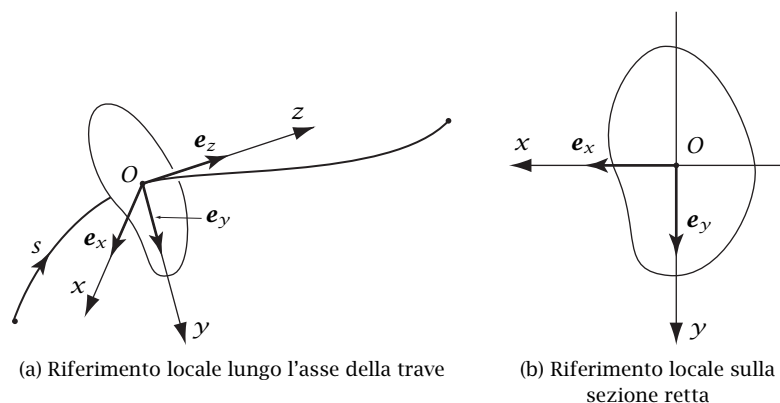


Figura 1.6: Riferimento locale

di essere una curva sufficientemente regolare, nel senso che risulti definita in ogni suo punto la retta tangente e quindi il piano ortogonale alla curva stessa e definente la sezione retta. Se tale condizione di regolarità è soddisfatta, sarà possibile scegliere localmente, in corrispondenza di ogni punto O della linea d'asse, un sistema di assi cartesiani ortogonali locale $Oxyz$ avente la direzione z ortogonale alla sezione retta, quindi tangente alla linea d'asse in O , e con gli assi x e y ortogonali tra loro e posti sulla stessa sezione retta (fig. 1.6b). Tale sistema locale di assi così come l'associata base ortonormale e_x, e_y, e_z dipenderanno in generale dal punto e quindi dalla coordinata curvilinea s , salvo che la linea d'asse non sia rettilinea. Nel

caso di una trave ad asse curvo, gli assi x e y posti nel piano della sezione si possono fare corrispondere rispettivamente con la *binormale* e con la *normale principale* alla curva.

1.2 Cinematica delle travi

Con riferimento alla fig. 1.7 la cinematica di una trave sarà descritta sce-

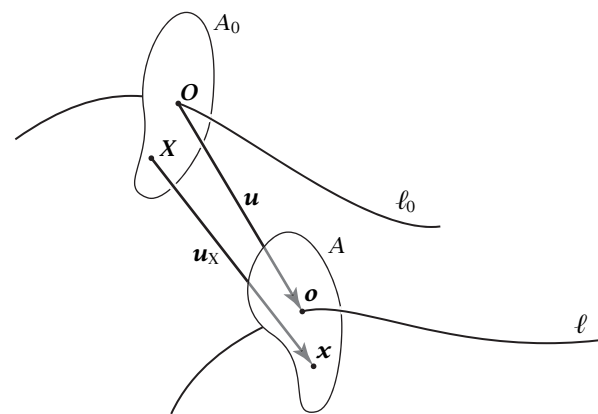


Figura 1.7: Spostamenti

gliendo innanzitutto una configurazione di riferimento, individuata dalla sua linea d'asse ℓ_0 e dalle associate sezioni rette A_0 . Nel caso più generale possibile, la configurazione deformata della trave sarà quindi caratterizzata da una linea d'asse ℓ e dalle associate sezioni rette A deformate. La linea d'asse e le sezioni rette deformate possono essere, per esempio, individuate dagli spostamenti dei punti posti sulla linea d'asse e sulle sezioni rette nella configurazione di riferimento. Nello spirito di un modello monodimensionale, che vuole essere una semplificazione rispetto al modello tridimensionale, tutte le funzioni che intervengono dovranno però essere definite solo sui punti della linea d'asse di riferimento. Ne consegue che i campi di spostamento definiti nei punti delle sezioni rette indeformate devono essere fatti dipendere approssimativamente da un certo numero di funzioni definite sulla linea d'asse indeformata. Tale dipendenza equivale ad un vincolamento dei campi di spostamento delle sezioni rette.

Per quel che riguarda la linea d'asse deformata, questa può essere individuata in generale dallo spostamento $\mathbf{u}$ dei suoi punti. Indicando con $\mathbf{O}$ il generico punto della linea d'asse indeformata ℓ_0 , resta così individuata la seguente funzione a valori vettoriali:

$$\mathbf{u}: \ell_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{O} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{O}). \quad (1.3)$$

Se sulla linea d'asse indeformata viene scelta una coordinata curvilinea s , la funzione (1.3) diventa:

$$\mathbf{u}: [s_0, s_\ell] \rightarrow \mathcal{V}, \quad s \mapsto \mathbf{u}(s), \quad (1.4)$$

dove s_0 e s_ℓ sono le coordinate dei punti di prima e, rispettivamente, seconda estremità sulla linea d'asse indeformata.

La descrizione della cinematica delle sezioni rette per il tramite di funzioni definite sulla linea d'asse implica invece una scelta del modello cinematico di trave che si vuole utilizzare.

1.2.1 Modello cinematico di sezione indeformata

Il più semplice, e quindi più comune, modello cinematico utilizzato in ambito tecnico per la modellizzazione della trave deformabile è quello di richiedere che le sezioni rette restino indeformate. Ne consegue che la generica sezione deformata può essere individuata da una trasformazione rigida che porta la sua configurazione indeformata in quella deformata. Per evitare equivoci si sottolinea ancora una volta che la trasformazione rigida ha unicamente lo scopo di individuare, rispetto alla configurazione di riferimento, la configurazione deformata ad un dato istante e quindi non si tratta di un moto rigido che porta la configurazione di riferimento in quella deformata.

Conseguentemente a tale scelta, il campo degli spostamenti e le associate deformazioni della trave, quale solido tridimensionale, dipendono esclusivamente dalle trasformazioni rigide delle sezioni rette. Le funzioni da cui dipendono i campi di spostamento delle singole sezioni rette sono quindi i parametri delle trasformazioni rigide delle sezioni stesse che, a differenza del caso di una trave rigida, variano in generale lungo la linea d'asse, potendo quindi produrre una deformazione della trave.

La richiesta di sezione retta indeformata equivale alle due seguenti ipotesi:

1. Le sezioni rette si conservano piane;
2. Le sezioni rette si conservano indeformate nel proprio piano;

ed è in questa forma che spesso viene citata tale ipotesi cinematica.

Posto il problema in questi termini, ne consegue immediatamente che le sezioni rette dopo la deformazione non sono in generale “sezioni rette” della configurazione deformata, salvo il caso particolare in cui si richieda che si conservino piane e ortogonali alla linea d'asse deformata, richiesta che è alla base del modello di trave *inflessa* o di *Eulero-Bernoulli*.⁵ Il caso generale in cui le sezioni rette non restano ortogonali alla linea d'asse deformata non crea nessuna particolare difficoltà se si assume l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, poiché in tal caso la configurazione deformata è approssimata da quella indeformata. Nel caso in cui gli spostamenti siano grandi la trave deformata è ancora un solido monodimensionale e come tale descrivibile geometricamente da una linea d'asse e da delle associate sezioni rette, che però in generale non corrisponderanno, tramite la deformazione, alle sezioni rette della configurazione di riferimento.

◇ ◇ ◇

Teoria di Vlasov. Vi sono casi in cui l'ipotesi cinematica di indeformabilità delle sezioni rette è troppo restrittiva e necessita quindi di essere allentata. Tra questi per esempio il problema della *torsione di travi di sezione sottile aperta*. In tal caso, agli spostamenti dovuti al moto rigido della sezione retta viene sommato un campo di spostamenti ortogonale alla sezione stessa che la ingobbano, pur conservandola indeformata nel proprio piano. Il campo di spostamenti ortogonale alla sezione viene ottenuto moltiplicando una funzione definita sulla linea d'asse, costituente una delle incognite del problema, con una funzione definita sulla sezione retta, detta *funzione di ingobbamento*⁶ e dipendente solo dalla forma geometrica della sezione.

◇ ◇ ◇

1.2.2 Variabili cinematiche

La trasformazione rigida di una generica sezione retta può essere descritta dalla composizione di una traslazione e di una rotazione. In particolare, la traslazione può essere scelta di entità pari allo spostamento del

⁵ *Bernoulli-Euler theory of bending* nella letteratura inglese.

⁶ *Warping function* nella letteratura inglese.

punto della sezione posto sulla linea d'asse con la conseguenza che l'asse di rotazione contiene tale punto. Si noti che la scelta del punto sulla linea d'asse quale polo della descrizione cinematica non è obbligata, per cui sarà sempre possibile modificare tale scelta nel momento in cui se ne presenterà la necessità. È indifferente l'ordine in cui si effettuano la traslazione e la rotazione, per cui, con riferimento alla fig. 1.8, può prima effettuarsi

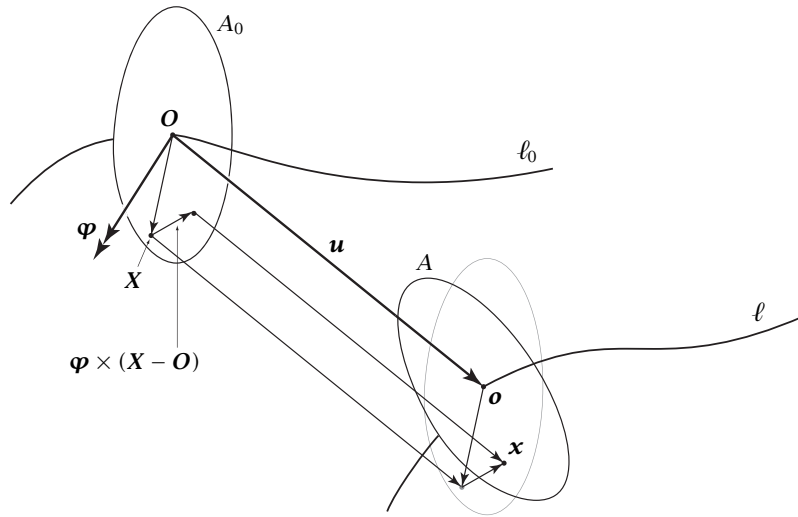


Figura 1.8: Descrizione cinematica di una trave

la traslazione che porta O su o e indi la rotazione con asse passante per il punto o della configurazione deformata, oppure prima la rotazione con asse passante per il punto O della configurazione indeformata e indi traslare la sezione così ruotata.

Il campo delle traslazioni delle sezioni rette coincide allora con il campo (1.3) degli spostamenti u dei punti della linea d'asse indeformata ℓ_0 (fig. 1.7 p. 14). Nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti, e quindi di piccole rotazioni, le rotazioni sono poi descritte da un vettore rotazione φ . Ancora con riferimento alla fig. 1.8, lo spostamento u_X del generico punto X della sezione retta dovuto alla rototraslazione di polo il punto O vale approssimativamente:

$$u_X \approx u + \varphi \times (X - O). \quad (1.5)$$

1.2.3 Componenti locali degli spostamenti e delle rotazioni

Lo spostamento u di un punto O della linea d'asse indeformata può decomporci rispetto alla base locale e_x, e_y, e_z individuata dal sistema $Oxyz$ associato allo stesso punto. Ne risulta una componente scalare di spostamento w nella direzione della linea d'asse (e quindi ortogonale alla sezione retta indeformata) e una componente vettoriale di spostamento v sulla sezione retta indeformata (fig. 1.9a), che a sua volta può scomporsi secondo

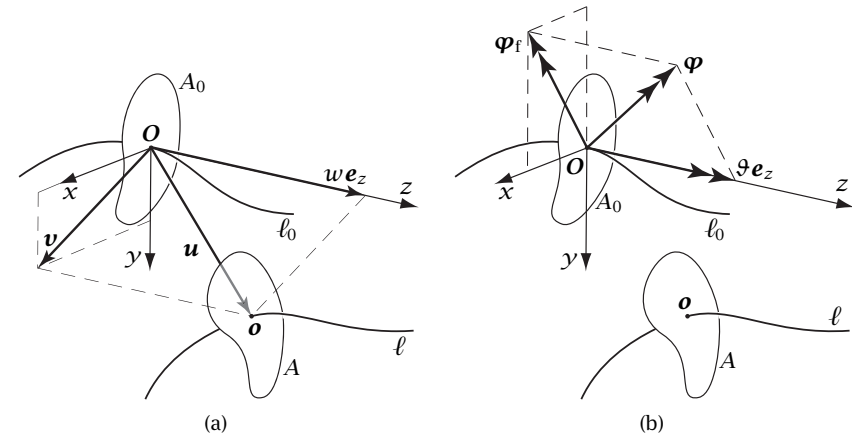


Figura 1.9: Decomposizione locale di spostamenti e rotazioni

i due assi x e y di riferimento prescelti sulla sezione stessa:

$$u = v + we_z = ue_x + ve_y + we_z. \quad (1.6)$$

Analogamente può essere decomposta la rotazione φ della sezione retta (fig. 1.9b):

$$\varphi = \varphi_f + \vartheta e_z = \varphi_x e_x + \varphi_y e_y + \vartheta e_z. \quad (1.7)$$

La componente ϑ rappresenta una rotazione della sezione nel proprio piano e viene detta *rotazione torsionale*.⁷ La componente vettoriale φ_f , così

⁷ Torsional rotation nella letteratura inglese.

come le sue due componenti scalari φ_x e φ_y , rappresentano invece delle rotazioni della sezione attorno ad assi che le appartengono e vengono dette *rotazioni flessionali*.⁸

È bene ribadire che la base utilizzata per decomporre i vettori spostamento e rotazione è locale, cioè varia in generale da sezione a sezione. Si ricorda che l'unica eccezione possibile si presenta nel caso di asse indeformato della trave rettilineo, circostanza che di per sé rende invariante lungo la linea d'asse la sua tangente, e quindi il versore normale $\mathbf{e}_z$ alla sezione retta, e che inoltre permette di assumere gli assi x e y nelle diverse sezioni in modo tale da assicurare anche l'invarianza dei versori $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_y$.

1.3 Dinamica delle travi

Come già per il campo degli spostamenti anche le quantità dinamiche, ovvero il sistema delle forze esterne ed interne e la quantità di moto, dovranno essere ridotte alla linea d'asse. In sintonia con la scelta di descrivere la cinematica per il tramite di un moto rigido delle sezioni rette, le quantità dinamiche che competono ad un tronco di trave infinitesimo saranno descritte dalla loro risultante e del loro momento risultante rispetto al polo della descrizione cinematica.⁹ Come già detto, la scelta del punto sulla linea d'asse quale polo della descrizione cinematica, e quindi della descrizione dinamica, non è obbligata e potrà essere modificata quando necessario.

A differenza del campo degli spostamenti, riferito alla linea d'asse indeformata, le quantità dinamiche dovrebbero essere riferite alla linea d'asse deformata, dato che le equazioni di bilancio in cui intervengono sono valide in tale configurazione. Tuttavia nel caso si sviluppi una teoria del primo ordine, come sarà fatto nel seguito, la configurazione deformata coincide approssimativamente con la configurazione indeformata per cui anche le quantità dinamiche costituiranno dei campi definiti lungo la linea d'asse indeformata (anche se solo approssimativamente).

⁸ *Bending rotation* nella letteratura inglese.

⁹ Se ci si servisse di una cinematica più ricca, come nel caso della teoria di Vlasov citata p. 15, occorrerebbe arricchire in modo opportuno anche la descrizione delle quantità dinamiche.

1.3.1 Forze esterne

Come detto in precedenza, tali forze vanno calcolate quali risultanti e momenti risultanti rispetto ai punti della linea d'asse delle forze esterne applicate al solido trave, e cioè delle forze che agiscono sulla superficie esterna, delle forze di volume oltre ad eventuali forze concentrate oppure distribuite su superfici interne, su linee interne e su linee esterne. Vengono in tal modo generati i seguenti tipi di forze (fig. 1.10):

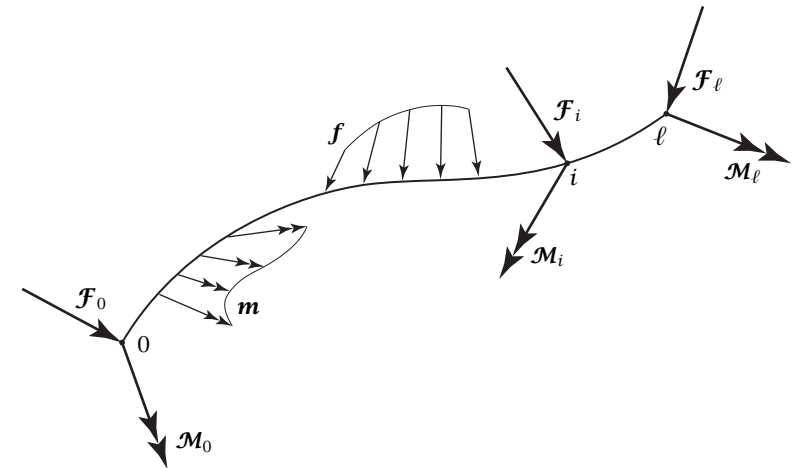


Figura 1.10: Forze esterne applicate alla linea d'asse di una trave

- forze distribuite f sulla linea d'asse;
- coppie distribuite m sulla linea d'asse;
- forze concentrate F_0 , F_ℓ e F_i agenti rispettivamente nei punti di estremità, 0 iniziale e ℓ finale, e in punti interni i della linea d'asse;
- coppie concentrate M_0 , M_ℓ e M_i agenti rispettivamente nei punti di estremità, 0 iniziale e ℓ finale, e in punti interni i della linea d'asse.

Le forze e le coppie distribuite per unità di linea sono generate dalle forze distribuite nel volume della trave, dalle forze distribuite sulla superficie laterale della trave e infine dalle forze distribuite su superfici interne e su

linee, esterne o interne, della trave che abbiano un andamento longitudinale, ovverossia che siano al più tagliate, rispettivamente, in una o più linee e in uno o più punti da una generica sezione retta.

Le forze e le coppie concentrate in un punto della linea d'asse, compresi i due punti di estremità, sono invece generate da forze distribuite lungo la corrispondente sezione retta, da forze distribuite su linee che appartengono alla stessa sezione retta e infine dalle forze concentrate in un punto della stessa sezione retta.

Relazioni tra le forze e le coppie distribuite sulla linea d'asse e le forze distribuite nel volume e sulla superficie laterale della trave. Con riferimento alla fig. 1.11, si ricavano nel seguito le relazioni tra le forze esterne

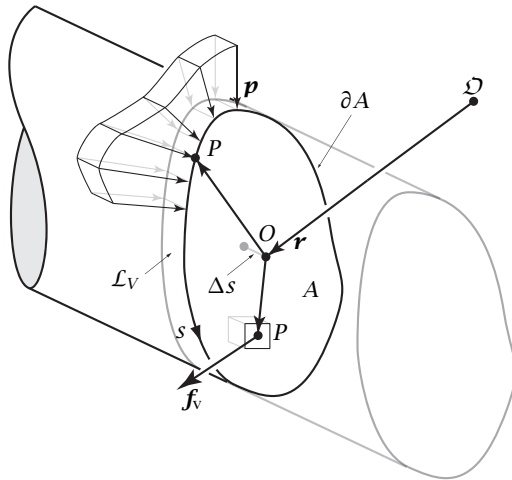


Figura 1.11: Forze applicate al solido trave

di superficie $\mathbf{p}$ e di volume $\mathbf{f}_v$ agenti sul corpo solido monodimensionale e le forze $\mathbf{f}$ e coppie $\mathbf{m}$ distribuite lungo la linea d'asse. La forza globale $\mathbf{F}(V)$ e il momento globale $\mathbf{M}(V)$ valutato rispetto ad un dato polo $\mathcal{O}$, forza e momento che competono ad un tronco di trave Δs , valgono:

$$\mathbf{F}(V) = \int_{\mathcal{L}_V} \mathbf{p} \, ds + \int_V \mathbf{f}_v \, dA = \int_{\Delta s} \left(\int_{\partial A} \mathbf{p} \, ds + \int_A \mathbf{f}_v \, dA \right) ds. \quad (1.8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(V) &= \int_{\mathcal{L}_V} (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{p} \, ds + \int_V (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{f}_v \, dA \\ &= \int_{\Delta s} \left\{ \mathbf{r} \times \left(\int_{\partial A} \mathbf{p} \, ds + \int_A \mathbf{f}_v \, dA \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial A} (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{p} \, ds + \int_A (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{f}_v \, dA \right\} ds, \end{aligned} \quad (1.8b)$$

dove $\mathcal{L}_V$ è la superficie laterale del tronco di trave, ovverossia la parte della sua superficie di contorno che appartiene alla superficie laterale della trave, $\mathbf{r}$ è il vettore posizione del punto O sulla linea d'asse rispetto al polo $\mathcal{O}$ per il calcolo dei momenti e avendo utilizzato la riduzione (1.1) dell'integrale di volume e l'analoga riduzione dell'integrale sulla superficie laterale $\mathcal{L}_V$. Ne risultano quindi le relazioni:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial A} \mathbf{p} \, ds + \int_A \mathbf{f}_v \, dA, \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{m} = \int_{\partial A} (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{p} \, ds + \int_A (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{f}_v \, dA. \quad (1.9b)$$

Si noti che gli integrali sono estesi alla generica sezione retta A oppure al suo contorno ∂A e $\mathbf{P} - \mathcal{O}$ è il vettore posizione del generico punto P , interno alla sezione oppure posto sul suo contorno, rispetto al punto O della linea d'asse. Si noti inoltre che la forza $\mathbf{f}$ e il momento $\mathbf{m}$ distribuiti per unità di linea permettono poi di recuperare la forza $\mathbf{F}(V)$ e il momento $\mathbf{M}(V)$ globali nella forma:

$$\mathbf{F}(V) = \int_{\Delta s} \mathbf{f} \, ds, \quad \mathbf{M}(V) = \int_{\Delta s} (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{m}) \, ds. \quad (1.10)$$

1.3.2 Caratteristiche della sollecitazione

Le *caratteristiche della sollecitazione*¹⁰ rappresentano la risultante $\mathbf{F}$ e il momento risultante $\mathbf{M}$ delle forze interne, cioè delle tensioni $\mathbf{t}$, che agiscono in corrispondenza delle sezioni della trave, con il momento valutato rispetto al punto O della linea d'asse. Con riferimento alla fig. 1.12 si ha quindi:

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{t} \, dA, \quad \mathbf{M} = \int_A (\mathbf{P} - \mathcal{O}) \times \mathbf{t} \, dA. \quad (1.11)$$

Poiché una sezione retta divide il solido trave in due parti, occorre distin-

¹⁰Nella letteratura inglese normalmente non si usano termini specifici per tale concetto, ma piuttosto termini descrittivi tipo *resultant contact force and resultant contact couple*.

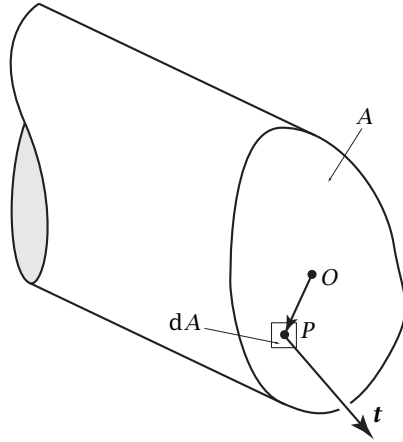


Figura 1.12: Tensioni agenti su una sezione retta

guere tra le due azioni che tali parti si trasmettono reciprocamente e che per il principio di azione e reazione sono uguali ed opposti. Come già per le tensioni interne si ottiene tale distinzione orientando la sezione retta per il tramite del suo versore normale $\mathbf{e}_z$, sottintendendo che la forza $\mathbf{F}$ e la coppia $\mathbf{M}$ che le competono sono quelle che agiscono sulla parte di trave di normale $\mathbf{e}_z$ uscente (fig. 1.13). Ne consegue che sulla parte di trave di

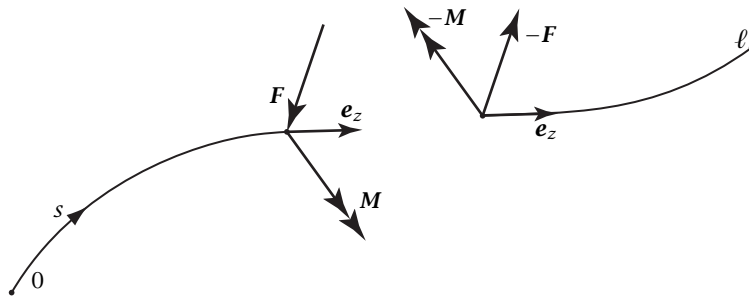


Figura 1.13: Caratteristiche della sollecitazione

normale $\mathbf{e}_z$ entrante agiscono la forza $-\mathbf{F}$ e la coppia $-\mathbf{M}$ opposte delle precedenti.

L'orientazione della linea d'asse orienta le sezioni rette e permette quindi di definire senza ambiguità le caratteristiche della sollecitazione come quelle azioni che agiscono sulla faccia avente la normale uscente, quando questa sia stata orientata dalla orientazione dell'asse.

1.3.3 Componenti locali delle forze e delle caratteristiche della sollecitazione

Le forze e le caratteristiche della sollecitazione, come già gli spostamenti e le rotazioni delle sezioni rette (par. 1.2.3), possono decomporre localmente. Se si approssima la configurazione deformata con quella indeformata, anche in tal caso una componente ha la direzione della linea d'asse indeformata (ortogonale alla sezione retta indeformata) mentre l'altra giace sulla sezione retta indeformata.

Per quel che riguarda le forze esterne, si useranno le lettere p e q per indicare le componenti tangenti e rispettivamente ortogonali alla linea d'asse, minuscole oppure maiuscole se forze distribuite oppure rispettivamente concentrate, per cui risulterà:

$$\mathbf{f} = \mathbf{q} + p\mathbf{e}_z = q_x\mathbf{e}_x + q_y\mathbf{e}_y + p\mathbf{e}_z, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} + P\mathbf{e}_z = Q_x\mathbf{e}_x + Q_y\mathbf{e}_y + P\mathbf{e}_z. \quad (1.13)$$

Non si useranno invece particolari convenzioni per quel che riguarda le coppie esterne, distribuite e concentrate:

$$\mathbf{m} = m_x\mathbf{e}_x + m_y\mathbf{e}_y + m_z\mathbf{e}_z, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{M} = M_x\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y + M_z\mathbf{e}_z. \quad (1.15)$$

Per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione, la componente normale N della forza risultante $\mathbf{F}$ è detta *forza normale*,¹¹ mentre la sua componente $\mathbf{T}$ nel piano della sezione è detta *forza tagliante*, *forza di taglio* o, più semplicemente, *taglio*¹² (fig. 1.14a):

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + N\mathbf{e}_z = T_x\mathbf{e}_x + T_y\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z. \quad (1.16)$$

La componente normale M_t del momento risultante $\mathbf{M}$, equivalente ad una

¹¹Normal force oppure axial force nella letteratura inglese.

¹²Shearing force, shear force oppure shear nella letteratura inglese.

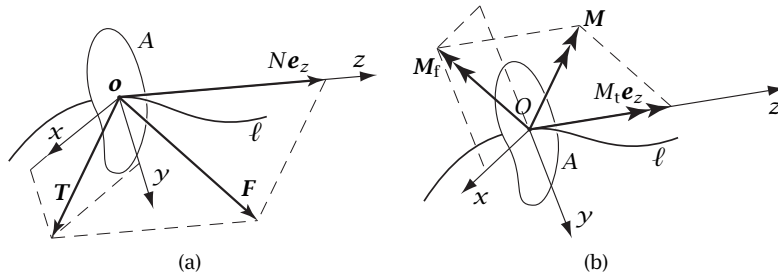


Figura 1.14: Decomposizione locale delle caratteristiche della sollecitazione

coppia agente nel piano della sezione, è invece detta *momento torcente*¹³ e infine la sua componente M_f nel piano della sezione, equivalente ad una coppia agente in un piano ortogonale alla sezione retta, è detta *momento flettente* (fig. 1.14b):¹⁴

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_f + M_t \mathbf{e}_z = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_t \mathbf{e}_z. \quad (1.17)$$

1.3.4 Relazione tra le componenti delle caratteristiche della sollecitazione e le componenti di tensione

Come visto, le caratteristiche della sollecitazione sono la risultante e il momento risultante delle tensioni interne $\mathbf{t}$ che agiscono su una sezione retta. Nel sistema $Oxyz$ locale le componenti di tensione risultano (fig. 1.15):

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}_z + \sigma_z \mathbf{e}_z = \tau_{xz} \mathbf{e}_x + \tau_{yz} \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z, \quad (1.18)$$

dove σ_z è la componente normale di tensione e $\boldsymbol{\tau}_z$ quella tangenziale. Dalle (1.11) si ottiene allora:

$$\mathbf{F} = \left(\int_A \tau_{xz} dA \right) \mathbf{e}_x + \left(\int_A \tau_{yz} dA \right) \mathbf{e}_y + \left(\int_A \sigma_z dA \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.19)$$

e:

$$\mathbf{M} = \int_A \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} dA =$$

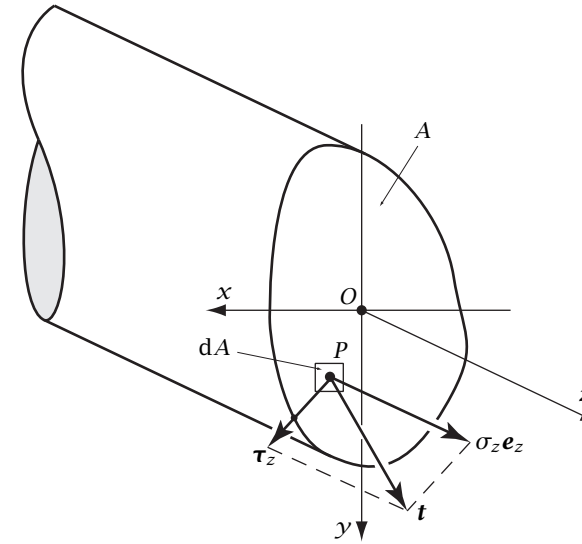


Figura 1.15: Componenti di tensione sulla sezione retta

$$\left(\int_A \sigma_z y dA \right) \mathbf{e}_x - \left(\int_A \sigma_z x dA \right) \mathbf{e}_y + \left(\int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.20)$$

avendo tenuto conto che $P - O = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$, dove x e y sono le coordinate del generico punto P della sezione retta. Ne conseguono immediatamente le componenti locali delle caratteristiche della sollecitazione, componenti che si possono dividere in due gruppi, di cui il primo dipendente dalla tensione normale:

$$N = \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = - \int_A \sigma_z x dA, \quad (1.21)$$

e l'altro da quella tangenziale:

$$M_t = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA, \quad T_x = \int_A \tau_{xz} dA, \quad T_y = \int_A \tau_{yz} dA. \quad (1.22)$$

1.3.5 Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto

La velocità $\mathbf{v}_P$ del generico punto P della sezione retta viene dedotta derivando materialmente lo spostamento $\mathbf{u}_P$ dello stesso punto espresso,

¹³Twisting moment, torsional moment oppure torque nella letteratura inglese.

¹⁴Bending moment oppure flexural moment nella letteratura inglese.

tramite la (1.5), in funzione dei campi di spostamento $\mathbf{u}$ e rotazione $\boldsymbol{\varphi}$ sulla linea d'asse:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}), \quad (1.23)$$

dove $\mathbf{O}$ è il punto sulla linea d'asse. Utilizzando la (1.2), la quantità di moto per unità di linea varrà allora:

$$\int_A \rho_v \mathbf{v}_P dA = \rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{S}, \quad (1.24)$$

dove ρ_v è la massa per unità di volume, ρ è la massa per unità di linea:

$$\rho = \int_A \rho_v dA, \quad (1.25)$$

e $\mathbf{S}$ è il vettore dei momenti statici della distribuzione di massa ρ_v sulla sezione retta A , valutato rispetto al punto $\mathbf{O}$ sulla linea d'asse:

$$\mathbf{S} = \int_A \rho_v (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dA. \quad (1.26)$$

Si noti che la massa ρ per unità di linea e il vettore $\mathbf{S}$ dei momenti statici rappresentano due campi definiti sulla linea d'asse della trave, di cui il primo scalare e il secondo vettoriale. La quantità di moto $\mathbf{P}(\Delta s)$ associata ad un tratto finito Δs di trave varrà quindi:

$$\mathbf{P}(\Delta s) = \int_{\Delta s} (\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{S}) ds. \quad (1.27)$$

Per quel che riguarda poi il momento della quantità di moto per unità di linea, si ottiene in modo analogo:

$$\int_A \rho_v \{ \mathbf{r} + (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \} \times \mathbf{v}_P dA = \mathbf{r} \times (\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{S}) + \mathbf{S} \times \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (1.28)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore posizione del punto $\mathbf{O}$ posto sulla linea d'asse rispetto al punto di calcolo del momento della quantità di moto, $\mathbf{J}$ è il tensore di inerzia della distribuzione di massa ρ_v sulla sezione retta A , valutato rispetto al punto $\mathbf{O}$ sulla linea d'asse:

$$\mathbf{J} = \int_A \rho_v \left\{ (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \right\} dA, \quad (1.29)$$

mentre ρ_v , ρ e $\mathbf{S}$ sono ancora la massa per unità di volume, la massa per unità di linea e il vettore dei momenti statici rispettivamente. Si noti che

il tensore di inerzia $\mathbf{J}$ rappresenta un campo tensoriale definito sulla linea d'asse della trave. Il momento della quantità di moto $\mathbf{L}(\Delta s)$ associata ad un tratto finito Δs di trave varrà quindi:

$$\mathbf{L}(\Delta s) = \int_{\Delta s} \left\{ \mathbf{r} \times (\rho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{S}) + \mathbf{S} \times \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\varphi}} \right\} ds. \quad (1.30)$$

Se i punti della linea d'asse coincidono con i centri di massa o baricentri¹⁵ G delle distribuzioni di massa ρ_v sulle sezioni rette A , definiti dalle:

$$\int_A \rho_v (\mathbf{P} - \mathbf{G}) dA = \mathbf{0}, \quad (1.31)$$

nelle (1.27) e (1.30) i vettori dei momenti statici si annullano e si ottiene quindi:

$$\mathbf{P}(\Delta s) = \int_{\Delta s} \rho \dot{\mathbf{u}} ds, \quad (1.32a)$$

$$\mathbf{L}(\Delta s) = \int_{\Delta s} (\rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\varphi}}) ds. \quad (1.32b)$$

1.3.6 Vincoli e reazioni vincolari

Nello spirito della teoria delle travi, descritte da una cinematica che lascia indeformate le sezioni rette, in luogo delle limitazioni cinematiche imposte ai singoli punti si devono considerare quelle imposte complessivamente alle sezioni rette. Ne consegue che un vincolo di una trave riguarderà un'intera sezione retta e come tale limiterà l'incremento della trasformazione rigida (eventualmente media) di tale sezione. A un tale vincolo corrispondono quindi delle reazioni vincolari che riguardano l'intera sezione vincolata e che ridotte alla linea d'asse generano una reazione risultante e una reazione momento risultante. L'incremento della trasformazione rigida della sezione retta vincolata può essere descritto in termini di incremento dello spostamento del punto posto sulla linea d'asse e di incremento di rotazione attorno ad un asse passante per lo stesso punto. Se questo è il caso, la reazione risultante può avere quale retta d'azione una qualunque delle rette passanti dal punto posto sulla linea d'asse e che sia ortogonale agli incrementi di traslazione ammissibili, mentre la reazione momento risultante può avere quale direzione dell'asse momento una qualunque direzione ortogonale agli assi degli incrementi di rotazione possibili.

¹⁵Nella letteratura inglese baricentro si rende con *centroid*.

1.4 Equazioni di equilibrio

Ci si limita nel seguito a considerare le sole equazioni di equilibrio delle forze, equivalenti alle equazioni di bilancio se non si hanno variazioni della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Si noti che affinché una trave sia equilibrata, le equazioni di equilibrio devono essere soddisfatte per ogni tronco di trave. Si determineranno innanzitutto le *equazioni indefinite di equilibrio*,¹⁶ ottenute localizzando in un punto non soggetto a forze e coppie concentrate l'equilibrio di un qualunque tronco di trave contenente il punto in questione. Si determineranno poi le *equazioni di discontinuità*, valide nei punti di applicazione di forze e coppie concentrate. Si scriveranno infine le *condizioni statiche al contorno* in corrispondenza delle due basi di estremità, equivalenti a imporre delle *equazioni di equilibrio al contorno*.

1.4.1 Equazioni indefinite di equilibrio

Detta s una coordinata curvilinea lunghezza d'arco, sia $O(s)$ un punto della linea d'asse dove non sono applicate forze e coppie concentrate. Siano poi s_1 e s_2 le coordinate di due sezioni tali che l'intervallo $[s_1, s_2]$ contenga il punto O e non contenga punti soggetti a forze e coppie concentrate. Con riferimento la fig. 1.16, l'equilibrio delle forze e dei momenti

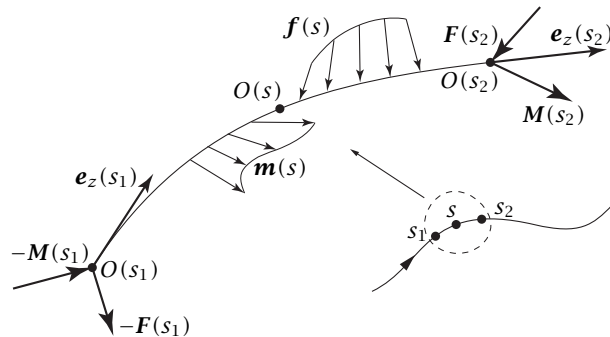


Figura 1.16: Equilibrio indefinito

delle forze agenti sul tronco di trave individuato dall'intervallo $[s_1, s_2]$ si

scrivono:

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{f} \, ds + \mathbf{F}(s_2) - \mathbf{F}(s_1) = \mathbf{0}, \quad (1.33a)$$

$$\int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{m} + \mathbf{r} \times \mathbf{f}) \, ds + \mathbf{M}(s_2) - \mathbf{M}(s_1) + \mathbf{r}(s_2) \times \mathbf{F}(s_2) - \mathbf{r}(s_1) \times \mathbf{F}(s_1) = \mathbf{0}, \quad (1.33b)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore posizione di un generico punto rispetto al polo dei momenti. Si tenga ora conto che per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta:

$$\mathbf{F}(s_2) - \mathbf{F}(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\mathbf{F}}{ds} \, ds, \quad (1.34a)$$

$$\mathbf{M}(s_2) - \mathbf{M}(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\mathbf{M}}{ds} \, ds, \quad (1.34b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_2) \times \mathbf{F}(s_2) - \mathbf{r}(s_1) \times \mathbf{F}(s_1) &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \, ds = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{F}}{ds} \right) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\mathbf{e}_z \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{F}}{ds} \right) ds, \end{aligned} \quad (1.34c)$$

avendo tenuto conto che se s è una coordinata lunghezza d'arco allora $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_z$. Utilizzando le (1.34) nelle (1.33) e tenuto conto che affinché queste siano valide per ogni intervallo $[s_1, s_2]$ contenente il punto O allora le funzioni integrande devono essere nulle nel dato punto, si ottengono infine le seguenti equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (1.35a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (1.35b)$$

Allo scopo di mettere in componenti le due equazioni vettoriali (1.35) nel caso più generale possibile di linea d'asse sghemba, si supponga che gli assi x e y coincidano rispettivamente con la binormale e la normale principale della linea d'asse e si indichino con c e τ rispettivamente la curvatura e la torsione della linea d'asse. Tenuto conto del modo di variare della base locale:

$$\frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \tau \mathbf{e}_y, \quad \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = c \mathbf{e}_z - \tau \mathbf{e}_x, \quad \frac{d\mathbf{e}_z}{ds} = -c \mathbf{e}_y, \quad (1.36)$$

¹⁶Local equilibrium equation oppure local force balance nella letteratura inglese.

e delle definizioni delle componenti delle caratteristiche della sollecitazione:¹⁷

$$\mathbf{F} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y + N \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{M} = M_x \mathbf{e}_x + M_y \mathbf{e}_y + M_t \mathbf{e}_z, \quad (1.37)$$

si ha:

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \left(\frac{dT_x}{ds} - \tau T_y \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{dT_y}{ds} - cN + \tau T_x \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{dN}{ds} + cT_y \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.38a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \left(\frac{dM_x}{ds} - \tau M_y \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{dM_y}{ds} - cM_t + \tau M_x \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{dM_t}{ds} + cM_y \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.38b)$$

Inoltre risulta:

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_z \times (T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y + N \mathbf{e}_z) = T_x \mathbf{e}_y - T_y \mathbf{e}_x. \quad (1.39)$$

Inserendo nelle (1.35) le (1.38) e (1.39) insieme con le definizioni delle componenti delle forze esterne:¹⁸

$$\mathbf{f} = q_x \mathbf{e}_x + q_y \mathbf{e}_y + p, \quad \mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y + m_z \mathbf{e}_z, \quad (1.40)$$

si ottengono infine le sei equazioni scalari indefinite di equilibrio seguenti:

$$\frac{dN}{ds} + cT_y + p = 0, \quad (1.41a)$$

$$\frac{dT_x}{ds} - \tau T_y + q_x = 0, \quad (1.41b)$$

$$\frac{dT_y}{ds} - cN + \tau T_x + q_y = 0, \quad (1.41c)$$

$$\frac{dM_x}{ds} - \tau M_y - T_y + m_x = 0, \quad (1.41d)$$

$$\frac{dM_y}{ds} - cM_t + \tau M_x + T_x + m_y = 0, \quad (1.41e)$$

¹⁷Cfr. la (1.16) p. 19 e la (1.17) p. 20.

¹⁸Cfr. la (1.12) p. 19 e la (1.14) p. 19.

$$\frac{dM_t}{ds} + cM_y + m_z = 0. \quad (1.41f)$$

L'analisi precedente è senz'altro valida se gli spostamenti e le deformazioni sono piccoli, poiché in tal caso l'equilibrio viene scritto nella configurazione indeformata. Nel caso gli spostamenti siano grandi, l'equilibrio deve essere invece scritto nella configurazione deformata e affinché l'analisi precedente sia valida anche in tal caso occorre che la configurazione deformata sia descritta, come quella indeformata, da una linea d'asse e da delle sezioni rette associate ad ogni punto della stessa linea. Tali sezioni rette della configurazione deformata non corrisponderanno però alle sezioni rette della configurazione indeformata poiché queste in generale non saranno ortogonali alla linea d'asse deformata, salvo che non si assuma l'ipotesi di trave inflessa.¹⁹

1.4.2 Equazioni di discontinuità

Si consideri ora un punto O_i della linea d'asse soggetto ad una forza $\mathcal{F}_i$ e ad una coppia $\mathcal{M}_i$ concentrate e si isoli un tronco elementare ds di trave contenente il dato punto (fig. 1.17). Facendo tendere ds al punto O_i ,

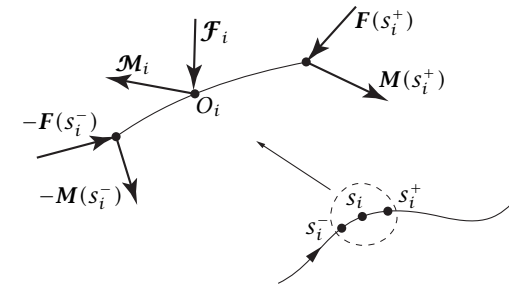


Figura 1.17: Punto di discontinuità

le caratteristiche della sollecitazione applicate nelle sezioni precedente e seguente il punto tendono al loro limite sinistro $F(s_i^-)$ e $M(s_i^-)$ e rispettivamente destro $F(s_i^+)$ e $M(s_i^+)$. Tenendo conto che le forze distribuite sono infinitesime dello stesso ordine di ds , l'equilibrio delle forze che agiscono

¹⁹Cfr. il par. 1.2.1, p. 15.

sul dato tronco al limite per $ds \rightarrow 0_i$ diventa:

$$\mathbf{F}(s_i^+) - \mathbf{F}(s_i^-) + \mathcal{F}_i = \mathbf{0}. \quad (1.42)$$

Sotto l'ipotesi che valga la (1.42) e tenendo conto che i momenti distribuiti sono infinitesimi dello stesso ordine di ds , l'equilibrio dei momenti delle forze che agiscono sul dato tronco al limite per $ds \rightarrow 0_i$ diventa:

$$\mathbf{M}(s_i^+) - \mathbf{M}(s_i^-) + \mathcal{M}_i = \mathbf{0}. \quad (1.43)$$

Scomponendo la forza e la coppia concentrata nelle loro componenti $\mathbf{Q}_i$ e $\mathcal{M}_i^f$ normali alla linea d'asse e P_i e $\mathcal{M}_i^t$ nella direzione della linea d'asse:

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{Q}_i + P_i \mathbf{e}_z, \quad \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i^f + \mathcal{M}_i^t \mathbf{e}_z, \quad (1.44)$$

le (1.42) e (1.43) diventano:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(s_i^+) - \mathbf{T}(s_i^-) + \mathbf{Q}_i = \mathbf{0} \\ N(s_i^+) - N(s_i^-) + P_i = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{M}_f(s_i^+) - \mathbf{M}_f(s_i^-) + \mathcal{M}_i^f = \mathbf{0} \\ M_t(s_i^+) - M_t(s_i^-) + \mathcal{M}_i^t = 0 \end{cases}, \quad (1.45)$$

avendo al solito indicato con $\mathbf{T}$ il taglio, con N la forza normale, con $\mathbf{M}_f$ il momento flettente e infine con M_t il momento torcente.

1.4.3 Condizioni statiche al contorno

Le caratteristiche della sollecitazione corrispondenti alle due sezioni di estremità della trave devono uguagliare le forze effettivamente applicate a tali estremità. Sulla sezione di prima estremità, di normale positiva entrante, agiscono le caratteristiche della sollecitazione cambiate di segno mentre su quella di seconda estremità, di normale positiva uscente, agiscono le caratteristiche della sollecitazione con il loro segno. Ne consegue che deve aversi:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(s_0) = -\mathcal{F}_0 \\ \mathbf{M}(s_0) = -\mathcal{M}_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{F}(s_\ell) = \mathcal{F}_\ell \\ \mathbf{M}(s_\ell) = \mathcal{M}_\ell \end{cases}, \quad (1.46)$$

dove $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_\ell$ sono le forze e $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_\ell$ i momenti agenti rispettivamente nelle sezioni di prima e seconda estremità.

Le relazioni (1.46) sono a volte citate quali *equazioni di equilibrio al contorno*, esprimendo l'equilibrio di due intorni elementari delle due sezioni di estremità. Se per esempio ds è la misura dell'intorno della sezione di prima

estremità su tale intorno agiscono, a meno di termini dell'ordine di ds , le forze esterne $\mathcal{F}_0$ e le coppie esterne $\mathcal{M}_0$ corrispondenti alla sezione di prima estremità s_0 e le caratteristiche della sollecitazione, con il loro segno, corrispondenti alla sezione $s_0 + ds$. L'equilibrio delle forze e dei momenti del dato intorno al limite per $ds \rightarrow 0$ fornisce la prima delle (1.46).

1.5 Polo di calcolo del momento

Si ricorda che le caratteristiche della sollecitazione sono per definizione la risultante $\mathbf{F}$ e il momento risultante $\mathbf{M}$, valutato rispetto al punto O intersezione tra linea d'asse e sezione retta, delle tensioni agenti sulla faccia della sezione retta di normale uscente positiva.²⁰ Nella decomposizione locale individuata dalla normale alla sezione retta (coincidente con la tangente alla linea d'asse) vengono generate da una parte la forza normale N e il Momento flettente $\mathbf{M}_f$, risultante e momento risultante della tensione normale,²¹ e dall'altra parte il taglio $\mathbf{T}$ e il momento torcente M_t , risultante e momento risultante della tensione tangenziale.²² Si noti che le tensioni normali sono un sistema di forze parallele e quindi equivalenti, se $N \neq 0$, ad un'unica forza perpendicolare alla sezione retta. Analogamente, le tensioni tangenziali sono un sistema di forze piane e quindi equivalenti, se $\mathbf{T} \neq 0$, ad un'unica forza giacente sulla sezione retta.

Il momento risultante $\mathbf{M}$ e le sue componenti $\mathbf{M}_f$ e M_t dipendono dalla scelta del punto O , mentre la risultante $\mathbf{F}$ e le sue componenti N e $\mathbf{T}$ ne sono indipendenti.

1.5.1 Cambiamento del polo di calcolo del momento

Detto P un punto posto sul piano della sezione distinto dal punto O posto sulla linea d'asse risulta:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M} + (O - P) \times \mathbf{F}, \quad (1.47)$$

oppure:

$$\mathbf{M}_f^P = \mathbf{M}_f + (O - P) \times (N \mathbf{e}_z), \quad (1.48a)$$

²⁰Cfr. par. 1.3.2 p. 18.

²¹Cfr. la (1.21), p. 20.

²²Cfr. la (1.22), p. 20.

$$M_t^P \mathbf{e}_z = M_t \mathbf{e}_z + (O - P) \times \mathbf{T}, \quad (1.48b)$$

dove si sono indicati con il simbolo P i momenti valutati rispetto al generico polo (fig. 1.18). Scelto un sistema di riferimento Oxy sulla sezione retta

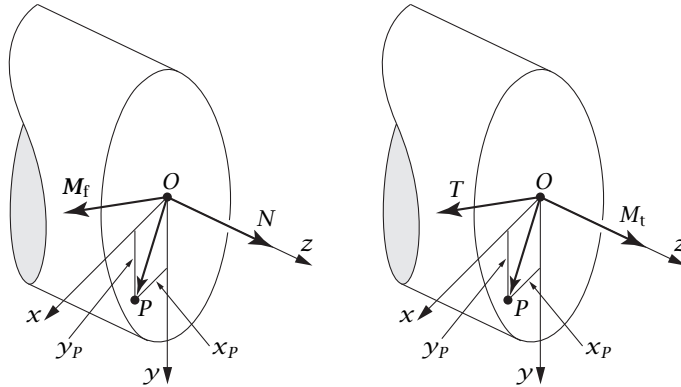


Figura 1.18: Cambiamento del polo statico

della trave si ottengono le componenti delle (1.48) nella forma:

$$M_x^P = M_x - N y_P, \quad (1.49a)$$

$$M_y^P = M_y + N x_P, \quad (1.49b)$$

$$M_t^P = M_t - T_y x_P + T_x y_P. \quad (1.49c)$$

dove x_P e y_P sono le coordinate del punto P nel dato sistema Oxy .

Si noti che, allo stato attuale, la scelta della linea d'asse è, almeno fino a un certo punto, arbitraria e che quindi non esiste nessun motivo particolare per la scelta del punto O quale polo per il calcolo dei momenti. Si noti anche che i sistemi delle tensioni normali e delle tensioni tangenziali che si generano dalla scomposizione delle tensioni agenti sulla sezione retta sono indipendenti l'uno dall'altro e non esiste nessun motivo particolare per la scelta di un unico punto quale polo per il calcolo dei momenti dei due sistemi di forze, se non quello della semplicità. Nel caso più generale possibile i due poli, $\mathcal{G}$ per il calcolo del momento flettente e $\mathcal{C}$ per il calcolo del momento torcente, saranno distinti tra loro ed entrambi distinti dal punto O posto sulla linea d'asse. Se questo è il caso, dalle (1.48) risulta

allora:

$$\mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} = \mathbf{M}_f + (O - \mathcal{G}) \times (N \mathbf{e}_z), \quad (1.50a)$$

$$M_t^{\mathcal{C}} \mathbf{e}_z = M_t \mathbf{e}_z + (O - \mathcal{C}) \times \mathbf{T}, \quad (1.50b)$$

dove $\mathbf{M}_f^{\mathcal{G}}$ è il momento flettente valutato rispetto al polo $\mathcal{G}$ e $M_t^{\mathcal{C}}$ il momento torcente valutato rispetto al polo $\mathcal{C}$.

1.5.2 Vettore algebrico di sollecitazione

Essendo 6 il numero delle componenti scalari delle caratteristiche di sollecitazione, risulta possibile definire un *vettore (algebrico) di sollecitazione* $\mathbf{S}$ di dimensione 6 contenente tali componenti scalari. Le (1.49) definiscono due gruppi di tre componenti di sollecitazione ciascuno, (N, M_x, M_y) e (M_t, T_x, T_y) , tali che le componenti di sollecitazione di ogni gruppo siano legate tra loro e indipendenti da quelle dell'altro gruppo. Per tale motivo si definiranno due sottovetori algebrici di $\mathbf{S}$ di dimensione 3, $\mathbf{S}_f$ e $\mathbf{S}_t$ rispettivamente, e si ordineranno di conseguenza le componenti di deformazione nel vettore algebrico complessivo $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_t \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_t = \begin{bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

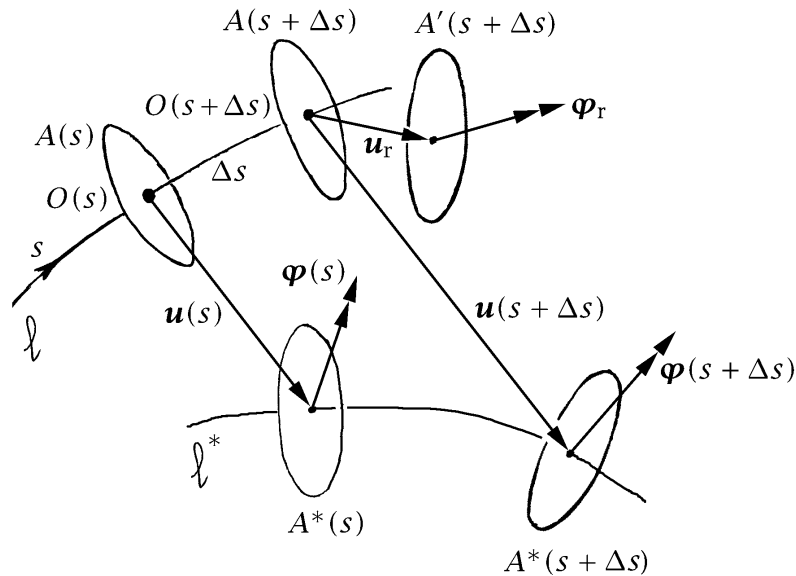
Nel caso più generale possibile M_x e M_y saranno valutati rispetto ad un polo $\mathcal{G}$ e M_t rispetto ad un polo $\mathcal{C}$ distinti tra loro e dal punto O sulla linea d'asse. I poli utilizzati distinti da O saranno espressamente indicati tutte le volte che sarà necessario. In tal caso i momenti flettenti valutati rispetto al polo $\mathcal{G}$ saranno indicati con $M_x^{\mathcal{G}}$ e $M_y^{\mathcal{G}}$, il momento torcente valutato rispetto al polo $\mathcal{C}$ sarà indicato con $M_t^{\mathcal{C}}$ e i due sottovetori algebrici di sollecitazione con $\mathbf{S}_f^{\mathcal{G}}$ e $\mathbf{S}_t^{\mathcal{C}}$:

$$\mathbf{S}_f^{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} N \\ M_x^{\mathcal{G}} \\ M_y^{\mathcal{G}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_t^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} M_t^{\mathcal{C}} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

1.6 Deformazioni nelle travi

1.6.1 Trasformazione rigida relativa per unità di linea

Si consideri, nella configurazione di riferimento ℓ di una generica trave, una sezione retta fissa $A(s)$ e una seconda sezione retta variabile $A(s + \Delta s)$, individuata dall'incremento Δs della coordinata curvilinea s che individua la sezione fissa. La posizione $A^*(s)$ della sezione fissa nella configurazione deformata ℓ^* sarà individuata dallo spostamento $\mathbf{u}(s)$ e dalla rotazione $\boldsymbol{\varphi}(s)$ mentre quella della seconda sezione dallo spostamento $\mathbf{u}(s + \Delta s)$ e dalla rotazione $\boldsymbol{\varphi}(s + \Delta s)$. Se alla configurazione deformata della trave si applica la trasformazione inversa di quella che mappa $A(s)$ in $A^*(s)$, quindi di polo $O(s)$, di traslazione $-\mathbf{u}(s)$ e di rotazione $-\boldsymbol{\varphi}(s)$, la sezione $A^*(s)$ si ritrova nella posizione di partenza $A(s)$ mentre la sezione $A^*(s + \Delta s)$ viene a trovarsi in una posizione $A'(s + \Delta s)$ distinta in generale da quella iniziale $A(s + \Delta s)$, salvo il caso in cui la trave subisca una trasformazione rigida complessiva e quindi non si abbiano deformazioni.



La trasformazione rigida che mappa $A(s + \Delta s)$ in $A'(s + \Delta s)$ è detta *tra-*

sformazione rigida relativa e si presta a descrivere la deformazione associata alla parte Δs di linea d'asse compresa tra le due sezioni rette. I parametri $\mathbf{u}_r(\Delta s)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)$ della trasformazione rigida relativa, di polo $O(s + \Delta s)$, sono detti rispettivamente *spostamento relativo* e *rotazione relativa*.

Rapportando i parametri della trasformazione rigida relativa alla lunghezza Δs della parte di linea si ottengono lo *spostamento relativo per unità di linea* $\mathbf{d}(\Delta s)$ e la *rotazione relativa per unità di linea* $\mathbf{k}(\Delta s)$, detta anche *curvatura (di deformazione)*:

$$\mathbf{d}(\Delta s) = \frac{\mathbf{u}_r(\Delta s)}{\Delta s}, \quad \mathbf{k}(\Delta s) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)}{\Delta s}. \quad (1.53)$$

I rapporti (1.53), dipendenti dalla parte di linea Δs , definiscono una deformazione media nell'intorno della sezione $A(s)$. Lo spostamento relativo per unità di linea e la curvatura in corrispondenza della sezione retta $A(s)$, ancora indicati con i simboli $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ rispettivamente, saranno allora definiti dal limite per $\Delta s \rightarrow 0$ di tali rapporti:

$$\mathbf{d}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_r(\Delta s)}{\Delta s}, \quad \mathbf{k}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s)}{\Delta s}. \quad (1.54)$$

Si vogliono ora determinare le equazioni di congruenza, ovverossia le relazioni che determinano la trasformazione rigida relativa per unità di linea in funzione dei campi degli spostamenti $\mathbf{u}$ e delle rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$. Come specificato, la trasformazione rigida relativa si ottiene dalla differenza tra la trasformazione rigida della sezione variabile $A(s + \Delta s)$ e quella della sezione fissa $A(s)$. Poiché la trasformazione rigida della sezione variabile ha quale polo il punto $O(s + \Delta s)$ della linea d'asse appartenente alla stessa sezione variabile, mentre il polo della trasformazione rigida della sezione fissa coincide con il punto $O(s)$ della linea d'asse appartenente alla stessa sezione fissa, si ottengono i seguenti parametri della trasformazione rigida relativa, di polo $O(s + \Delta s)$:

$$\mathbf{u}_r(\Delta s) = \mathbf{u}(s + \Delta s) - \mathbf{u}(s) - \boldsymbol{\varphi}(s) \times (\mathbf{O}(s + \Delta s) - \mathbf{O}(s)), \quad (1.55a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r(\Delta s) = \boldsymbol{\varphi}(s + \Delta s) - \boldsymbol{\varphi}(s). \quad (1.55b)$$

Sostituendo le (1.55) nelle (1.54) si ottengono infine le equazioni di congruenza:

$$\mathbf{d} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z, \quad (1.56a)$$

$$\mathbf{k} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds}, \quad (1.56b)$$

dove $\mathbf{e}_z$ è il versore tangente alla linea d'asse indeformata nel punto di coordinata s , coincidente con la normale alla sezione retta. Si noti che la (1.56a) vale sotto la condizione che s coincida con la lunghezza d'arco. Si noti anche che le (1.56) valgono esclusivamente sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazione, avendo utilizzato il vettore rotazione in luogo del tensore rotazione.

La trasformazione rigida relativa infinitesima di parametri $ds\mathbf{d}$ e $ds\mathbf{k}$ e di polo $O(s + ds)$ porta la sezione $A(s + ds)$ nella configurazione intermedia $A'(s + ds)$ che a sua volta la trasformazione rigida della sezione $A(s)$ di parametri $\mathbf{u}(s)$ e $\boldsymbol{\varphi}(s)$ e di polo $O(s)$ porta, a meno di infinitesimi di ordine superiore in ds , nella sua posizione finale $A^*(s + ds)$, ovvero nella posizione che la sezione $A(s + ds)$ occupa nella configurazione deformata.

◇ ◇ ◇

Trasformazione rigida relativa in cinematica finita. In cinematica finita le rotazioni delle sezioni rette sono individuate da un tensore rotazione $\mathbf{R}$ funzione del punto. Risulta quindi:

$$\mathbf{u}_r(\Delta s) = \mathbf{u}(s + \Delta s) - \mathbf{u}(s) - (\mathbf{R}(s) - \mathbf{I}) (O(s + \Delta s) - O(s)), \quad (1.57)$$

e ne consegue:

$$\mathbf{d} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - (\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{e}_z. \quad (1.58)$$

La rotazione rigida relativa $\mathbf{R}_r - \mathbf{I}$ vale invece:

$$\mathbf{R}_r - \mathbf{I} = \mathbf{R}^T(s) \left((\mathbf{R}(s + \Delta s) - \mathbf{I}) - (\mathbf{R}(s) - \mathbf{I}) \right) \quad (1.59)$$

e si ottiene:

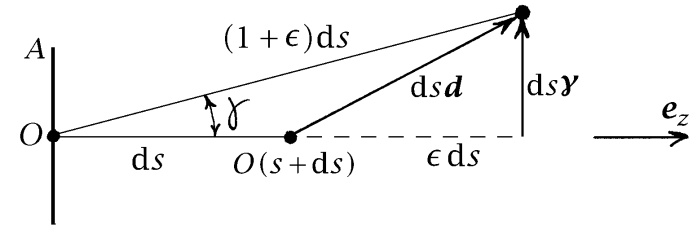
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_r - \mathbf{I}}{\Delta s} = \mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds}. \quad (1.60)$$

Dato che $\mathbf{R}^T \frac{d\mathbf{R}}{ds}$ è emisimmetrico, come si può dimostrare differenziando l'identità $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$, avrà un vettore assiale $\mathbf{k}$ che può essere definito quale vettore curvatura, analogamente a quanto ottenuto in cinematica linearizzata.

◇ ◇ ◇

1.6.2 Componenti di deformazione

Nel seguito ci si riferisce allo schema di figura, che rappresenta, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in ds , la deformazione nell'intorno della sezione A nel piano individuato dalla normale $\mathbf{e}_z$ alla sezione retta e dallo spostamento relativo $\mathbf{d}$. Si noti che l'angolo tra la normale $\mathbf{e}_z$ e



il vettore $ds(\mathbf{e}_z + \mathbf{d})$ individua lo scorrimento massimo γ tra la linea d'asse della trave e la sezione retta. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni risulta:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z = (1 + \epsilon) \cos \gamma - 1 \approx \epsilon. \quad (1.61a)$$

$$|\mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z| = (1 + \epsilon) \sin \gamma \approx \gamma. \quad (1.61b)$$

La componente del vettore $\mathbf{d}$ sulla direzione normale alla sezione retta nella configurazione indeformata coincide quindi con la *dilatazione della linea d'asse*, indicata nel seguito con il simbolo ϵ , mentre la sua proiezione nel piano della sezione retta coincide con lo *scorrimento tra linea d'asse e sezione retta*, indicato nel seguito con il simbolo γ . Dalla (1.56a) si ottiene quindi:

$$\epsilon = \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.62a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{d} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z = \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \epsilon \mathbf{e}_z \right) - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z. \quad (1.62b)$$

In funzione della dilatazione ϵ e dello scorrimento $\boldsymbol{\gamma}$ lo spostamento relativo $\mathbf{d}$ risulta quindi:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\gamma} + \epsilon \mathbf{e}_z, \quad (1.63)$$

e ne consegue:

$$\epsilon \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\gamma} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z. \quad (1.64)$$

Il vettore $\boldsymbol{\gamma}$ giace nel piano della sezione e lo si può quindi scomporre in due componenti:

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_x \mathbf{e}_x + \gamma_y \mathbf{e}_y, \quad (1.65)$$

dove γ_x e γ_y sono gli scorrimenti tra la linea d'asse e gli assi coordinati x e y giacenti sulla sezione retta. Inoltre:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \vartheta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varphi_y \mathbf{e}_x - \varphi_x \mathbf{e}_y. \quad (1.66)$$

Quindi si ottiene:

$$\gamma_x = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_x - \varphi_y, \quad (1.67a)$$

$$\gamma_y = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_y + \varphi_x. \quad (1.67b)$$

La curvatura globale $\mathbf{k}$ si scompone in una quota flettente $\mathbf{k}_f$, detta *curvatura flessionale* e giacente sulla sezione retta, ed in una quota torcente Θ , detta *angolo unitario di torsione* e perpendicolare alla sezione retta:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_f + \Theta \mathbf{e}_z. \quad (1.68)$$

La curvatura flessionale $\mathbf{k}_f$ può poi scomporsi nelle componenti rispetto agli assi x e y posti nel piano della sezione:

$$\mathbf{k}_f = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y. \quad (1.69)$$

1.6.3 Integrazione delle equazioni di congruenza

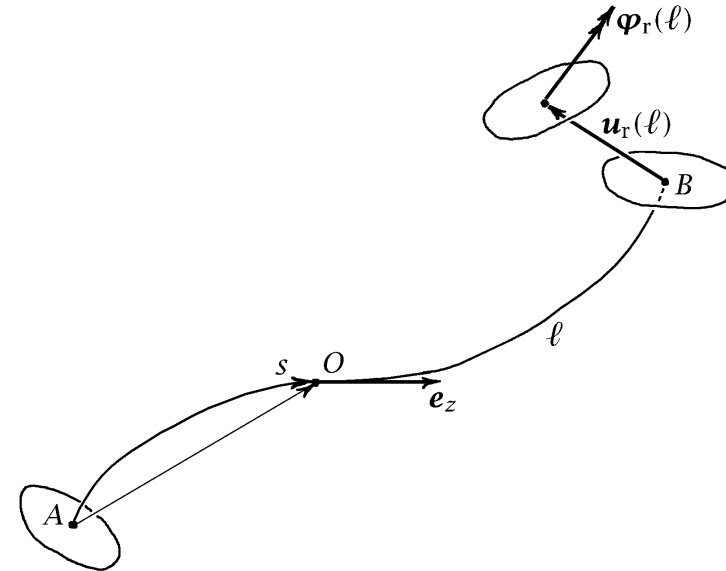
Nel par. 1.6.1 si sono dedotte le deformazioni, ossia i parametri $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ della trasformazione rigida relativa per unità di linea, dalla conoscenza delle trasformazioni rigide relative delle sezioni rette, ovvero dei loro spostamenti $\mathbf{u}$ e rotazioni $\boldsymbol{\varphi}$. Si vuole ora fare l'operazione inversa, ovvero dedurre gli spostamenti e le rotazioni delle sezioni rette supponendo note le deformazioni. A tale scopo, le equazioni di congruenza:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} = \mathbf{k}, \quad (1.70a)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \mathbf{d}, \quad (1.70b)$$

si possono interpretare come equazioni differenziali nelle funzioni incognite $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\varphi}$.

Si consideri allora un generica trave, o parte di trave, di linea d'asse ℓ compresa tra i due punti A , di prima estremità, e B , di seconda estremità, di coordinate curvilinee s_A e s_B rispettivamente. Integrando la (1.70a) lungo



la linea d'asse si ottiene:

$$\boldsymbol{\varphi}_B - \boldsymbol{\varphi}_A = \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} ds, \quad (1.71)$$

dove $\boldsymbol{\varphi}_A = \boldsymbol{\varphi}(s_A)$ e $\boldsymbol{\varphi}_B = \boldsymbol{\varphi}(s_B)$. Per integrare la (1.70b), si tenga conto innanzitutto che $\mathbf{e}_z = d\mathbf{O}/ds$, dove O è il generico punto della linea d'asse. Si tenga quindi conto che risulta:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \frac{d}{ds} (\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{O} - B)) - \mathbf{k} \times (\mathbf{O} - B), \quad (1.72)$$

avendo utilizzato il polo B per rendere più agevoli gli sviluppi seguenti. Integrando per parti si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \int_{s_A}^{s_B} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z ds &= \left[\boldsymbol{\varphi} \times (O - B) \right]_{s_A}^{s_B} - \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (O - B) ds \\ &= \boldsymbol{\varphi}_A \times (B - A) - \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (O - B) ds, \end{aligned} \quad (1.73)$$

avendo tenuto conto che $O(s_A) = A$ e $O(s_B) = B$. Integrando la (1.70b) si ottiene infine:

$$\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \boldsymbol{\varphi}_A \times (B - A) = \int_{s_A}^{s_B} d\mathbf{d} + \int_{s_A}^{s_B} \mathbf{k} \times (B - O) ds, \quad (1.74)$$

dove $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}(s_A)$ e $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}(s_B)$. Si noti che al primo membro delle (1.71) e (1.74) compaiono i parametri $\mathbf{u}_r(\ell)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\ell)$ della trasformazione rigida relativa associata alla trave di linea d'asse ℓ , ovvero sia la trasformazione rigida della sezione di seconda estremità a meno della trasformazione rigida della sezione di prima estremità:

$$\mathbf{u}_r(\ell) = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A - \boldsymbol{\varphi}_A \times (B - A), \quad (1.75a)$$

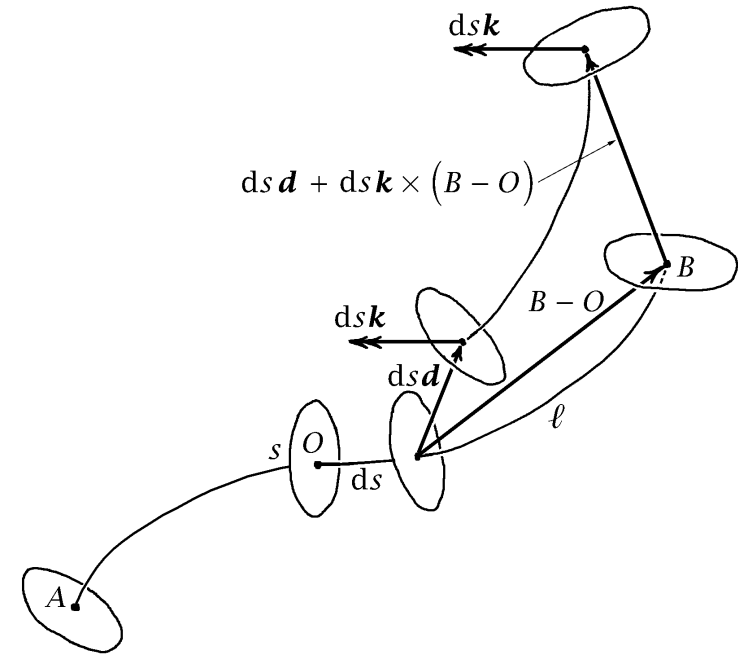
$$\boldsymbol{\varphi}_r(\ell) = \boldsymbol{\varphi}_B - \boldsymbol{\varphi}_A. \quad (1.75b)$$

Si noti che se la sezione iniziale in A ha rotazioni e spostamenti nulli i parametri $\mathbf{u}_r(\ell)$ e $\boldsymbol{\varphi}_r(\ell)$ della trasformazione rigida relativa forniscono rispettivamente lo spostamento $\mathbf{u}_B$ e la rotazione $\boldsymbol{\varphi}_B$ della sezione finale in B .

Si noti inoltre che le (1.71) e (1.74) hanno una semplicissima interpretazione fisica. Infatti per calcolare la trasformazione rigida relativa si tenga fissa la prima estremità della trave e si sommino al limite, cioè si integrino sulla linea d'asse, i contributi allo spostamento e alla rotazione della seconda estremità dei singoli elementi di trave ds che compongono il tratto finito di trave ℓ . Poiché per l'ipotesi di piccoli spostamenti il contributo di un elemento è indipendente dal fatto che gli altri elementi siano già deformati oppure no e poiché la deformazione del generico elemento di trave ds genera una trasformazione rigida relativa, della seconda estremità dell'elemento di trave e quindi di tutto il tratto di trave che segue l'elemento di trave, di parametri $ds\mathbf{d}$ e $ds\mathbf{k}$, ne conseguono immediatamente le (1.71) e (1.74).

1.6.4 Travi inflesse

L'ipotesi di trave inflessa richiede alle sezioni rette *di conservarsi ortogonali alla linea d'asse*. Questa ipotesi equivale a *trascurare gli scorrimenti tra*



linea d'asse e sezioni rette.²³ Ricordando l'espressione dello scorrimento, il vincolo di trave inflessa si scrive:

$$\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \epsilon \mathbf{e}_z, \quad (1.76)$$

²³ Si noti che senza l'ipotesi di trave inflessa le sezioni inizialmente "rette" sono ortogonali alla linea d'asse in generale solo nella configurazione indeformata, la cui descrizione risulta dunque particolare e non conforme alla configurazione deformata generica. Questo fatto non crea problemi nell'ambito di una teoria del primo ordine che permette di confondere la configurazione deformata con quella indeformata, dove le sezioni "rette" sono ortogonali alla linea d'asse. Ma già nell'ambito di una teoria del secondo ordine, quindi ancora basata sull'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, l'equilibrio viene scritto nella configurazione deformata dove in generale la normale ad una sezione "retta" deformata non è tangente alla linea d'asse. Dato che le definizioni delle componenti delle caratteristiche della sollecitazione sono relative alle sezioni "rette", è evidente che per conformità anche nella configurazione deformata dovranno essere valutate con riferimento alle sezioni "rette" di tale configurazione, quindi ortogonali alla tangente alla linea d'asse deformata e quindi distinte dalle sezioni "rette" originali.

e rappresenta un legame tra campo delle rotazioni e campo degli spostamenti. D'altronde se le sezioni restano ortogonali alla linea d'asse allora il campo degli spostamenti determina i piani delle sezioni nella configurazione deformata, in quanto determina la linea deformata a cui tali piani sono ortogonali. Ovverossia viene determinata in modo univoco la rotazione flessionale, restando indeterminata la sola rotazione torsionale della sezione. In componenti la (1.76) fornisce infatti:

$$\varphi_y = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_x, \quad \varphi_x = -\frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_y. \quad (1.77)$$

Lo scorrimento $\mathbf{y}$ tra linea d'asse e sezioni rette, insieme alla dilatazione della linea d'asse ϵ , compone lo spostamento relativo $\mathbf{d}$ per unità di linea. Questi, in base all'analisi del paragrafo precedente, provoca in generale degli spostamenti relativi tra le due sezioni di estremità di una trave trascurabili rispetto a quelli provocati dalla rotazione relativa $\mathbf{k}$ per unità di linea. Infatti la quota degli spostamenti provocati dalla rotazione relativa che si sviluppa in un elemento di trave sono proporzionali alla distanza dell'elemento dalla sezione di seconda estremità, a differenza di quelli dovuti alla sola traslazione relativa. Più la trave è snella maggiori sono gli effetti amplificanti delle distanze in gioco sugli spostamenti dovuti alle rotazioni relative. Si tenga comunque conto che tale analisi è qualitativa e che l'effettiva trascurabilità dello spostamento relativo per unità di linea nel calcolo degli spostamenti di una trave o di un sistema di travi dipenderà da varie circostanze che andranno valutate di volta in volta e che in ogni caso dipenderà dal rapporto tra curvatura di deformazione e spostamento relativo per unità di linea.

Tutte le volte che sarà lecito trascurare tutto lo spostamento relativo $\mathbf{d}$ per unità di linea, alle condizioni (1.77) si dovrà aggiungere quella che corrisponde all'annullarsi della dilatazione della linea d'asse ϵ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \mathbf{e}_z = 0. \quad (1.78)$$

Si consideri ora che intuitivamente la rotazione relativa per unità di linea è associata all'azione dei momenti flettenti e torcente mentre lo scorrimento tra linea d'asse e sezioni rette a quella del taglio. Le prime due equazioni scalari di equilibrio alla rotazione mostrano inanzitutto che il taglio è nullo se è nullo il momento totale salvo il caso particolare in cui agiscano delle coppie flettenti esterne distribuite lungo la linea d'asse. Escluso tale caso particolare, ne consegue che gli scorrimenti tra linea d'asse e sezioni

rette sono sempre accompagnati da rotazioni relative per unità di linea e gli effetti di queste ultime sono in generale predominanti su quelle degli scorrimenti. In secondo luogo le prime due equazioni scalari di equilibrio alla rotazione permettono di determinare il taglio dalla conoscenza dei momenti flettenti e del momento torcente, ovverossia il problema del taglio è *staticamente determinato dai momenti flettenti e dal momento torcente*. È quindi escluso che l'ipotesi di trave inflessa, che corrisponde ad un vincolo di rigidità interna, renda indeterminato il problema del taglio.

Si noti che un tale risultato non vale per la dilatazione della linea d'asse, associata intuitivamente all'azione della forza normale. Infatti la forza normale non compare nelle equazioni scalari di equilibrio alla rotazione ed è quindi indipendente dalla presenza di momenti o meno. Potrebbe comunque essere determinato dai tagli grazie alla seconda equazione scalare di equilibrio alla traslazione, salvo che la curvatura geometrica della linea d'asse non sia nulla. L'effetto della dilatazione della linea d'asse sarà spesso trascurabile, ma potrebbero esserci delle situazioni che riguardano le travi ad asse rettilineo in cui il trascurare i suoi effetti potrebbe rendere indeterminato il problema della forza normale.

1.7 Polo della trasformazione rigida relativa

Nella descrizione della trasformazione rigida relativa interviene quale polo il punto O della sezione retta posto sulla linea d'asse. Lo spostamento relativo per unità di linea $\mathbf{d}$ e le sue componenti ϵ e $\mathbf{y}$ dipendono dalla scelta del punto O , mentre la curvatura $\mathbf{k}$ e le sue componenti $\mathbf{k}_f$ e Θ ne sono indipendenti. Si ricordi che, come già detto, allo stato attuale delle cose la scelta della linea d'asse è, almeno in parte, arbitraria e ne consegue che la scelta del punto O quale polo per il calcolo dello spostamento relativo $\mathbf{d}$ non è obbligata. Si potrebbero anzi presentare delle circostanze particolari che potrebbero suggerire la scelta di un polo avente un significato fisico ben preciso.

1.7.1 Cambiamento del polo della trasformazione rigida relativa

Per non perdere in generalità ci si riferisca allora ad un polo P , distinto dal punto O posto sulla linea d'asse, e alla fibra longitudinale passante per

tale nuovo polo, ovverossia l'elemento di linea per P ortogonale alla sezione retta e avente quindi la direzione della linea d'asse. Lo spostamento relativo per unità di linea d'asse $\mathbf{d}_P$, di polo P , valutato per il tramite dei parametri della trasformazione rigida relativa di polo O , risulta:

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d} + \mathbf{k} \times (P - O). \quad (1.79)$$

La dilatazione ϵ_P e lo scorrimento $\mathbf{y}_P$, per unità di linea d'asse, della fibra longitudinale passante per il nuovo polo P della sezione retta soddisfano allora la relazione:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z + \mathbf{y}_P = (\epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{y}) + \mathbf{k} \times (P - O), \quad (1.80)$$

dalla quale si ottengono infine i valori di ϵ_P e $\mathbf{y}_P$, per unità di linea d'asse:

$$\epsilon_P \mathbf{e}_z = \epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (P - O), \quad (1.81a)$$

$$\mathbf{y}_P = \mathbf{y} + \Theta \mathbf{e}_z \times (P - O). \quad (1.81b)$$

Scelto infine un sistema di riferimento Oxy sulla sezione retta della trave le (1.89) diventano:

$$\epsilon_P = \epsilon + k_x y_P - k_y x_P, \quad (1.82a)$$

$$y_{Px} = y_x - \Theta y_P, \quad (1.82b)$$

$$y_{Py} = y_y + \Theta x_P, \quad (1.82c)$$

dove x_P e y_P sono le coordinate del punto P nel dato sistema Oxy .

Le equazioni (1.81) e (1.82) mostrano che la dilatazione ϵ_P della fibra longitudinale, per unità di linea d'asse, dipende dalla dilatazione della linea d'asse e dalla curvatura flessionale così come lo scorrimento $\mathbf{y}_P$ della fibra longitudinale, per unità di linea d'asse, dipende dallo scorrimento della linea d'asse e dall'angolo unitario di torsione. Ne consegue che dilatazione e scorrimento sono indipendenti tra loro cosicché nulla obbliga a scegliere lo stesso polo, e quindi la stessa fibra longitudinale, al fine della definizione di tali deformazioni. Come già nello studio della sollecitazione, per non perdere generalità, quando e se sarà necessario, ci si riferirà a due poli distinti, $\mathcal{G}$ per il calcolo della dilatazione e $\mathcal{C}$ per il calcolo dello scorrimento, distinti a loro volta in generale dal punto O sulla linea d'asse. Se questo è il caso risulta allora:

$$\epsilon^{\mathcal{G}} \mathbf{e}_z = \epsilon \mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (\mathcal{G} - O), \quad (1.83a)$$

$$\mathbf{y}^{\mathcal{C}} = \mathbf{y} + \Theta \mathbf{e}_z \times (\mathcal{C} - O), \quad (1.83b)$$

dove $\epsilon^{\mathcal{G}}$ è la dilatazione, per unità di linea d'asse, della fibra longitudinale per il polo $\mathcal{G}$ mentre $\mathbf{y}^{\mathcal{C}}$ è lo scorrimento, per unità di linea d'asse, tra la fibra longitudinale per il polo $\mathcal{C}$ e la sezione retta.

Si noti che la traslazione relativa $\epsilon \mathbf{e}_z$ dovuta alla sola dilatazione ϵ della fibra longitudinale, ortogonale alla sezione retta, e la rotazione relativa dovuta alla sola curvatura di flessione $\mathbf{k}_f$, di asse giacente sulla sezione retta e passante per il polo $\mathcal{G}$, si combinano, se $\mathbf{k}_f \neq \mathbf{0}$, in una rotazione relativa $\mathbf{k}_f$ di asse parallelo al precedente e ancora appartenente alla sezione retta. Analogamente la traslazione relativa dovuta al solo scorrimento $\mathbf{y}$ della fibra longitudinale con la sezione retta, giacente nel piano della sezione retta, e la rotazione relativa $\Theta \mathbf{e}_z$ dovuta al solo angolo unitario di torsione Θ , di asse ortogonale alla sezione retta e passante per il polo $\mathcal{C}$, definiscono una trasformazione rigida relativa nel piano della sezione e si combinano, se $\Theta \neq 0$, in una rotazione relativa $\Theta \mathbf{e}_z$ di asse parallelo al precedente.

1.7.2 Vettore algebrico di deformazione

Essendo 6 il numero delle componenti scalari delle caratteristiche della deformazione, risulta possibile rappresentare la deformazione nelle travi tramite un *vettore (algebrico) di deformazione* $\mathbf{D}$ di dimensione 6. Ma si noti che le (1.82) definiscono due gruppi di tre componenti di deformazione ciascuno, (ϵ, k_x, k_y) e (Θ, y_x, y_y) , tali che le componenti di deformazioni di ogni gruppo siano legate tra loro e indipendenti da quelle dell'altro gruppo. È quindi possibile definire due sottovetori algebrici di $\mathbf{D}$ di dimensione 3, $\mathbf{D}_f$ e $\mathbf{D}_t$ rispettivamente, e ordinare di conseguenza le componenti di deformazione nel vettore algebrico complessivo $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \\ \Theta \\ y_x \\ y_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \Theta \\ y_x \\ y_y \end{bmatrix}. \quad (1.84)$$

Nel caso più generale possibile ϵ sarà valutato rispetto ad un polo $\mathcal{G}$ e y_x e y_y rispetto ad un polo $\mathcal{C}$ distinti tra loro e dal punto O sulla linea d'asse.

I poli utilizzati distinti da O saranno espressamente indicati tutte le volte che sarà necessario. In tal caso la dilatazione, per unità di linea d'asse, della fibra longitudinale per il polo $\mathcal{G}$ sarà indicata con $\epsilon_{\mathcal{G}}$, le componenti dello scorrimento, per unità di linea d'asse, tra la fibra longitudinale per il polo $\mathcal{G}$ e la sezione retta saranno indicati con $\gamma_x^{\mathcal{G}}$ e $\gamma_y^{\mathcal{G}}$ e i due sottovettori algebrici di deformazione con $\mathbf{D}_f^{\mathcal{G}}$ e $\mathbf{D}_t^{\mathcal{G}}$:

$$\mathbf{D}_f^{\mathcal{G}} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{\mathcal{G}} \\ k_x \\ k_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}_t^{\mathcal{G}} = \begin{Bmatrix} \Theta \\ \gamma_x^{\mathcal{G}} \\ \gamma_y^{\mathcal{G}} \end{Bmatrix}. \quad (1.85)$$

1.7.3 Deformazione locale

Si consideri ora l'*elemento di linea longitudinale* in corrispondenza di un generico punto P di una data sezione retta, ovvero l'elemento di linea ortogonale alla sezione retta nel dato punto. La deformazione discussa nel seguito è *locale*, ovvero riguarda l'intorno di una data sezione, e non implica quindi l'assunzione di una linea longitudinale passante per P e ortogonale ad ogni sezione retta, analogamente alla linea d'asse. Se l'asse y coincide con la normale principale alla linea d'asse, ad un elemento ds di linea d'asse corrisponde un elemento ds' di linea longitudinale per P tale che:

$$ds' = \frac{a + y_P}{a} ds = (1 + c y_P) ds, \quad (1.86)$$

dove a è il raggio di curvatura e c la curvatura della linea d'asse. Se con ϵ'_P e γ'_P si indicano le deformazioni locali nel punto P , ovvero dilatazione e, rispettivamente, scorrimento nel punto P , per unità di linea per P , si ha:

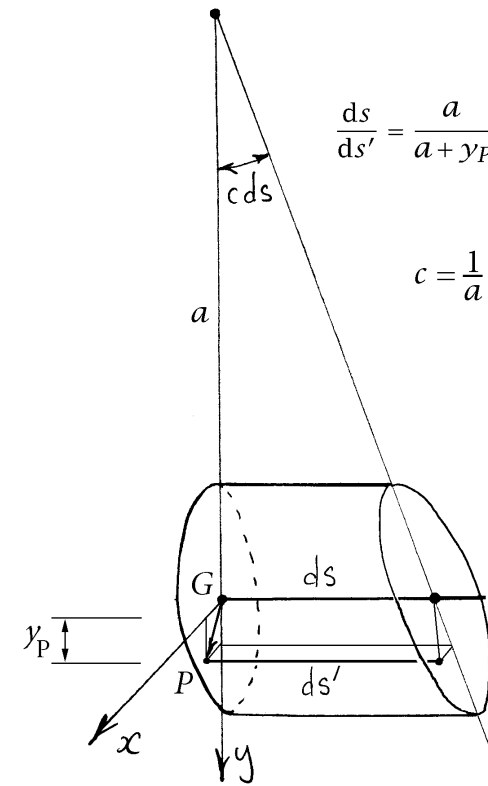
$$\epsilon'_P ds' = \epsilon_P ds, \quad \gamma'_P ds' = \gamma_P ds, \quad (1.87)$$

Dalla (1.86) e dalle (1.87) si ottiene allora la deformazione locale nella forma:

$$\epsilon'_P = \frac{1}{1 + c y_P} \epsilon_P, \quad \gamma'_P = \frac{1}{1 + c y_P} \gamma_P. \quad (1.88)$$

Se la trave è snella, che poi è quello che una trave deve normalmente essere per essere una trave, cioè se $c y_P \ll 1$, si ha $1 + c y_P \approx 1$ e risulta:

$$\epsilon'_P \approx \epsilon_P, \quad \gamma'_P \approx \gamma_P. \quad (1.89)$$



Le (1.89) valgono in modo esatto, a parte naturalmente l'approssimazione dei piccoli spostamenti e delle piccole deformazioni, nel caso di trave ad asse rettilineo.

◇ ◇ ◇

Linea longitudinale definita da un generico punto. L'insieme dei punti P , uno per ogni sezione, di coordinate (x_P, y_P) indipendenti dalla coordinata s della linea d'asse definiscono una linea longitudinale che in generale non è ortogonale alle sezioni rette della trave e che quindi non si presta a descrivere la trave quale linea d'asse conservando le "sezioni rette".

Ciò non toglie che possa essere utilizzata quale alternativa linea d'asse, ma a tale scopo occorre associarle delle "sezioni rette" alternative, che globalmente

genereranno un solido monodimensionale diverso da quello generato dalle precedenti “sezioni rette”, ma entrambi approssimanti se non coincidenti con il solido monodimensionale oggetto di studio. Comunque le due descrizioni cinematiche genereranno due campi di spostamento la cui differenza, in generale, non sarà nulla, anche se lo sarà almeno approssimativamente.

Dimostrazione. La linea longitudinale dei punti P è definita dall'equazione:

$$P(s) = O + x_P \mathbf{e}_x + y_P \mathbf{e}_y. \quad (1.90)$$

Se $\mathbf{e}'_t$ indica il versore tangente alla linea longitudinale dei punti P , risulta:

$$\mathbf{e}'_t = \frac{dP}{ds'} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{ds'} = \frac{ds}{ds'} \left\{ (1 + c y_P) \mathbf{e}_t + \tau (x_P \mathbf{e}_y - y_P \mathbf{e}_x) \right\}, \quad (1.91)$$

dove c e τ sono rispettivamente la curvatura e la torsione della linea d'asse baricentrica. Poiché $\mathbf{e}'_t$ è un versore, deve risultare:

$$\left(\frac{ds}{ds'} \right)^2 \left\{ (1 + c y_P)^2 + \tau^2 (x_P^2 + y_P^2) \right\} = 1, \quad (1.92)$$

e quindi:

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{(1 + c y_P)^2 + \tau^2 r^2}}, \quad (1.93)$$

dove:

$$r = |P - O| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}. \quad (1.94)$$

Si ha allora:

$$\mathbf{e}'_t = \frac{1 + c y_P}{\sqrt{(1 + c y_P)^2 + \tau^2 r^2}} \mathbf{e}_t + \frac{x_P \mathbf{e}_y - y_P \mathbf{e}_x}{\sqrt{(1 + c y_P)^2 + \tau^2 r^2}} \tau, \quad (1.95)$$

e, se $\tau \neq 0$, risulta $\mathbf{e}'_t \neq \mathbf{e}_t$. ■

Si noti che nel caso di trave piana risulta $\tau = 0$ e quindi per la (1.95) il versore $\mathbf{e}'_t$, tangente alla fibra longitudinale per P , coincide con il versore $\mathbf{e}_t$ tangente alla linea d'asse baricentrica. In tal caso le due descrizioni coincidono. Si noti anche che se $\tau \neq 0$ la (1.93) e la (1.86) differiscono come deve essere, in quanto la prima riguarda una fibra non ortogonale mentre la seconda una fibra ortogonale.

◇ ◇ ◇

1.8 Travi piane

Limitandosi al caso di una cinematica della sezione retta descritta da un moto rigido (ipotesi di sezione indeformata), una trave è detta *cinematicamente piana* se esiste un piano tale che (fig. 1.19):

1. L'asse indeformato e l'asse deformato della trave appartengono a tale piano;
2. Le rotazioni delle sezioni rette avvengono attorno ad assi perpendicolari a tale piano.

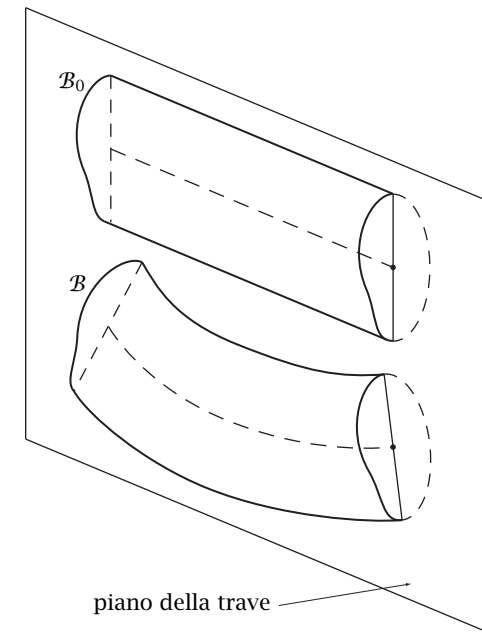


Figura 1.19: Trave cinematicamente piana

Si noti che in tal modo gli spostamenti dei punti della trave avvengono parallelamente al piano della trave. Si noti poi che la definizione fa riferimento alla configurazione indeformata, configurazione che nel caso piano non può quindi essere completamente arbitraria. Si noti infine che se

L'asse indeformato della trave è rettilineo il piano della trave può essere uno qualunque dei piani di sostegno l'asse, mentre nel caso di asse curvo indeformato l'unica possibilità è quella del piano che contiene l'asse.

Una trave è invece detta *staticamente piana* se esiste un piano tale che:

1. L'asse deformato della trave appartiene a tale piano;
2. Le forze, interne ed esterne, ridotte ai punti della linea d'asse generano risultanti appartenenti al piano della trave e momenti risultanti ortogonali a tale piano.

Con l'avvertenza che un momento ortogonale a un piano è equivalente ad una coppia di forze appartenenti allo stesso piano, si può anche affermare che tutte le forze ridotte ai punti della linea d'asse appartengono al piano della trave. Si noti poi che, a differenza del caso cinematicamente piano, la definizione fa riferimento alla sola configurazione deformata e che quindi non dipende dalla configurazione di riferimento. Tuttavia, si ricordi che nell'ambito di una teoria del primo ordine ai fini dell'equilibrio la configurazione deformata si fa coincidere con quella indeformata. In tal caso al piano della trave è richiesto di contenere l'asse indeformato, e la configurazione deformata risulta ininfluente ai fini statici.

Si dice infine che una trave è *piana* se è contemporaneamente piana sia dal punto di vista cinematico che da quello statico. Nel caso di una trave ad asse indeformato curvilineo i piani cinematico e statico devono coincidere con il piano dell'asse e quindi coincidono tra loro. Nell'ambito di una teoria del primo ordine e se l'asse indeformato della trave è rettilineo può invece presentarsi il caso di trave piana con piani cinematico e statico non coincidenti. Una condizione sufficiente ad assicurare che una trave sia piana, con piani cinematico e statico coincidenti anche se la linea d'asse indeformata è rettilinea, è che le forze applicate e le sezioni rette siano simmetriche rispetto al piano dell'asse indeformato, oppure ad un piano contenente l'asse indeformato se questi è rettilineo. Si noti che la simmetria delle sezioni rette deve riguardare anche il materiale di cui la trave è composta.

1.8.1 Statica della trave piana

Se la trave è staticamente piana le forze interne ed esterne, ridotte ai punti della linea d'asse, appartengono al piano dell'asse oppure appartengono tutte ad un piano nel caso l'asse della trave sia rettilineo. Le coppie

interne ed esterne generate dalla riduzione ai punti della linea d'asse devono invece avere asse ortogonale al piano della trave, per poter essere rappresentate da due forze uguali ed opposte appartenenti al piano della trave. L'asse momento appartiene di conseguenza al piano della sezione retta e quindi nel caso piano i momenti torcenti sono nulli. Da quanto detto le forze esterne $\mathbf{f}$ e le coppie esterne $\mathbf{m}$ distribuite, le forze esterne $\mathbf{F}_i$ e le coppie esterne $\mathbf{M}_i$ concentrate in un numero discreto di punti O_i , le forze esterne $\mathbf{F}_0$ e $\mathbf{F}_\ell$ e le coppie esterne $\mathbf{M}_0$ e $\mathbf{M}_\ell$ applicate nelle sezioni di estremità risultano, supponendo l'asse x ortogonale al piano della trave (fig. 1.20):

$$\begin{cases} \mathbf{f} = q\mathbf{e}_y + p\mathbf{e}_z \\ \mathbf{m} = m\mathbf{e}_x \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{F}_i = Q_i\mathbf{e}_y + P_i\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_i = M_i\mathbf{e}_x \end{cases}, \quad (1.96a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0 = Q_0\mathbf{e}_y + P_0\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{e}_x \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{F}_\ell = Q_\ell\mathbf{e}_y + P_\ell\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}_\ell = M_\ell\mathbf{e}_x \end{cases}. \quad (1.96b)$$

Analogamente per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione

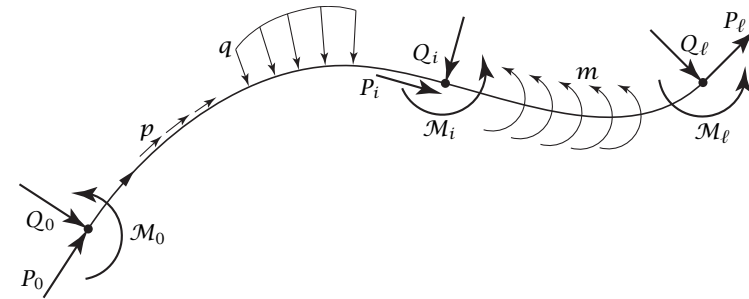


Figura 1.20: Forze esterne (trave piana)

$\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ si ha (fig. 1.21):

$$\begin{cases} \mathbf{F} = T\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z \\ \mathbf{M} = M\mathbf{e}_x \end{cases}. \quad (1.97)$$

Tenuto anche conto che se l'asse della trave è piano la sua torsione geometrica τ è nulla, delle sei equazioni indefinite di equilibrio scalari (1.41) tre sono identicamente nulle. Le tre equazioni indefinite di equilibrio

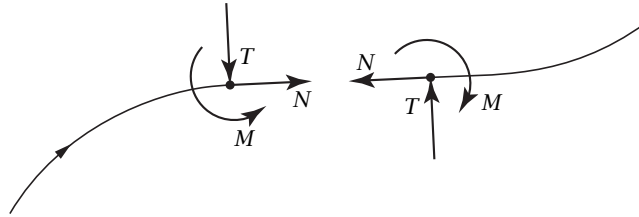


Figura 1.21: Caratteristiche della sollecitazione (trave piana)

rimanenti diventano:

$$\frac{dN}{ds} + cT + p = 0, \quad (1.98a)$$

$$\frac{dT}{ds} - cN + q = 0, \quad (1.98b)$$

$$\frac{dM}{ds} - T + m = 0. \quad (1.98c)$$

In generale l'asse deformato della trave è curvo anche se l'asse indeformato è rettilineo. Dato che le equazioni indefinite di equilibrio si devono scrivere nella configurazione deformata ne consegue che dipenderanno in generale dalla curvatura geometrica dell'asse deformato. Se gli spostamenti sono piccoli l'asse deformato si confonde però con quello indeformato e, se questo è rettilineo, nelle (1.98) si può approssimativamente annullare la curvatura geometrica c ottenendo:

$$\frac{dN}{ds} + p = 0, \quad (1.99a)$$

$$\frac{dT}{ds} + q = 0, \quad (1.99b)$$

$$\frac{dM}{ds} - T + m = 0. \quad (1.99c)$$

Tali equazione di equilibrio potrebbero essere ottenute in modo diretto scrivendo le equazioni di equilibrio nel piano, due equazioni di equilibrio per le forze ed una per i momenti, di un tronco di trave di lunghezza

elementare dz . Con riferimento la fig. 1.22, non mettendo in conto gli infinitesimi di ordine superiore al primo in dz , si ha:

$$-N + N + dN + p \, dz = 0, \quad (1.100a)$$

$$-T + T + dT + q \, dz = 0, \quad (1.100b)$$

$$-M + M + dM - T \, dz + m \, dz = 0, \quad (1.100c)$$

Dividendo per dz e al limite per $dz \rightarrow 0$ si ottengono le (1.99).

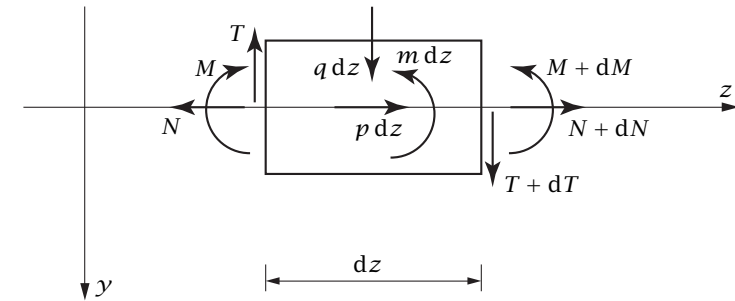


Figura 1.22: Equilibrio nel piano di un tronco di trave rettilinea

Se in corrispondenza di un punto sulla linea d'asse, in generale curva, agiscono una forza concentrata P diretta come la linea d'asse, una forza concentrata Q ortogonale alla linea d'asse e una coppia concentrata $\mathcal{M}$, le caratteristiche della sollecitazione, in accordo con le (1.45), subiscono le seguenti discontinuità:

$$N^+ - N^- + P = 0, \quad \Delta N + P = 0, \quad (1.101a)$$

$$T^+ - T^- + Q = 0, \quad \Delta T + Q = 0, \quad (1.101b)$$

$$M^+ - M^- + \mathcal{M} = 0, \quad \Delta M + \mathcal{M} = 0, \quad (1.101c)$$

dove si sono indicati con i segni $+$ e $-$ rispettivamente i limiti destro e sinistro e con il simbolo Δ l'incremento delle caratteristiche della sollecitazione in corrispondenza del dato punto. Si noti che per la validità delle (1.101), a differenza delle (1.99), non è necessario ipotizzare che la linea d'asse sia rettilinea. D'altronde se si scrivessero le equazioni di equilibrio in modo diretto (fig. 1.23) entrerebbero in gioco dei termini finiti, le forze concen-

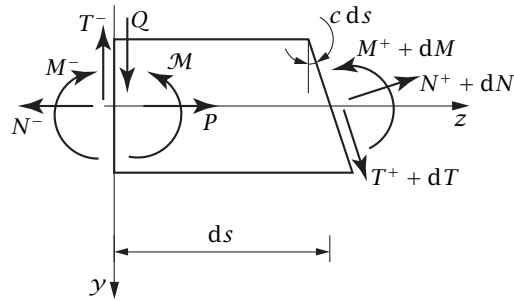


Figura 1.23: Tronco di trave piana in presenza di forze concentrate

trate e le caratteristiche della sollecitazione, mentre i contributi dovuti alla curvatura geometrica c sono infinitesimi per $ds \rightarrow 0$.

Infine, con immediato significato dei simboli, le condizioni al contorno (1.46) diventano:

$$N(s_0) = -P_0, \quad N(s_\ell) = P_\ell, \quad (1.102a)$$

$$T(s_0) = -Q_0, \quad T(s_\ell) = Q_\ell, \quad (1.102b)$$

$$M(s_0) = -\mathcal{M}_0, \quad M(s_\ell) = \mathcal{M}_\ell. \quad (1.102c)$$

Si noti che nel caso di asse rettilineo, così come prescritto dalle (1.99a), (1.101a) e (1.102a), la forza normale dipende solo dalle componenti p , P , P_0 e P_ℓ in direzione z delle forze esterne, componenti che sono dette *forze esterne di tipo assiale*. Dalla equazione (1.99c) risulta invece che taglio e momento flettente non sono indipendenti tra loro. Da questa e dalle restanti equazioni di equilibrio scalari risulta infine che taglio e momento flettente dipendono dalle componenti q , Q , Q_0 e Q_ℓ in direzione y delle forze esterne e dalle coppie esterne m , $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_\ell$, che sono congiuntamente dette *forze esterne di tipo flessionale*.

1.8.2 Cinematica della trave piana

Nel caso piano gli spostamenti $\mathbf{u}$ avvengono nel piano yz della trave e le rotazioni attorno all'asse x ortogonale al piano della trave:

$$\mathbf{u} = v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}_x. \quad (1.103)$$

Ne consegue che il vettore scorrimento $\mathbf{y}$ ha la sola componente in direzione y e la curvatura $\mathbf{k}$ la sola componente flessionale relativa all'asse x :

$$\mathbf{y} = y\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{k} = k\mathbf{e}_x. \quad (1.104)$$

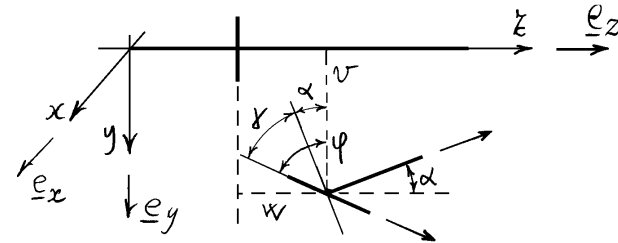
Per quel che riguarda le equazioni di congruenza, si tenga conto che:

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \left(\frac{dv}{ds} - cw \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{dw}{ds} + cv \right) \mathbf{e}_z, \quad (1.105)$$

e che quindi si riducono alle tre equazioni scalari seguenti:

$$\epsilon = \frac{dw}{ds} + cv, \quad y = \frac{dv}{ds} - cw + \varphi, \quad k = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (1.106)$$

dove c è la curvatura geometrica della linea d'asse.



Trave piana ad asse rettilineo. Se la trave, oltre che ad essere piana, è anche ad asse rettilineo le equazioni di congruenza si semplificano, essendo $c = 0$:

$$\epsilon = \frac{dw}{dz}, \quad y = \frac{dv}{dz}, \quad k = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (1.107)$$

L'angolo di rotazione della tangente α vale:

$$\alpha = \varphi - y = -\frac{dv}{dz}. \quad (1.108)$$

La curvatura geometrica c^* dell'asse deformato, nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, vale:

$$c^* = \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2}. \quad (1.109)$$

Trave piana inflessa. Nel caso di trave piana inflessa si ha:

$$\varphi = -\frac{dv}{ds} + cw, \quad k = -\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{d(cw)}{ds}. \quad (1.110)$$

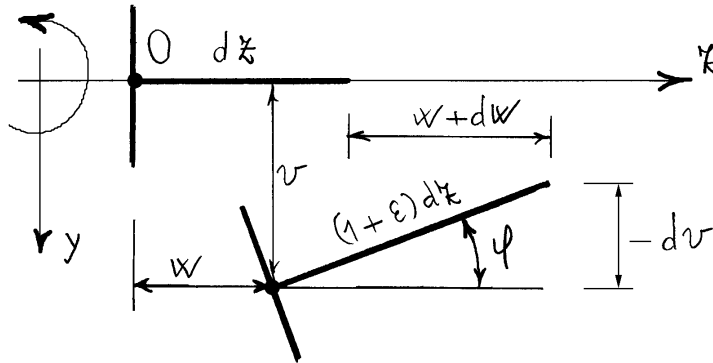
Se si trascura anche la dilatazione della linea d'asse risulta inoltre:

$$\frac{dw}{ds} = -cv. \quad (1.111)$$

Nel caso l'asse sia rettilineo si ha infine:

$$\varphi = -\frac{dv}{ds}, \quad k = -\frac{d^2v}{ds^2}. \quad (1.112)$$

Determinazione diretta del vincolo di trave inflessa e della dilatazione della linea d'asse nel caso di trave inflessa piana ad asse rettilineo. Si consideri una generica sezione retta in corrispondenza del punto O sulla linea d'asse, la cui traccia è indicata in figura, sezione iniziale di un elemento di linea dz . Poiché l'elemento dz deve restare ortogonale alla sezione



retta, tale elemento deve subire la stessa rotazione φ della sezione retta e quindi risulta:

$$-dv = (1 + \epsilon) dz \sin \varphi, \quad (1.113)$$

poiché la lunghezza dell'elemento dz dopo la deformazione vale $dz + \epsilon dz$, per definizione di dilatazione lineare. Si ottiene quindi:

$$(1 + \epsilon) \sin \varphi = -\frac{dv}{dz}. \quad (1.114)$$

Se le rotazioni e le dilatazioni sono piccole si può porre $\sin \varphi \approx \varphi$ e trascurare il termine del secondo ordine $\epsilon \varphi$ riottenendo la prima delle (1.112).

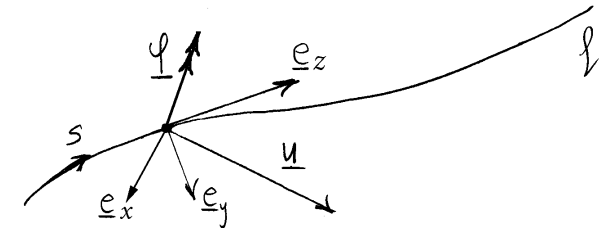
Ancora con riferimento la figura, risulta anche:

$$w + (1 + \epsilon) dz \cos \varphi = dz + w + dw. \quad (1.115)$$

Nell'ipotesi di piccole rotazioni si ha $\cos \varphi \approx 1$ e si riottiene la prima delle (1.107).

1.9 Principio dei lavori virtuali per le travi

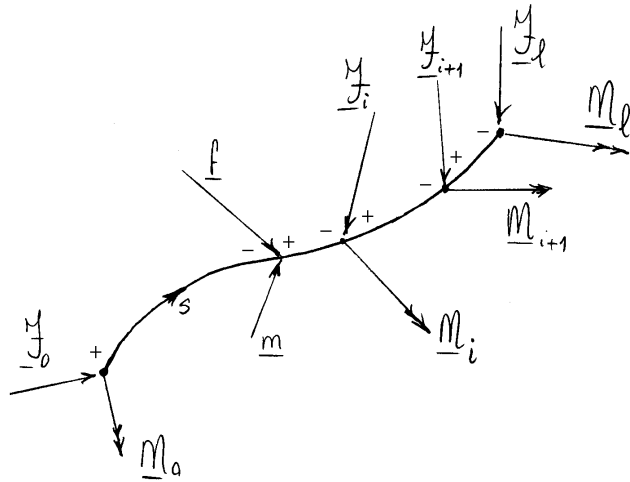
Sia data una possibile configurazione ℓ di una trave non vincolata. Tale configurazione può essere una qualunque configurazione deformata che, comunque, nell'ipotesi di piccoli spostamenti coincide con la configurazione indeformata.



Sia poi dato un sistema di forze esterne distribuite $f(s)$ e $m(s)$, agenti nella sezione di prima estremità F_0 e M_0 , agenti nella sezione di seconda estremità F_ℓ e M_ℓ , concentrate in sezioni intermedie F_i e M_i ($i = 1, \dots, n$) e di caratteristiche della sollecitazione $F(s)$ e $M(s)$. Il dato sistema di forze e di caratteristiche della sollecitazione è *equilibrato* se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio indefinite (1.35), di discontinuità (1.42) e (1.43) e di equilibrio al contorno (1.46):

$$\frac{dF}{ds} + f = 0, \quad \frac{dM}{ds} + m + e_z \times F = 0, \quad (1.116a)$$

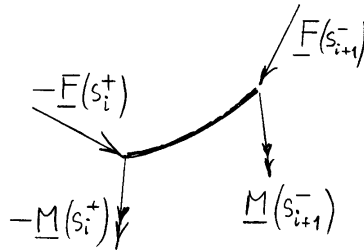
$$F(s_i^+) - F(s_i^-) + F_i = 0, \quad M(s_i^+) - M(s_i^-) + M_i = 0, \quad (1.116b)$$



$$F(s_0) = -F_0, \quad M(s_0) = -M_0, \quad (1.116c)$$

$$F(s_\ell) = F_\ell, \quad M(s_\ell) = M_\ell, \quad (1.116d)$$

Sia infine dato un *campo di spostamenti virtuali* $\mathbf{u}(s)$ e un *campo di rotazioni virtuali* $\boldsymbol{\varphi}(s)$ insieme alle *deformazioni virtuali* $\epsilon(s)$, $\boldsymbol{\gamma}(s)$ e $\mathbf{k}(s)$. Si ricorda che il termine virtuale è sinonimo di lineare (o infinitesimo) e congruente. Sono quindi soddisfatte le equazioni di congruenza



linearizzate (1.56):

$$\mathbf{d} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} \quad (1.117)$$

Ancora una volta si sottolinea il fatto che il termine infinitesimo non è sinonimo di piccolo ma di parte prima o parte lineare. Uno spostamento virtuale non è approssimato dalla parte prima di uno spostamento, *uno spostamento virtuale è la parte prima di uno spostamento*.

Il lavoro L_{ve} del sistema di forze e coppie esterne per gli spostamenti e le rotazioni virtuali viene detto *lavoro virtuale esterno*:

$$\begin{aligned} L_{ve} = & \int_{s_0}^{s_\ell} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}) ds \\ & + \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{u}(s_0) + \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_0) + \mathbf{F}_\ell \cdot \mathbf{u}(s_\ell) + \mathbf{M}_\ell \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_\ell) \\ & + \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}(s_i) + \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_i) \right). \end{aligned} \quad (1.118)$$

Il lavoro L_{vi} delle caratteristiche della sollecitazione per le deformazioni virtuali viene detto *lavoro virtuale interno*:

$$L_{vi} = \int_{s_0}^{s_\ell} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{k}) ds. \quad (1.119)$$

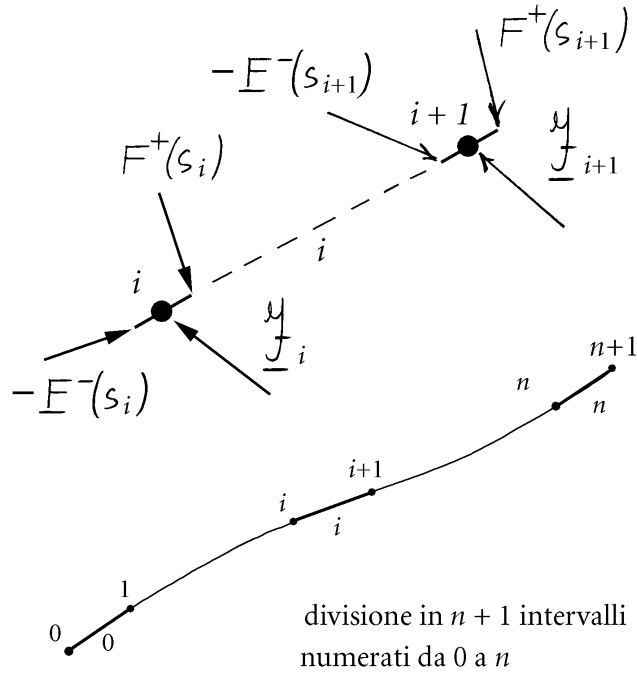
Per definizione, un sistema di forze esterne e di caratteristiche della sollecitazione soddisfa il *principio dei lavori virtuali* se il *lavoro virtuale* L_{ve} delle forze esterne uguaglia il *lavoro virtuale* L_{vi} delle caratteristiche della sollecitazione per ogni campo di spostamenti, rotazioni e deformazioni virtuali:

$$L_{ve} = L_{vi}. \quad (1.120)$$

Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio di forze e caratteristiche della sollecitazione. Il sistema di forze e caratteristiche della sollecitazione è equilibrato se e solo se soddisfa il principio dei lavori virtuali.

Dimostrazione. Infatti, posto $s_{n+1} = s_\ell$, dalla (1.118) si ottiene:

$$\begin{aligned} L_{ve} = & \int_{s_0}^{s_\ell} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varphi}) ds \\ & + \sum_{i=0}^n \left(\mathbf{F}(s_{i+1}^-) \cdot \mathbf{u}(s_{i+1}) - \mathbf{F}(s_i^+) \cdot \mathbf{u}(s_i) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=0}^n \left(\mathbf{M}(s_{i+1}^-) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_{i+1}) - \mathbf{M}(s_i^+) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_i) \right) \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}(s_i^+) - \mathbf{F}(s_i^-) + \mathbf{F}_i \right) \right) \cdot \mathbf{u}(s_i) \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{M}(s_i^+) - \mathbf{M}(s_i^-) + \mathbf{M}_i \right) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_i) \\
 & + \left(\mathbf{F}(s_0) + \mathbf{F}_0 \right) \cdot \mathbf{u}(s_0) + \left(\mathbf{F}(s_\ell) - \mathbf{F}_\ell \right) \cdot \mathbf{u}(s_\ell) \\
 & + \left(\mathbf{M}(s_0) + \mathbf{M}_0 \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_0) + \left(\mathbf{M}(s_\ell) - \mathbf{M}_\ell \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_\ell)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \int_{s_0}^{s_\ell} \left(\mathbf{F} \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} - \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{M} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{ds} \right) ds \\
 & + \int_{s_0}^{s_\ell} \left(\left(\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{f} \right) \cdot \mathbf{u} + \left(\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{m} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{F} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) ds \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}(s_i^+) - \mathbf{F}(s_i^-) + \mathbf{F}_i \right) \right) \cdot \mathbf{u}(s_i) \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \left(\mathbf{M}(s_i^+) - \mathbf{M}(s_i^-) + \mathbf{M}_i \right) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_i) \\
 & + \left(\mathbf{F}(s_0) + \mathbf{F}_0 \right) \cdot \mathbf{u}(s_0) + \left(\mathbf{F}(s_\ell) - \mathbf{F}_\ell \right) \cdot \mathbf{u}(s_\ell) \\
 & + \left(\mathbf{M}(s_0) + \mathbf{M}_0 \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_0) + \left(\mathbf{M}(s_\ell) - \mathbf{M}_\ell \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(s_\ell). \quad (1.121)
 \end{aligned}$$

■

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti la configurazione ℓ del corpo può essere fatta coincidere con la configurazione indeformata di riferimento, che diventa quindi la configurazione nella quale si definiscono approssimativamente sia le forze e le caratteristiche della sollecitazione che gli spostamenti, le rotazioni e le deformazioni virtuali e dove si impongono sia l'equilibrio delle forze e caratteristiche della sollecitazione che la congruenza degli spostamenti, rotazioni e deformazioni virtuali. In tal caso degli spostamenti, rotazioni e deformazioni reali, cioè conseguenti all'applicazione sul corpo di certe forze, possono essere assunti quali spostamenti, rotazioni e deformazioni virtuali congruenti, poiché nel caso di piccoli spostamenti tali quantità devono soddisfare le equazioni di congruenza linearizzate.

In funzione delle componenti di sollecitazione e di deformazione il lavoro virtuale interno si esprime nei modi seguenti:

$$\begin{aligned}
 L_{vi} & = \left(N\epsilon + \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{k}_f + M_t\theta + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) ds \\
 & = \int_{s_0}^{s_\ell} \left(N\epsilon + M_x k_x + M_y k_y + M_t\theta + T_x \gamma_x + T_y \gamma_y \right) ds \\
 & = \int_{s_0}^{s_\ell} \mathbf{S}^T \mathbf{D} ds = \int_{s_0}^{s_\ell} \left(\mathbf{S}_f^T \mathbf{D}_f + \mathbf{S}_t^T \mathbf{D}_t \right) ds. \quad (1.122)
 \end{aligned}$$

Si noti che l'espressione (1.122) del lavoro virtuale interno resta valido anche nel caso si faccia riferimento ai poli generici $\mathcal{G}$ e $\mathcal{C}$, dato che il lavoro di un sistema di forze per un sistema di spostamenti rigidi infinitesimi non dipende dal polo rispetto al quale è valutato il momento risultante e che definisce la traslazione del sistema di spostamenti rigidi infinitesimi. Risultano allora le seguenti espressioni del lavoro virtuale interno:

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \int_{\ell} \left(N\epsilon^{\mathcal{G}} + \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{k}_f + M_t^{\mathcal{C}} \Theta + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}^{\mathcal{C}} \right) ds \\
 &= \int_{\ell} \left(N\epsilon^{\mathcal{G}} + M_x^{\mathcal{G}} k_x + M_y^{\mathcal{G}} k_y + M_t^{\mathcal{C}} \Theta + T_x y_x^{\mathcal{C}} + T_y y_y^{\mathcal{C}} \right) ds. \\
 &= \int_{s_0}^{s_{\ell}} \left(\mathbf{S}_f^{\mathcal{G}T} \mathbf{D}_f^{\mathcal{G}} + \mathbf{S}_f^{\mathcal{C}T} \mathbf{D}_f^{\mathcal{C}} \right) ds. \tag{1.123}
 \end{aligned}$$

D'altronde utilizzando le (1.50a) e (1.83a) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 N\epsilon + \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{k}_f &= (N\mathbf{e}_z) \cdot (\epsilon\mathbf{e}_z) + \left\{ \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} + (\mathcal{G} - O) \times (N\mathbf{e}_z) \right\} \cdot \mathbf{k}_f \\
 &= (N\mathbf{e}_z) \cdot (\epsilon\mathbf{e}_z) + (N\mathbf{e}_z) \cdot \{ \mathbf{k}_f \times (\mathcal{G} - O) \} + \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{k}_f \\
 &= (N\mathbf{e}_z) \cdot \{ \epsilon\mathbf{e}_z + \mathbf{k}_f \times (\mathcal{G} - O) \} + \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{k}_f \\
 &= (N\mathbf{e}_z) \cdot (\epsilon^{\mathcal{G}}\mathbf{e}_z) + \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{k}_f = N\epsilon^{\mathcal{G}} + \mathbf{M}_f^{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{k}_f \tag{1.124}
 \end{aligned}$$

Utilizzando poi le (1.50b) e (1.83b) si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned}
 M_t\Theta + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} &= (M_t\mathbf{e}_z) \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \{ \mathbf{y}^{\mathcal{C}} - \Theta\mathbf{e}_z \times (C - O) \} \\
 &= (M_t\mathbf{e}_z) \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) - (\Theta\mathbf{e}_z) \cdot \{ (C - O) \times \mathbf{T} \} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}^{\mathcal{C}} \\
 &= \{ M_t\mathbf{e}_z - (C - O) \times \mathbf{T} \} \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}^{\mathcal{C}} \\
 &= (M_t^{\mathcal{C}}\mathbf{e}_z) \cdot (\Theta\mathbf{e}_z) + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}^{\mathcal{C}} = M_t^{\mathcal{C}}\Theta + \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}^{\mathcal{C}}. \tag{1.125}
 \end{aligned}$$

TRAVI ELASTICHE LINEARI

2.1 Teoria tecnica delle travi

Con riferimento al caso di un legame costitutivo locale, la sollecitazione nell'intorno di una sezione retta di una trave dipenderà solo dalla deformazione agente nello stesso intorno. Il modo più semplice di ottenere un legame costitutivo locale è quello di descrivere la deformazione e la sollecitazione nell'intorno di una sezione retta tramite lo spostamento relativo per unità di linea $\mathbf{d}$ e la curvatura di deformazione $\mathbf{k}$ e, rispettivamente, le caratteristiche della sollecitazione $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{d}(\tau), \mathbf{k}(\tau), \quad -\infty < \tau \leq t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}(t), \mathbf{M}(t). \quad (2.1)$$

Se la trave è elastica la sollecitazione $\mathbf{F}$ e $\mathbf{M}$ ad un dato istante dipenderà solo dalla deformazione $\mathbf{d}$ e $\mathbf{k}$ allo stesso istante:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{d}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{d}, \mathbf{k}). \quad (2.2)$$

Con riferimento ai vettori algebrici di sollecitazione $\mathbf{S}$ e di deformazione $\mathbf{D}$ la (2.2) si scrive:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{D}). \quad (2.3)$$

Il legame elastico lineare più generale possibile si scrive allora, in forma matriciale:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

dove $\mathbf{E}$ è una *matrice di elasticità* di dimensione 6×6 .

Si è visto nel capitolo precedente che alle trasformazioni rigide delle sezioni rette, che descrivono la cinematica del solido trave, corrisponde innanzitutto una dilatazione della generica fibra longitudinale che dipende esclusivamente dalla dilatazione della fibra di riferimento e dalla curvatura flessionale, ovvero dalla parte assiale e flessionale $\mathbf{D}_f$ della deformazione. Alle trasformazioni rigide delle sezioni rette corrisponde poi uno scorrimento della generica fibra longitudinale che dipende esclusivamente dall'angolo unitario di torsione e dallo scorrimento della fibra di riferimento, ovvero dalla parte di scorrimento e torsionale $\mathbf{D}_t$ della deformazione. Si tenga poi conto che nella prova di trazione semplice, che genera uno stato di tensione monoassiale ed una dilatazione longitudinale omogenei, si è messa in relazione la dilatazione con la tensione normale, mentre nella prova di torsione, che genera uno stato di tensione di taglio semplice ed uno scorrimento omogenei, si è messo in relazione lo scorrimento con la tensione tangenziale. Si ricordi infine che alla tensione normale corrispondono la forza normale e il momento flettente, ovvero la parte assiale e flessionale $\mathbf{S}_f$ della sollecitazione, mentre alla tensione tangenziale il momento torcente e il taglio, ovvero quella tagliante e torsionale $\mathbf{S}_t$. Risulta allora realistico un legame costitutivo elastico lineare in cui la parte assiale e flessionale della sollecitazione non dipenda dalla parte tagliante e torsionale della deformazione e, viceversa, la parte tagliante e torsionale della sollecitazione non dipenda dalla parte assiale e flessionale della deformazione. Il legame costitutivo si scinde in tal caso in due parti

indipendenti, una *assiale flessionale*:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^f & E_{zx}^f & E_{zy}^f \\ E_{xz}^f & E_x^f & E_{xy}^f \\ E_{yz}^f & E_{yx}^f & E_y^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ k_x \\ k_y \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

e una *tagliante torsionale*:

$$\begin{Bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_z^t & E_{zx}^t & E_{zy}^t \\ E_{xz}^t & E_x^t & E_{xy}^t \\ E_{yz}^t & E_{yx}^t & E_y^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Con il termine *teoria tecnica delle travi* sarà inteso nel seguito un particolare legame costitutivo elastico lineare di tale tipo, cioè composto dalle due parti indipendenti (2.5) e (2.6), per il quale esista innanzitutto l'energia elastica di deformazione e che sia poi una approssimazione "accettabile" del corrispondente solido elastico lineare. Non solo, ma si suppone anche che nell'intorno di una sezione retta A , di normale l'asse z , la matrice delle componenti del tensore degli sforzi nel riferimento locale sia almeno approssimativamente del tipo:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

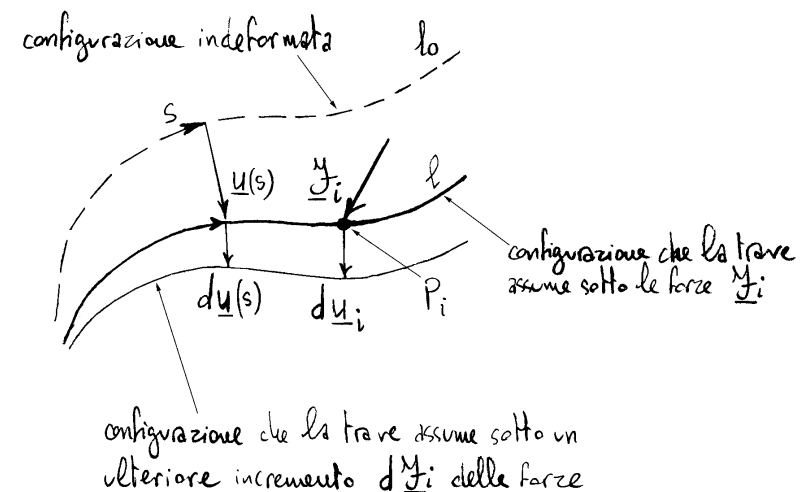
Ne risulta che la distribuzione delle componenti di tensione τ_{xz} , τ_{yz} e σ_z su una sezione retta è tutto quello che è necessario conoscere per avere il quadro completo dello stato tensionale nell'intorno della stessa sezione retta.

2.2 Lavoro di deformazione nelle travi

Si ricorda che il lavoro di deformazione rappresenta l'effettiva lavoro che le forze applicate compiono per effetto degli spostamenti che le stesse forze provocano.

Sotto l'azione dei carichi $\underline{f}$, $\underline{m}$, $\underline{f}_i$, $\underline{M}_i$ ($i=0,1,\dots,n,l$) la trave assume una configurazione equilibrata distinta da quella naturale di riferimento.

Tale configurazione è individuata dagli spostamenti



$\underline{u}(s)$ dei punti della linea d'asse e dalle rotazioni
 $\underline{\varphi}(s)$ delle sezioni rette.

Siano $\underline{S}(N, \underline{T}, M_t, \underline{M}_f)$ e $\underline{D}(\varepsilon, \underline{\chi}, \Theta, \underline{\kappa}_f)$
 le caratteristiche della sollecitazione e della deformazione
 conseguenti ai dati carichi esterni, e siano $d\underline{D}$
 $(d\varepsilon, d\underline{\chi}, d\Theta, d\underline{\kappa}_f)$ gli incrementi di deformazione
 conseguenti ad un incremento $d\underline{f}, d\underline{m}, d\underline{f}_i, d\underline{M}_i$
 dei carichi esterni. Per il principio dei lavori virtuali
 l'incremento del lavoro dei carichi esterni che
 rappresenta il lavoro di deformazione:

$$dL_d = \int_0^l (\underline{f} \cdot d\underline{u} + \underline{m} \cdot d\underline{\varphi}) ds \\ + \sum_{i=0}^{n+1} (\underline{f}_i \cdot d\underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot d\underline{\varphi}(s_i)),$$

vale:

$$dL_d = \int_0^l \underline{S}^T d\underline{D} ds \\ = \int_0^l (N d\varepsilon + \underline{T} \cdot d\underline{\chi} + M_t d\Theta + \underline{M}_f \cdot d\underline{\kappa}_f) ds.$$

Questa espressione differenziale è effettivamente nota
 se è noto il percorso di carico e deformazione a
 cui è soggetta la trave. Infatti, anche nel
 caso in cui le forze applicate sono indipendenti
 dalla deformazione e quindi note a priori, gli
 incrementi di spostamento dei punti carichi, in
 corrispondenza ad un certo livello raggiunto dai
 carichi, sono noti solo se è noto il percorso
 di deformazione susseguente all'applicazione

di quei carichi.

Se il percorso di carico-deformazione a partire da una configurazione l_1 fino ad una configurazione l_2 , susseguente all'applicazione di certi carichi, è nota, l'espressione differenziale può essere integrata (lungo il percorso) ottenendone il lavoro di deformazione totale lungo il dato percorso:

$$L_d = \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_0^l \underline{S}^T d\underline{D} \right) ds.$$

2.3 Energia elastica di deformazione nelle travi

Affinché esista una energia elastica di deformazione il lavoro di deformazione non deve dipendere dal percorso, ma solo dagli stati iniziale e finale. Questo significa che il differenziale dL_d deve essere esatto e quindi che esiste una funzione energia potenziale elastica per unità di linea $\phi(\underline{D})$ funzione della sola deformazione tale che:

$$d\phi = \underline{S}^T d\underline{D}, \quad (2.8)$$

o, per esteso:

$$d\phi = N d\epsilon + \underline{M}_f \cdot d\underline{k}_f + M_t d\theta + \underline{T} \cdot d\underline{y}. \quad (2.9)$$

Ne consegue:

$$\underline{S} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}}, \quad (2.10)$$

oppure per esteso:

$$N = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}, \quad (2.11a)$$

$$\underline{M}_f = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{k}_f} \Rightarrow \begin{aligned} M_x &= \frac{\partial \phi}{\partial k_x}, \\ M_y &= \frac{\partial \phi}{\partial k_y}, \end{aligned} \quad (2.11b)$$

$$M_t = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (2.11c)$$

$$\underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{y}} \Rightarrow \begin{aligned} T_x &= \frac{\partial \phi}{\partial y_x}, \\ T_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y_y}. \end{aligned} \quad (2.11d)$$

Nel caso di elasticità lineare deve risultare:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} = \underline{E} \underline{D}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial D_i} = \sum_j E_{ij} D_j, \quad (2.12)$$

e quindi:

$$E_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j}. \quad (2.13)$$

L'integrazione è possibile se e solo se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial D_i \partial D_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial D_j \partial D_i}, \quad (2.14)$$

cioè se e solo se la matrice di elasticità è simmetrica:

$$\underline{E} = \underline{E}^T, \quad E_{ij} = E_{ji}. \quad (2.15)$$

Si integri allora dallo stato naturale allo stato finale caratterizzato dalla deformazione $\underline{D}$ e dalla sollecitazione $\underline{S} = \underline{E} \underline{D}$. Uno stato intermedio vale

$\lambda \mathbf{D}$ e $\lambda \mathbf{S}$, con $\lambda \in [0, 1]$. Ad un incremento $d\mathbf{D} = (d\lambda)\mathbf{D}$ di deformazione corrisponde l'incremento $d\phi = \lambda(\mathbf{S}^T \mathbf{D}) d\lambda$ dell'energia elastica di deformazione. Integrando si ottiene quindi:

$$\phi = \int_0^1 \lambda(\mathbf{S}^T \mathbf{D}) d\lambda = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{D}, \quad (2.16)$$

avendo scelto di porre $\phi(0) = 0$. Inserendo il legame costitutivo elastico lineare si ottiene infine:

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (2.17)$$

La richiesta che il lavoro di deformazione sia positivo, a partire dalla configurazione naturale, implica la definitezza positiva di $\mathbf{E}$ e la sua invertibilità.

Detta $\mathbf{C}$ la matrice inversa della $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1},$$

si ha quindi:

$$\underline{\mathbf{D}} = \mathbf{C} \underline{\mathbf{S}}.$$

È anche assicurata l'esistenza dell'energia complementare per unità di linea che vale:

$$\psi = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{S}}^T \mathbf{C} \underline{\mathbf{S}},$$

tale che:

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}},$$

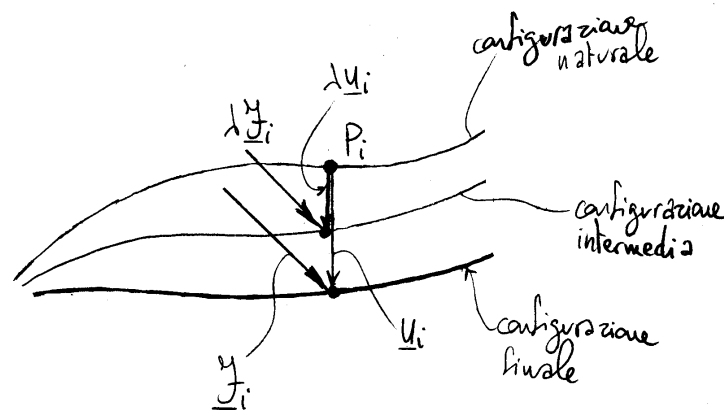
oppure, per esteso:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial N} \\ \delta_x = \frac{\partial \psi}{\partial T_x} \\ \delta_y = \frac{\partial \psi}{\partial T_y} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Theta = \frac{\partial \psi}{\partial M_t} \\ K_x = \frac{\partial \psi}{\partial M_x} \\ K_y = \frac{\partial \psi}{\partial M_y} \end{cases}.$$

2.4 Teoremi sul lavoro di deformazione

2.4.1 Teorema di Clapeyron

Nell'ambito dell'elasticità lineare gli spostamenti sono proporzionali alle forze applicate. Se le forze $\underline{F}_i$ provocano gli spostamenti $\underline{u}_i$ dei punti di applicazione, le forze $\lambda \underline{F}_i$, dove λ è un generico scalare, provocano gli spostamenti $\lambda \underline{u}_i$. Poiché il lavoro di deformazione è indipendente dal percorso, lo si può calcolare scegliendo di incrementare tutte le forze in modo proporzionale fra loro, da zero fino al loro valore finale $\underline{F}_i$. Uno stato intermedio è dunque individuato dalle forze $\lambda \underline{F}_i$ con $0 < \lambda < 1$.



Se alle forze finali corrispondono gli spostamenti $\underline{u}_i$ allora alle forze $\lambda \underline{F}_i$ corrispondono gli spostamenti $\lambda \underline{u}_i$. L'incremento dei carichi lungo il percorso scelto vale $d\lambda \underline{F}_i$ e il conseguente incremento degli spostamenti risulta $d\lambda \underline{u}_i$. Ne consegue:

$$L_d = \sum_i \int_0^1 (\lambda \underline{F}_i) \cdot (d\lambda \underline{u}_i) = \sum_i (\underline{F}_i \cdot \underline{u}_i) \int_0^1 \lambda d\lambda,$$

e infine:

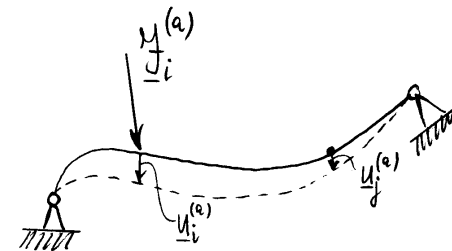
$$L_d = \frac{1}{2} \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{u}_i \quad (\text{Teorema di Clapeyron}).$$

A parità, il lavoro di deformazione due le forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale e' pari a metà del lavoro compiuto dalle stesse forze se avessero dall'inizio alla fine il loro valore finale.

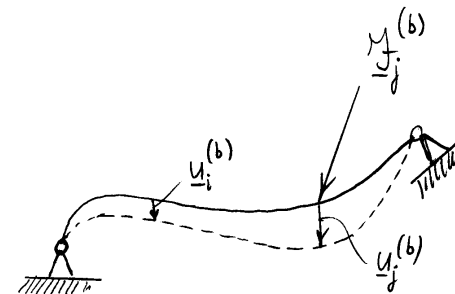
2.4.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un sistema di forze $\underline{F}_i^{(a)}$ compete il seguente lavoro di deformazione:

$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \sum_i \underline{F}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(a)},$$



sistema (a)



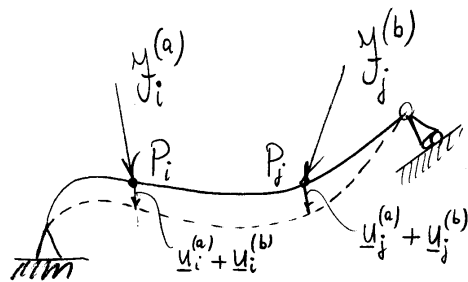
sistema (b)

mentre ad un sistema di forze $\underline{y}_j^{(b)}$ compete il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \sum_j \underline{y}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(b)}.$$

Al sistema di forze sommate dei due sistemi precedenti compete quindi il lavoro:

$$\begin{aligned} L_d^{(a+b)} &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_i \underline{y}_i^{(a)} \cdot (\underline{u}_i^{(a)} + \underline{u}_i^{(b)}) + \sum_j \underline{y}_j^{(b)} \cdot (\underline{u}_j^{(a)} + \underline{u}_j^{(b)}) \right\} \\ &= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}) \end{aligned}$$



sistema (a)+(b)

dove:

$$L_{ab} = \sum_i \underline{y}_i^{(a)} \cdot \underline{u}_i^{(b)}$$

$$L_{ba} = \sum_j \underline{y}_j^{(b)} \cdot \underline{u}_j^{(a)}.$$

I lavori L_{ab} e L_{ba} rappresentano il lavoro mutuo che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (b) se avessero sempre il loro valore finale e, rispettivamente, il lavoro mutuo che le forze del sistema (b) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema (a) se avessero sempre il loro valore finale.

Vogliamo mostrare che i due lavori mutui L_{ab} e L_{ba} coincidono (teorema di Betti).

Infatti, poiché il lavoro di deformazione non dipende dal percorso, il lavoro $L_d^{(a+b)}$ può essere calcolato applicando prima le forze del sistema (a) fino al loro valore finale, poi le forze del sistema (b) fino al loro valore finale. Alla fine dell'applicazione del sistema (a) il lavoro di deformazione vale $L_d^{(a)}$. L'applicazione del sistema (b) non solo genera il lavoro di deformazione $L_d^{(b)}$, ma, facendo lavorare anche il sistema di forze (a), che sono già al loro valore finale, genera anche il termine L_{ab} :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab} .$$

D'altronde, se si applica prima il sistema di

forze (b) fino al loro valore finale e indi il sistema di forze (a), si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba} .$$

Ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba} .$$

2.5 Energia potenziale totale nelle travi

Se all'energia elastica di deformazione Φ si somma l'energia potenziale delle forze applicate, nell'ipotesi che tali forze siano conservative, si ottiene l'energia potenziale totale. Se le forze applicate alla struttura sono indipendenti dagli spostamenti e rotazioni che la struttura può subire (forze morte, oppure "dead loadings", nella terminologia inglese) allora il potenziale delle forze associato a dati spostamenti e rotazioni che, con una opportuna scelta dello zero del potenziale, coincide con il lavoro delle forze, risulta:

$$V(\underline{u}, \underline{\varphi}) = \int_{s_0} (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{\varphi}(s_i)).$$

Tenendo conto che le deformazioni dipendono, tramite le equazioni di congruenza, dagli spostamenti e dalle rotazioni, risulta la seguente espressione dell'energia potenziale totale:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) = - \int_{s_0} (\underline{f} \cdot \underline{u} + \underline{m} \cdot \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \underline{u}(s_i) + \underline{M}_i \cdot \underline{\varphi}(s_i)) + \int_{s_0} \phi(\underline{u}, \underline{\varphi}) ds.$$

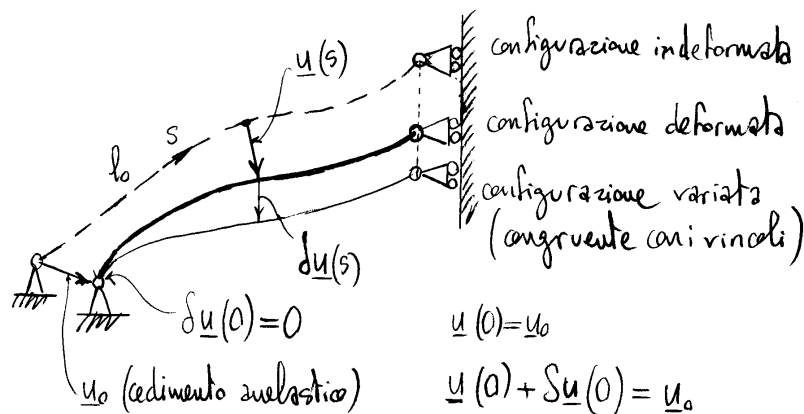
Notiamo che tale energia rappresenta una funzione scalare degli spostamenti e delle rotazioni. A loro volta gli spostamenti $\underline{u}(s)$ e le rotazioni $\underline{\varphi}(s)$ rappresentano due funzioni vettoriali dell'ascissa curvilinea s lungo l'asse della trave. Quindi la funzione $\pi(\underline{u}, \underline{\varphi})$ rappresenta una funzione di

funzione a valori scalari. Un tale tipo di funzione è chiamata funzionale.

2.5.1 Variazione del funzionale energia potenziale totale

L'incremento di $\pi(\underline{u}, \underline{\varphi})$ al passare da una configurazione individuata dagli spostamenti e rotazioni $\underline{u}_1$ e $\underline{\varphi}_1$ ad un'altra configurazione individuata dagli spostamenti e rotazioni $\underline{u}_2$ e $\underline{\varphi}_2$ vale:

$$\Delta\pi = \pi(\underline{u}_2, \underline{\varphi}_2) - \pi(\underline{u}_1, \underline{\varphi}_1).$$



Si considerino degli spostamenti $\underline{u}(s)$ e delle rotazioni $\underline{\varphi}(s)$, che individuano una configurazione deformata congruente con i vincoli. Si incrementino tali spostamenti e rotazioni tramite due funzioni $\delta \underline{u}(s)$ e $\delta \underline{\varphi}(s)$.

Se si vuole che le somme $\underline{u}(s) + \delta \underline{u}(s)$ e $\underline{\varphi}(s) + \delta \underline{\varphi}(s)$ soddisfino le condizioni geometriche al contorno, occorre che le variazioni $\delta \underline{u}$ degli spostamenti e $\delta \underline{\varphi}$ delle rotazioni soddisfino le condizioni geometriche

omogenee al contorno. Per esempio, se in corrispondenza di $s=s_0$ deve essere $\underline{u}(s_0)=\underline{u}_0$ (cedimento anelastico) la condizione $\underline{u}(s_0) + \delta \underline{u}(s_0) = \underline{u}_0$ è soddisfatta se e solo se $\delta \underline{u}(s_0) = 0$ (condizione omogenea).

L'incremento dell'energia potenziale totale conseguente alle variazioni $\delta \underline{u}$ e $\delta \underline{\varphi}$ dei campi degli

spostamenti e delle rotazioni a partire dalla configurazione individuata dagli spostamenti $\underline{u}$ e dalle rotazioni $\underline{\varphi}$, vale

$$\Delta \Pi(\delta \underline{u}, \delta \underline{\varphi}) = \Pi(\underline{u} + \delta \underline{u}, \underline{\varphi} + \delta \underline{\varphi}) - \Pi(\underline{u}, \underline{\varphi}).$$

Consideriamo una data "direzione" nello "spazio delle variazioni", ovvero sia nello spazio delle funzioni di s soddisfacenti le condizioni omogenee al contorno. Una direzione è individuata da tutte le variazioni che sono proporzionali ad una variazione data, e che quindi possono mettersi nella forma:

$$\delta \underline{u} = \alpha \delta \underline{u}_0, \quad \delta \underline{\varphi} = \alpha \delta \underline{\varphi}_0,$$

dove $\delta \underline{u}_0$ e $\delta \underline{\varphi}_0$ sono delle date variazioni e α è uno scalare indipendente da s . Al variare di α si modifica

l'entità degli spostamenti ma non la loro forma. Lungo una direzione così fatta, il funzionale Π risulta una funzione della sola α e se ne può calcolare per $\alpha=0$, la parte lineare in α , che, per $\alpha=1$, viene detta variazione prima ed indicata con $\delta \Pi$:

$$\delta \Pi = \left. \frac{d\Pi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Poiché risulta:

$$\Pi = -V + \Phi,$$

ne consegue $[F = G + H \Rightarrow \delta F = \delta G + \delta H]$:

$$\delta \Pi = -\delta V + \delta \Phi.$$

Risulta poi $[F = aG \Rightarrow \delta F = a\delta G]$ e

$$\delta \int_{l_0} F ds = \int_{l_0} \delta F ds]:$$

$$\delta V = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i).$$

Inoltre:

$$\delta \Phi = \int_{l_0} \delta \phi ds ,$$

ed ancora $[F = G(H) \Rightarrow \delta F = \frac{\partial G}{\partial H} \delta H]:$

$$\delta \Phi = \int_{l_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \cdot \delta \underline{D} \right) ds = \int_{l_0} (\underline{s} \cdot \delta \underline{D}) ds .$$

Risulta dunque:

$$\delta \Pi = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} (\underline{s} \cdot \delta \underline{D}) ds .$$

Utilizzando infine il legame elastico-lineare si può anche scrivere:

$$\delta \Pi = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \\ - \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} (\underline{E}[\underline{D}] \cdot \delta \underline{D}) ds .$$

Le variazioni delle deformazioni $\underline{D}$, utilizzando le equazioni (lineari) di congruenza, risultano:

$$\begin{cases} \delta \underline{y} + \delta \epsilon \underline{e}_t = \frac{d \delta \underline{u}}{ds} - \delta \underline{\varphi} \times \underline{e}_t \\ \delta \underline{\kappa} = \frac{d \delta \underline{\varphi}}{ds} \end{cases} .$$

Si noti che il risultato non sarebbe cambiato se si fosse partiti dalle equazioni di congruenza non lineari, poiché "variare" significa linearizzare.

2.5.2 Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale

La variazione $\delta\pi$ del funzionale energia potenziale totale si annulla in corrispondenza della soluzione del problema elastico.

Infatti, le forze applicate sono in equilibrio con le caratteristiche della sollecitazione soluzione $\underline{s}^*$ che, tramite i legami costitutivi, dipendono dalle caratteristiche della deformazione soluzione $\underline{D}^*$:

$$\underline{s}^* = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{D} = \underline{D}^*}.$$

Siano poi $\delta \underline{u}$ e $\delta \underline{\varphi}$ delle variazioni degli spostamenti e delle rotazioni e siano $\delta \underline{D}$ le associate variazioni delle deformazioni. Si può allora scrivere il

principio dei lavori virtuali nella forma:

$$\int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} (\underline{s}^* \cdot \delta \underline{D}) ds = 0.$$

tenendo conto che le variazioni $\delta \underline{u}$ e $\delta \underline{\varphi}$ sono omogenee in corrispondenza dei vincoli e che quindi le reazioni vincolari soluzione $\underline{R}^*$ hanno un contributo nullo. Quindi risulta:

$$\int_{l_0} (\underline{f} \cdot \delta \underline{u} + \underline{m} \cdot \delta \underline{\varphi}) ds + \sum_{i=0}^n (\underline{F}_i \cdot \delta \underline{u}_i + \underline{M}_i \cdot \delta \underline{\varphi}_i) + \int_{l_0} \left(\left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{D} = \underline{D}^*} \cdot \delta \underline{D} \right) ds = 0.$$

cioè:

$$\delta \pi|_{\underline{D} = \underline{D}^*} = 0,$$

come valersi dimostrare. Poiché si sono utilizzate, nella dimostrazione, espressioni formalmente valide anche in elasticità finita, tale teorema ha una validità generale.

2.5.3 Principio di minimo dell'energia potenziale totale

Nell'ambito della sola elasticità infinitesimale si dimostra inoltre che il funzionale energia potenziale totale ha un minimo assoluto in corrispondenza della soluzione.

Infatti, utilizzando la forma quadratica del funzionale energia potenziale totale, propria del regime elastico-lineare:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) = - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) + \underline{m} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*)) ds +$$

$$- \sum_{i=0}^n (\underline{y}_i \cdot (\underline{u}_i - \underline{u}_i^*) + \underline{M}_i \cdot (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i^*)) + \int_{l_0} \frac{1}{2} \{ \underline{D} \cdot \mathbb{E}[\underline{D}] - \underline{D}^* \cdot \mathbb{E}[\underline{D}^*] \} ds =$$

$$= - \int_{l_0} (\underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) + \underline{m} \cdot (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*)) ds +$$

$$- \sum_{i=0}^n (\underline{y}_i \cdot (\underline{u}_i - \underline{u}_i^*) + \underline{M}_i \cdot (\underline{\varphi}_i - \underline{\varphi}_i^*))$$

$$+ \int_{l_0} \underline{D}^* \cdot \mathbb{E}[\underline{D} - \underline{D}^*] ds + \frac{1}{2} \int_{l_0} [\underline{D} - \underline{D}^*] \cdot \mathbb{E}[\underline{D} - \underline{D}^*] ds.$$

Le caratteristiche della sollecitazione $\underline{S}^* = \mathbb{E}[\underline{D}^*]$ sono in equilibrio con le forze $\underline{f}$, $\underline{m}$, $\underline{y}_i$ e $\underline{M}_i$ mentre gli spostamenti $\underline{u} - \underline{u}^*$, le rotazioni $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$ e le deformazioni $\underline{D} - \underline{D}^*$ soddisfanno le equazioni di congruenza linearizzate ed inoltre gli spostamenti $\underline{u} - \underline{u}^*$ e le rotazioni $\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$ si annullano in corrispondenza dei

vincoli. Per il principio dei lavori virtuali la somma dei primi due termini si annulla e risulta:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) = \frac{1}{2} \int_{\ell} [\underline{D} - \underline{D}^*] \cdot \mathbb{E} [\underline{D} - \underline{D}^*] ds.$$

La definitezza positiva di $\mathbb{E}$ assicura dunque:

$$\pi(\underline{u}, \underline{\varphi}) - \pi(\underline{u}^*, \underline{\varphi}^*) > 0$$

se $\underline{D} \neq \underline{D}^*$, cioè se gli spostamenti $\underline{u} - \underline{u}^*$ e le rotazioni

$\underline{\varphi} - \underline{\varphi}^*$ differiscono da un moto rigido. In tal caso $\underline{u}$ e $\underline{\varphi}$

differiscono dalla soluzione e il teorema resta dimostrato.

2.6 Centri di flessione e di taglio

Nel seguito si suppone che esista l'energia elastica di deformazione e che quindi il legame costitutivo elastico lineare sia invertibile e le matrici di elasticità e di elasticità inversa siano simmetriche. Come già detto si suppone inoltre che la parte assiale e flessionale sia indipendente da quella tagliante e torsionale. Si faccia poi riferimento, per il momento, al punto O della linea d'asse per il calcolo di tutte le quantità che intervengono nel legame costitutivo. Si scelga infine, nel piano della sezione, un generico sistema di riferimento Oxy (fig. 2.1).

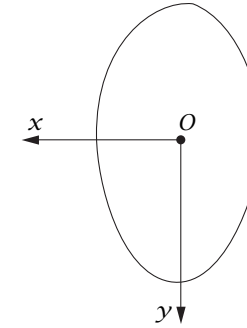


Figura 2.1: Sistema di riferimento

2.6.1 Centro di flessione

Si consideri ora una deformazione assiale e flessionale tale che $\mathbf{k}_f = 0$ e $\epsilon \neq 0$. Tramite il relativo legame costitutivo elastico lineare a tale deformazione corrisponderà una forza normale N e un momento flettente $\mathbf{M}_f$, valutato rispetto al polo O , equivalenti ad un'unica forza normale avente retta d'azione che intersecherà la sezione retta in un punto G , detto *centro di flessione* (fig. 2.2). Si ha:

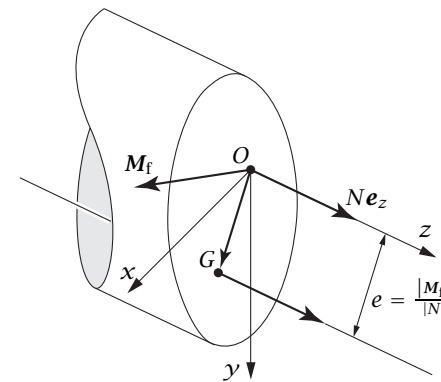


Figura 2.2: Centro di flessione

$$G - O = \frac{1}{N} \mathbf{e}_z \times \mathbf{M}_f \quad (2.18)$$

Il centro di flessione G esiste poiché $N \neq 0$ in quanto non deve essere nulla l'energia elastica di deformazione pari a $\phi = \frac{1}{2}N\epsilon$ e poiché per via della linearità del legame la retta d'azione che definisce G non dipende dal valore di ϵ . Inoltre se il centro di flessione viene scelto quale polo del legame assiale flessionale, il legame assiale e quello flessionale vengono disaccoppiati in quanto ad una generica curvatura flessionale $\mathbf{k}_f$ deve corrispondere una forza normale N nulla. Infatti si considerino due deformazioni assiali e flessionali $\mathbf{D}_1^f = [\epsilon^G \ 0 \ 0]^T$ e $\mathbf{D}_2^f = [0 \ k_x \ k_y]^T$. Alla dilatazione ϵ^G corrisponde un momento flettente $\mathbf{M}_{f1}^G$ nullo, per cui risulta $(\mathbf{D}_2^f)^T \mathbf{E}^f \mathbf{D}_1^f = (\mathbf{D}_2^f)^T \mathbf{S}_1^f = \mathbf{M}_{f1}^G \cdot \mathbf{k}_f = 0$. Per via della simmetria del legame dovuta alla esistenza dell'energia elastica di deformazione deve allora risultare $N_2 \epsilon^G = (\mathbf{D}_1^f)^T \mathbf{S}_2^f = (\mathbf{D}_1^f)^T \mathbf{E}^f \mathbf{D}_2^f = 0$ e infine $N_2 = 0$. Scelto allora G quale polo del legame assiale flessionale, le due parti indipendenti, una assiale e una flessionale, possono scriversi:

$$N = \mathcal{M} \epsilon^G, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{M}_f^G = \mathbf{J} \mathbf{k}_f. \quad (2.20)$$

La costante di proporzionalità $\mathcal{M}$, *rigidezza assiale* di un elemento di trave, ha dimensione F e può essere misurata per esempio in N. Poiché $\mathbf{M}_f^G$ e $\mathbf{k}_f$ sono vettori nel piano della sezione, l'operatore lineare $\mathbf{J}$ che ne definisce il legame elastico lineare è di consanguenza un tensore del secondo ordine piano, il *tensore di rigidezza flessionale* di un elemento di trave, e le sue componenti hanno dimensione FL^2 e possono quindi essere misurate per esempio in N m^2 .

2.6.2 Centro di taglio

Sia data una prima deformazione torsionale e tagliente tale che $\Theta_1 = 0$ e $\mathbf{y}_1 \neq 0$. Tramite il relativo legame costitutivo elastico lineare a tale deformazione corrisponderà un momento torcente M_{t1} , valutato rispetto al polo O , e un taglio $\mathbf{T}_1$. Il sistema di forze è equivalente ad un'unica forza di taglio avente retta d'azione r_1 non ortogonale a $\mathbf{y}_1$ in quanto l'energia elastica di deformazione, pari a $\phi = \frac{1}{2} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{y}_1$, non deve annullarsi (fig. 2.3). Sia data poi una seconda deformazione torsionale e tagliente tale che $\Theta_2 =$

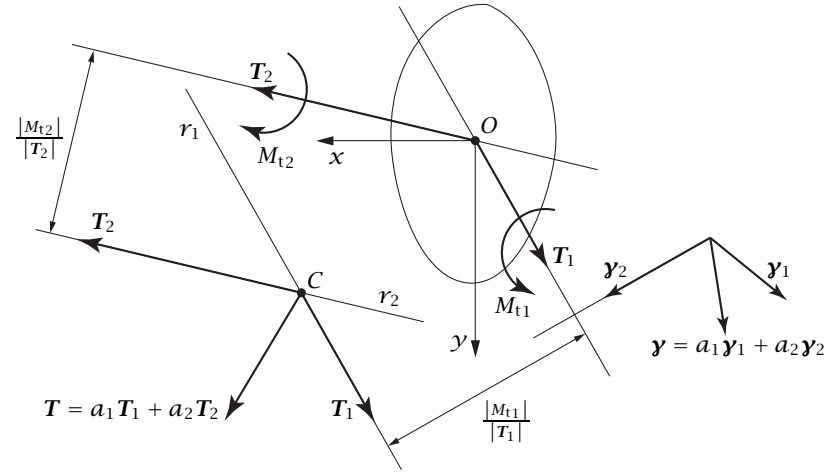


Figura 2.3: Centro di taglio

0 e $\mathbf{y}_2 \neq 0$, con $\mathbf{y}_2$ ortogonale a $\mathbf{T}_1$. A tale deformazione corrisponderà un momento torcente M_{t2} , ancora valutato rispetto al polo O , e un taglio $\mathbf{T}_2$ pure equivalenti ad un'unica forza di taglio avente retta d'azione r_2 non ortogonale a $\mathbf{y}_2$ poiché anche in tal caso l'energia elastica di deformazione, pari a $\phi = \frac{1}{2} \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{y}_2$, non deve annullarsi. Quindi r_2 non è parallela a r_1 e le due rette si intersecano in un punto C detto *centro di taglio*.

Si osservi innanzitutto che C esiste, in quanto la sua posizione non dipende dallo scorrimento iniziale $\mathbf{y}_1$ prescelto. Infatti essendo $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ non paralleli, un qualunque scorrimento $\mathbf{y}$ può scriversi come loro combinazione lineare. Per la linearità del legame a $\mathbf{y}$ corrisponderà un taglio $\mathbf{T}$ combinazione lineare di $\mathbf{T}_1$ e di $\mathbf{T}_2$, quindi passante per C . Se poi il centro di taglio viene scelto quale polo del legame tagliente torsionale, il legame tagliente e quello torsionale vengono disaccoppiati, in quanto ad un angolo unitario di torsione Θ generico deve corrispondere un taglio $\mathbf{T}$ nullo. Infatti si considerino due deformazioni taglianti e torcenti $\mathbf{D}_1^t = [0 \ y_x^C \ y_y^C]^T$ e $\mathbf{D}_2^t = [\Theta \ 0 \ 0]^T$. Allo scorrimento $\mathbf{y}^C$ corrisponde un momento torcente M_{t1}^C nullo, per cui risulta $(\mathbf{D}_2^t)^T \mathbf{E}^t \mathbf{D}_1^t = (\mathbf{D}_2^t)^T \mathbf{S}_1^t = M_{t1}^C \Theta = 0$. Per via della simmetria del legame dovuta alla esistenza dell'energia elastica di deformazione deve allora risultare $\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{y}^C = (\mathbf{D}_1^t)^T \mathbf{S}_2^t = (\mathbf{D}_1^t)^T \mathbf{E}^t \mathbf{D}_2^t = 0$ e

infine $T_2 = \mathbf{0}$. Scelto allora C quale polo del legame tagliante torcente, le due parti indipendenti, una tagliante e una torcente, possono scriversi:

$$M_t^C = J_t \Theta, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} \mathbf{y}^C. \quad (2.22)$$

In tal caso la costante di proporzionalità J_t , *rigidezza torsionale* di un elemento di trave ha dimensioni FL^2 e può essere misurata per esempio in N m^2 , mentre l'operatore lineare $\mathbf{I}$ che è un tensore del secondo ordine piano, il *tensore di rigidezza tagliante* di un elemento di trave, e le sue componenti hanno dimensione F e possono quindi essere misurate per esempio in N .

2.6.3 Energia elastica di deformazione

A seguito della scelta dei centri di flessione G e di taglio C quali poli per la descrizione del legame costitutivo delle travi l'espressione del lavoro virtuale interno che compare nel principio dei lavori virtuali resta, come già visto, formalmente immutata da cui consegue la stessa proprietà sia per l'energia elastica di deformazione che per l'energia complementare:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{M} (\epsilon^G)^2 + \mathbf{k}_f \cdot \mathbf{J} \mathbf{k}_f + J_t \Theta^2 + \mathbf{y}^C \cdot \mathbf{I} \mathbf{y}^C \right\}, \quad (2.23a)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\mathcal{M}} N^2 + \mathbf{M}_f^G \cdot \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_f^G + \frac{1}{J_t} (M_t^C)^2 + \mathbf{T} \cdot \mathbf{I}^{-1} \mathbf{T} \right\}. \quad (2.23b)$$

Se x e y sono direzioni principali di flessione, ovverossia direzioni principali del tensore di rigidezza flessionale $\mathbf{J}$, e analogamente se x' e y' sono direzioni principali di taglio, ovverossia direzioni principali del tensore di rigidezza tagliante $\mathbf{I}$, l'energia elastica di deformazione e l'energia complementare si scrivono:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{M} (\epsilon^G)^2 + J_x k_x^2 + J_y k_y^2 + J_t \Theta^2 + \Gamma_{x'} (y_{x'}^C)^2 + \Gamma_{y'} (y_{y'}^C)^2 \right\}, \quad (2.24a)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{N^2}{\mathcal{M}} + \frac{(M_x^G)^2}{J_x} + \frac{(M_y^G)^2}{J_y} + \frac{(M_t^C)^2}{J_t} + \frac{T_{x'}^2}{\Gamma_{x'}} + \frac{T_{y'}^2}{\Gamma_{y'}} \right\}, \quad (2.24b)$$

dove J_x e J_y sono i valori principali di $\mathbf{J}$ e $\Gamma_{x'}$ e $\Gamma_{y'}$ quelli di $\mathbf{I}$.

◇ ◇ ◇

Coordinate dei centri di flessione e di taglio. Si vogliono valutare le coordinate dei centri di flessione e di taglio in funzione delle componenti della matrice di elasticità relativa al punto O della linea d'asse.

Al fine del calcolo delle coordinate del centro di flessione, si inseriscano le formule di trasformazione della dilatazione delle fibre longitudinali e del momento flettente nel legame costitutivo della parte assiale e flessionale, scritto con riferimento al centro O sulla linea d'asse. Lo sviluppo del legame costitutivo fornisce:

$$N = E_z^f (\epsilon^G - k_x y_G + k_y x_G) + E_{zx}^f k_x + E_{zy}^f k_y, \quad (2.25)$$

che si riduce nella forma (2.19):

$$N = E_z^f \epsilon^G, \quad (2.26)$$

se e solo se si pone:

$$x_G = -\frac{E_{zy}^f}{E_z^f}, \quad y_G = \frac{E_{zx}^f}{E_z^f}. \quad (2.27)$$

Si noti che inoltre è possibile ricavare le componenti del tensore di rigidezza flessionale. Infatti si ha:

$$M_x^G + N y_G = E_{xz}^f (\epsilon^G - k_x y_G + k_y x_G) + E_x^f k_x + E_{xy}^f k_y \quad (2.28)$$

che con le (2.26) e (2.27) diventa:

$$M_x^G = \left(E_x^f - \frac{(E_{zx}^f)^2}{E_z^f} \right) k_x + \left(E_{xy}^f - \frac{E_{zx}^f E_{zy}^f}{E_z^f} \right) k_y. \quad (2.29)$$

Analogamente si ottiene:

$$M_y^G = \left(E_{xy}^f - \frac{E_{zy}^f E_{zx}^f}{E_z^f} \right) k_x + \left(E_y^f - \frac{(E_{zy}^f)^2}{E_z^f} \right) k_y. \quad (2.30)$$

Al fine del calcolo delle coordinate del centro di taglio, conviene utilizzare il legame costitutivo inverso scritto con riferimento al centro O sulla linea d'asse:

$$\begin{Bmatrix} \Theta \\ y_x \\ y_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z^t & C_{zx}^t & C_{zy}^t \\ C_{xz}^t & C_x^t & C_{xy}^t \\ C_{yz}^t & C_{yx}^t & C_y^t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_t \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix}, \quad (2.31)$$

poichè si ottengono così degli sviluppi formalmente analoghi a quelli precedenti. Infatti, si inseriscano nella (2.31) le formule di trasformazione dello scorrimento

delle fibre longitudinali e del momento torcente. Lo sviluppo della (2.31) fornisce innanzitutto l'analogia della (2.25):

$$\Theta = C_z^t (M_t^C - T_x \gamma_C + T_y x_C) + C_{zx}^t T_x + C_{zy}^t T_y, \quad (2.32)$$

che si riduce nella forma inversa della (2.21):

$$\Theta = C_z^t M_t^C, \quad (2.33)$$

se e solo se si pone, analogamente alle (2.27):

$$x_C = -\frac{C_{zy}^t}{C_z^t}, \quad \gamma_C = \frac{C_{zx}^t}{C_z^t}. \quad (2.34)$$

Si noti che inoltre è possibile ricavare le componenti del tensore di rigidezza tagliante inverso. Infatti si ha:

$$\gamma_x^C + \Theta \gamma_C = C_{xz}^t (M_t^C - T_x \gamma_C + T_y x_C) + C_x^t T_x + C_{xy}^t T_y, \quad (2.35)$$

che con le (2.33) e (2.34) diventa:

$$\gamma_x^C = \left(C_x^t - \frac{(C_{zx}^t)^2}{C_z^t} \right) T_x + \left(C_{xy}^t - \frac{C_{zx}^t C_{zy}^t}{C_z^t} \right) T_y. \quad (2.36)$$

Analogamente si ottiene:

$$\gamma_y^C = \left(C_{xy}^t - \frac{C_{zy}^t C_{zx}^t}{C_z^t} \right) T_x + \left(C_y^t - \frac{(C_{zy}^t)^2}{C_z^t} \right) T_y. \quad (2.37)$$

◇ ◇ ◇

MODELLO DI EULERO-BERNOULLI

Si costruirà nel seguito la teoria di Eulero-Bernoulli della trave elastica inflessa, innestando una semplice assunzione costitutiva nel quadro cinematico sviluppato in precedenza. La prima versione di tale teoria è dovuta a Giacomo Bernoulli.¹ In seguito Eulero,² su suggerimento di Daniele Bernoulli,³ risolse basandosi sulla teoria di Giacomo il problema della determinazione della *elastica*, cioè della forma che una trave elastica molto snella assume sotto diverse condizioni di carico.

Le più ampie applicazioni in sede tecnica della teoria della trave inflessa si riferiscono alla sua versione ristretta alle ipotesi di un legame costitutivo di tipo elastico lineare inserito nel quadro cinematico valido sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti. Tuttavia, come vedremo, nello spirito della teoria delle travi inflesse risulta possibile considerare anche altri tipi di legami costitutivi, per esempio elastici non lineari oppure elastoplastici od ancora viscoelastici. D'altronde spesso non è possibile prescindere da tali tipi

più generali di legami costitutivi, per esempio se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

La teoria della trave inflessa si presta bene ad affrontare lo studio delle travi piane, travi che non sono soggette a deformazione di tipo torsionale. In tal caso si potrebbe anche considerare, senza problemi, un quadro cinematico di riferimento non limitato ai piccoli spostamenti. Nel caso di travi spaziali, si presta invece ad affrontare lo studio della sola parte flessionale della deformazione. In tal caso l'ipotesi di piccoli spostamenti diventa indispensabile, o comunque di difficoltosa rimozione, per la necessità di separare la deformazione nella parte flessionale e in quella torsionale, agevole solo sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti.

La versione della teoria ristretta ad un legame elastico lineare, alle piccole deformazioni ed alle travi ad asse rettilineo omogenee e a sezioni rette costanti (solido cilindrico) è in accordo con la soluzione flessionale del problema di Saint-Venant. Osserviamo subito che le due teorie si intrecciano senza che l'una sia compresa nell'altra, dato che il problema di Saint-Venant è ristretto a tali assunzioni e quindi, da questo punto di vista, meno generale della teoria della trave inflessa, e nello stesso tempo risulta più generale in quanto è in grado di descrivere anche le parti tagliente e torsionale del legame costitutivo che invece uno schema analogo a quello della trave inflessa non è in grado di descrivere in forma accettabile.

Si conclude osservando che un pregio della teoria delle travi inflesse elastiche lineari è anche quello di mostrare esplicitamente le analogie esistenti tra la deformazione di una trave elastica inflessa ed il moto di un corpo ri-

¹Giacomo [Jakob, Jacob, Jacques] Bernoulli (1654-1705), nato a Basilea. La versione definitiva della teoria della trave inflessa fu da lui pubblicata in "Histoire de l'Académie des Sciences de Paris," 1705.

²Leonardo [Leonhard, Leonard] Eulero [Euler] (1707-1783), nato a Basilea. I suoi principali risultati sullo studio delle travi elastiche sono riportati in appendice al suo libro "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", pubblicato nel 1744, nel quale le soluzioni di svariati problemi sono ottenute sistematicamente con metodi variazionali.

³Daniele [Daniel] Bernoulli (1700-1782), figlio di Giovanni [Johann] Bernoulli (1667-1748), fratello di Giacomo. Daniele propose ad Eulero il problema della determinazione della forma di una trave inflessa con una lettera del 1742.

gido. Risulta allora chiaro perché la flessione di una trave dipende, come si vedrà più avanti, da un *vettore dei momenti statici* e da un *tensore di inerzia*, analogamente al moto di un corpo rigido, da cui la necessità dello sviluppo di una “geometria delle masse” nell’ambito della teoria delle travi inflesse.

3.1 Legame costitutivo nell’intorno di un punto

Al fine di implementare le parti assiale e flessionale del legame costitutivo si suppone innanzitutto che le trasformazioni rigide delle sezioni rette, che come detto descrivono mediamente la cinematica della trave, diano una descrizione sufficientemente accurata delle dilatazioni puntuali delle fibre longitudinali. In secondo luogo si suppone che un elemento di fibra longitudinale si comporti come una barra sottoposta a trazione semplice (fig. 3.1). Questa ipotesi caratterizza dunque il legame costitutivo nell’in-

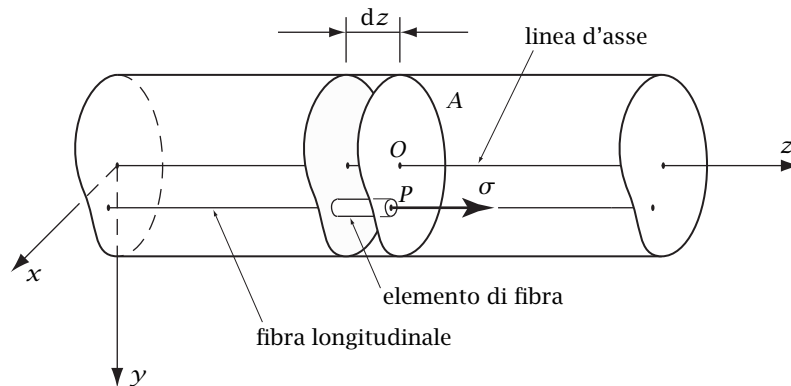


Figura 3.1: Generica fibra longitudinale

torno di un punto per il tramite di un diagramma tensione-dilatazione. La dilatazione è quella, calcolata nel dato punto, della fibra longitudinale passante dal punto stesso mentre la tensione è quella agente, in corrispondenza del punto, sulla giacitura di normale la direzione della fibra stessa. Naturalmente la dilatazione delle fibre longitudinali, così come le corrispondenti tensioni, varieranno in generale sia lungo una data fibra che su una data sezione retta.

Si ricordi che nell’ipotesi di piccoli spostamenti l’equilibrio viene scritto nella configurazione indeformata, nella quale le fibre longitudinali sono sempre ortogonali alla sezione retta. In tale ipotesi la tensione è dunque ortogonale alla sezione retta, e ne consegue che alla dilatazione ϵ di una fibra longitudinale corrisponde una tensione normale σ agente sulla sezione retta in corrispondenza della sua intersezione con la fibra stessa.⁴

Nel caso più generale possibile, la tensione normale agente in un dato punto ad un dato istante dipenderà dalla storia della corrispondente dilatazione fino a quell’istante (*legge di determinismo*). Qui ci si limiterà a considerare due legami costitutivi particolari, quello elastico, e in particolare elastico lineare, e quello elastoplastico. Nel seguito si svilupperà poi in forma completa il solo caso elastico lineare.

3.1.1 Legame costitutivo elastico

Se il materiale è elastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* è univoco e viene seguito sia durante la fase di carico che in quella di scarico (fig. 3.2a). In altri termini ad una data dilatazione viene a corrispondere una ben precisa tensione normale. Dette ϵ la dilatazione, in un dato punto, della fibra longitudinale passante dallo stesso punto e σ la corrispondente tensione normale agente sulla sezione retta nello stesso punto, il più generale legame costitutivo elastico si scriverà pertanto nella forma:

$$\sigma = \sigma(\epsilon). \quad (3.1)$$

Si noti che tale legame rappresenta il comportamento del materiale di cui è composta la trave. Se la trave non è omogenea tale legame varierà da punto a punto.

Se il diagramma è lineare il legame costitutivo (3.1) diventa poi (fig. 3.2b):

$$\sigma = E\epsilon, \quad (3.2)$$

dove il coefficiente di proporzionalità E rappresenta il modulo di Young del dato materiale. Se la trave non è omogenea il modulo di Young può in

⁴Nel caso di *spostamenti finiti*, ovverossia se gli spostamenti non sono piccoli, le tensioni devono considerarsi agenti nella configurazione deformata. Le tensioni sono allora ortogonali alla sezione retta deformata solo se le fibre restano perpendicolari alla sezione retta anche dopo la deformazione. Per la trave che soddisfa il vincolo interno di ortogonalità tra asse e sezioni rette questa condizione è senz’altro vera solo in assenza di deformazione di torsione, come si verifica per esempio nel caso cinematicamente piano.

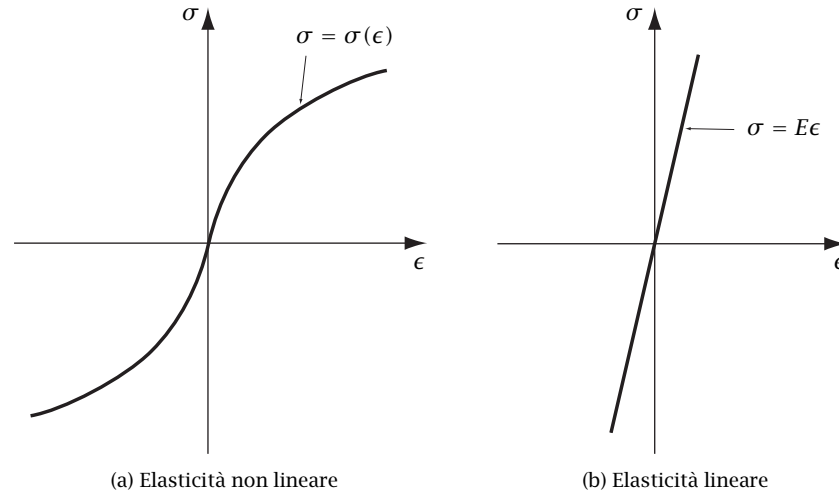


Figura 3.2: Elasticità

generale variare da punto a punto, sia lungo una data fibra che nella sezione retta. Casi tecnicamente importanti di travi non omogenee si hanno, per esempio, nel caso di travi in *cemento armato*, realizzate con una gettata di calcestruzzo di cemento all'interno della quale sono annegate delle barre di acciaio, oppure nel caso di travi *lamine*, composte da strati di diverso materiale. In tutti questi casi il modulo di Young è costante a tratti.

3.1.2 Legame costitutivo elastoplastico

Se il materiale è elastoplastico il diagramma *tensione normale-dilatazione* non è più univoco poiché allo scarico, una volta superata la tensione di snervamento, viene seguito un diverso percorso elastico lineare. Il caso più semplice possibile è quello di un diagramma bilineare, elastico lineare prima e perfettamente plastico dopo lo snervamento, con uguale limite di snervamento a trazione e compressione (fig. 3.3), utilizzato per modellare sia gli acciai per cemento armato che quelli per strutture metalliche.⁵

⁵Al fine di eseguire verifiche agli stati limite gli eurocodici 2 e 3 permettono l'uso di diagrammi bilineari per gli acciai per cemento armato e, rispettivamente, per strutture metalliche. Il limite di snervamento in tali diagrammi è riferito allo snervamento caratteristico

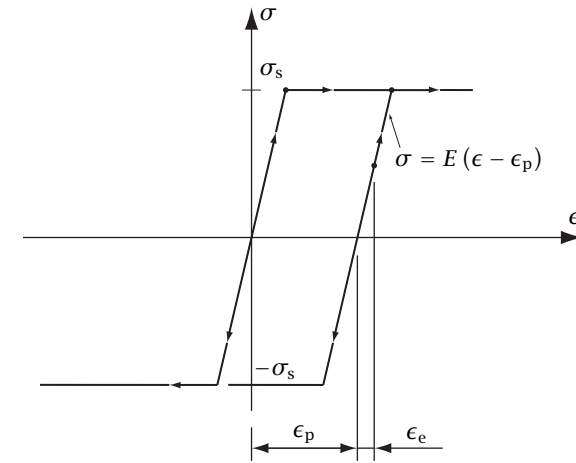


Figura 3.3: Elastoplasticità

Se in un percorso di carico viene superato il limite di snervamento la tensione normale non è più determinata univocamente dal valore attuale della dilatazione della fibra longitudinale, ma viene a dipendere dalla storia della dilatazione stessa precedente l'istante di tempo attuale. Si noti che risulta possibile scaricare una deformazione permanente sviluppata per il superamento del limite di snervamento per esempio a trazione, scaricando prima e ricaricando poi fino a superare il limite di snervamento a compressione.

Le dilatazioni elastica ϵ_e , permanente ϵ_p e totale ϵ sono legate dalla relazione:

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p. \quad (3.3)$$

Ne consegue la validità della seguente relazione elastica lineare allo scarico:

$$\sigma = E (\epsilon - \epsilon_p), \quad (3.4)$$

relazione che coincide con la (3.2) nel caso di provino vergine.

f_{yk} , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo α e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza γ_s : $\sigma_s = \alpha f_{yk} / \gamma_s$. Analogamente a qualunque valore caratteristico, lo *snervamento caratteristico* rappresenta il livello tensionale al disotto del quale ci si aspetta di trovare al più il 5% delle tensioni di snervamento relative a prove di trazione su provini del dato tipo di acciaio.

Un altro esempio di diagramma elastoplastico può essere quello riguardante il calcestruzzo compresso che, allo scopo di coglierne la forte non linearità, può essere modellato con un tratto parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico,⁶ come indicato in fig. 3.4.

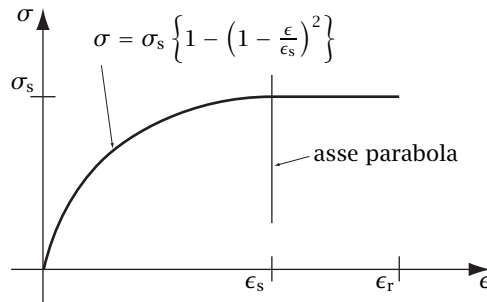


Figura 3.4: Calcestruzzo compresso

Occorre a questo punto precisare che un diagramma del tipo di quello riportato in fig. 3.3 risulta valido se sulla sezione retta non agiscono tensioni tangenziali, ovvero se sono nulle le azioni taglianti e il momento torcente. Nel caso ciò non sia vero il diagramma è ancora valido fino al raggiungimento dello snervamento, quindi in fase elastica. Il livello tensionale che provoca lo snervamento dipende invece dalla contemporanea presenza della tensione normale e di quella tangenziale, così come il comportamento che ne consegue a seguito dello sviluppo delle deformazioni plastiche. Comunque tale dipendenza è spesso trascurabile quando si tratta di tensioni tangenziali dovute ad un'azione tagliante, almeno se il valore di questa azione è contenuto.

⁶L'eurocodice 2, al fine di eseguire verifiche agli stati limite, permette l'uso per il calcestruzzo compresso di un diagramma del tipo di quello indicato in fig. 3.4. Il livello di snervamento σ_s del calcestruzzo compresso, come già per l'acciaio, è riferito allo snervamento caratteristico f_{ck} , eventualmente modificato tramite un opportuno coefficiente moltiplicativo α e opportunamente ridotto tramite un coefficiente di sicurezza γ_c : $\sigma_s = \alpha f_{ck} / \gamma_c$.

3.2 Legame costitutivo assiale-flessionale elastico lineare

Allo scopo di implementare una teoria della trave, occorre trasformare il legame costitutivo locale descritto al paragrafo precedente in un legame costitutivo tra le caratteristiche di sollecitazione e di deformazione della trave. A tal fine occorre innanzitutto inserire la relazione:⁷

$$\epsilon_P = \epsilon + k_x y_P - k_y x_P, \quad (3.5)$$

che lega la dilatazione ϵ_P della fibra longitudinale passante dal generico punto P della sezione retta in funzione della dilatazione ϵ della linea d'asse e della curvatura $\mathbf{k}$ della trave (fig. 3.5) nella opportuna equazione co-

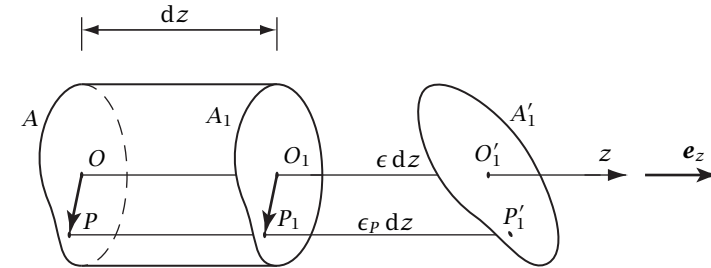


Figura 3.5: Dilatazione delle fibre longitudinali

stitutiva locale, per esempio la (3.2) nel caso della elasticità lineare. L'integrazione sulla sezione retta della tensione normale σ e del suo momento rispetto al polo prescelto permetterà infine di ottenere le cercate equazioni costitutive.

⁷Cfr. la (1.82a), p. 31.

3.2.1 Legame costitutivo assiale

Integrando la tensione normale sulla sezione retta si ottiene la forza normale:

$$N \underline{e}_x = \int_A \sigma \underline{e}_x dA =$$

$$= \varepsilon \underline{e}_x \int_A E dA + \underline{\kappa}_p \times \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA.$$

Utilizzando il linguaggio della geometria delle masse, riferendosi al modulo di Young quale "distribuzione di massa", si pone:

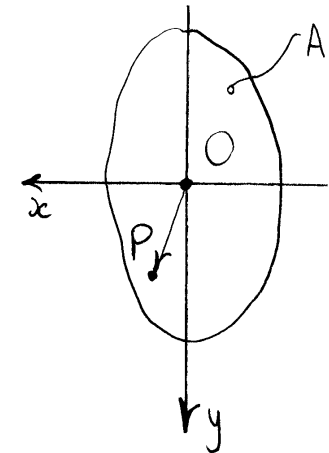
$$M = \int_A E dA, \quad (\text{Massa totale})$$

$$\underline{J}_O = \int_A E (\underline{P} - \underline{O}) dA, \quad (\text{Vettore dei momenti statici})$$

Il baricentro G della sezione retta è poi

definito come quel punto del piano della sezione tale che sia nullo il suo vettore dei momenti statici:

$$\int_A E (\underline{P} - \underline{G}) dA = \underline{0}.$$



Notiamo che al baricentro viene solo chiesto di appartenere al piano della sezione e non alla sezione stessa. Questo è perfettamente coerente poiché la trasformazione rigida della sezione può estendersi a tutto il suo piano.

Se l'asse della trave ci fa coincidere con l'asse dei baricentri si ottiene la seguente semplice espressione per la forza normale:

$$N = M \varepsilon_G$$

dove ε_G rappresenta la dilatazione dell'asse baricentrico. In seguito, salvo avviso contrario, l'asse della trave coinciderà sempre con l'asse dei baricentri.

Nel contesto del particolare legame costitutivo che si sta sviluppando il baricentro assume dunque il significato di centro di flessione e la massa totale quello di rigidità assiale.

Nel caso di travi a forte curvatura, il modulo di Young va diviso per il coefficiente $1+cy$. La massa totale risulta in tal caso:

$$M = \int_A \frac{E}{1+cy} dA.$$

3.2.2 Legame costitutivo flessionale

Il momento flettente di polo il baricentro risulta:

$$\begin{aligned} \underline{M}_f &= \int_A (\underline{P}-\underline{G}) \times (\sigma \underline{e}_z) dA = \\ &= \left(\int_A E (\underline{P}-\underline{G}) dA \right) \times (\varepsilon_G \underline{e}_z) \end{aligned}$$

$$+ \int_A E (\underline{P}-\underline{G}) \times \{ \underline{k}_f \times (\underline{P}-\underline{G}) \} dA.$$

Tenendo conto della proprietà che definisce il baricentro G e sviluppando il doppio prodotto vettoriale si ottiene poi:

$$\begin{aligned} \underline{M}_f &= \int_A E \left\{ (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) dA \right\} \underline{I} + \\ &\quad - (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) \left\{ \underline{k}_f dA \right\} \end{aligned}$$

Introducendo il tensore di inerzia (relativo al baricentro):

$$\underline{J} = \int_A E \left\{ (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) dA \right\} \underline{I} - (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) \left\{ dA \right\}$$

si ottiene infine:

$$\underline{M}_f = \underline{J} \underline{k}_f.$$

Il tensore di inerzia assume quindi il ruolo di tensore di rigidità flessionale.

Nel caso di travi a forte curvatura, il modulo di Young va diviso per il coefficiente $1+cy$ e risulta:

$$\underline{J} = \int_A \frac{E}{1+cy} \left((\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) \underline{I} - (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) \right) dA.$$

3.2.3 Travi omogenee a piccola curvatura

Se la trave è a piccola curvatura ed omogenea nella sezione retta ($E = \text{cost}$) si può scrivere:

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon_G \\ \underline{M}_f = E \underline{J}^{(A)} \underline{\kappa}_f \end{cases},$$

dove ora:

$$A = \int_A dA,$$

rappresenta l'area totale della sezione e

$$\underline{J}^{(A)} = \int_A \left\{ (\underline{P}-\underline{G}) \cdot (\underline{P}-\underline{G}) \underline{I} - (\underline{P}-\underline{G}) \otimes (\underline{P}-\underline{G}) \right\} dA,$$

dipende solo dalla forma della sezione retta e non dal materiale. Si ottiene in tal caso una geometria delle aree.

3.2.4 Travi piane

Se la trave è piana, con coincidenza dei piani di flessione e di sollecitazione, risulta:

$$\begin{cases} \underline{M}_f = M \underline{e}_x, \\ \underline{\kappa}_f = \underline{\kappa} \underline{e}_x, \end{cases}$$

e quindi:

$$M \underline{e}_x = \underline{\kappa} \underline{J} \underline{e}_x \Rightarrow \underline{J} \underline{e}_x = \frac{M}{\underline{\kappa}} \underline{e}_x.$$

Quindi nel caso piano $\underline{e}_x$ rappresenta un autovettore di $\underline{J}$ con autovalore J tale che:

$$J = \frac{M}{\underline{\kappa}}.$$

Risulta quindi:

$$M = J \underline{\kappa}.$$

oppure, nel caso omogeneo:

$$M = E J \underline{\kappa}.$$

La direzione associata ad un autovettore di $\underline{J}$ viene detta direzione principale di inerzia.

◇ ◇ ◇

Legame costitutivo tagliante e torcente.

Si supponga la validità di un legame costitutivo, valido localmente, del tipo:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma}_P.$$

Utilizzando la relazione tra $\underline{\gamma}_P$ e lo scorrimento $\underline{\gamma}$ tra linea d'asse e sezione retta:

$$\underline{\tau} = G \underline{\gamma} + G \Theta \underline{e}_z \times (P - O),$$

e quindi integrando sulla sezione retta si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \int_A \underline{\tau} dA \\ &= \left(\int_A G dA \right) \underline{\gamma} + \Theta \underline{e}_z \times \int_A G (P - O) dA. \end{aligned}$$

Utilizzando ancora il linguaggio della geometria delle masse, riferendosi ora al modulo di elasticità tangenziale G quale "distribuzione di massa", si pone:

$$M = \int_A G dA, \quad (\text{Massa totale})$$

$$\underline{J}_O = \int_A G (P - O) dA, \quad (\text{Vettore dei momenti statici})$$

Il centro di taglio C della sezione retta è poi definito come quel punto del piano della sezione tale che sia nullo il suo vettore dei momenti statici:

$$\int_A G (P - C) dA = \underline{0}.$$

Se il legame costitutivo viene riferito al centro di taglio si ottiene la seguente semplice espressione per la forza di taglio:

$$\underline{T} = M \underline{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \underline{\gamma} = \frac{1}{M} \underline{T}.$$

Il momento torcente di polo il centro di taglio risulta:

$$\begin{aligned}
 M_t \underline{e}_z &= \int_A (\underline{P} - \underline{C}) \times \underline{\tau} dA = \left(\int_A G(\underline{P} - \underline{C}) dA \right) \times \underline{\tau} \\
 &\quad + \Theta \int_A G(\underline{P} - \underline{C}) \times \{ \underline{e}_z \times (\underline{P} - \underline{C}) \} dA \\
 &= \left(\Theta \int_A G(\underline{P} - \underline{C}) \cdot (\underline{P} - \underline{C}) dA \right) \underline{e}_z \\
 &\quad - \Theta \int_A \{ G(\underline{P} - \underline{C}) \cdot \underline{e}_z \} (\underline{P} - \underline{C}) dA = \Theta J_C \underline{e}_z,
 \end{aligned}$$

cioè:

$$M_t = J_C \Theta \quad \Rightarrow \quad \Theta = \frac{M_t}{J_C},$$

dove:

$$J_C = \int_A G(\underline{P} - \underline{C}) \cdot (\underline{P} - \underline{C}) dA,$$

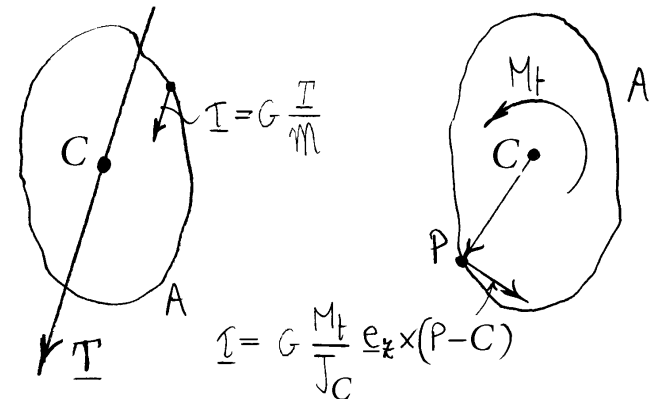
viene detto momento di inerzia polare (di polo il centro di taglio).

Quindi:

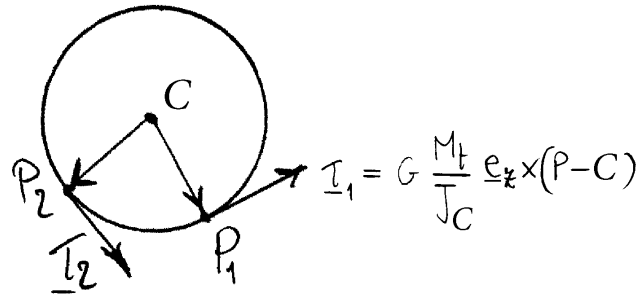
$$\underline{\tau} = G \frac{T}{M} + G \frac{M_t}{J_C} \underline{e}_z \times (\underline{P} - \underline{C}).$$

Si noti che in tal caso il centro di taglio coincide con il baricentro (del modulo di elasticità tangenziale), il fattore torsionale di rigidezza con il momento di inerzia polare rispetto al centro di taglio e infine il tensore di rigidezza tagliante è sferico.

La $\underline{\tau}$ che si è così ottenuta soddisfa le condizioni al contorno solo nel caso di sezione circolare non soggetta a taglio ($T=0$). Infatti, le tensioni tangenziali associate ad un taglio T risultano di direzione costante e quindi non possono essere tangenti ovunque al contorno. La stessa cosa succede per le tensioni tangenziali associate al momento torcente, tensioni che hanno



La direzione ortogonale al vettore posizione $P-C$,
salvo che per la sezione circolare.



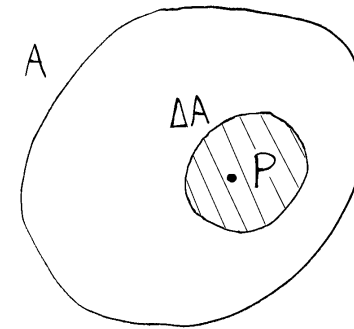
È evidente che il legame costitutivo così ottenuto
non è accettabile,
salvo nel caso della torsione di una sezione circolare.

◇ ◇ ◇

3.3 Geometria delle masse

3.3.1 Masse distribuite su un'area piana

Sia data un'area piana A . Una massa m
distribuita nell'area è una funzione di "insieme"



che ad ogni parte ΔA di A associa uno scalare
 $m(\Delta A)$. La massa per unità di superficie :

$$\mu(P) = \lim_{\Delta A \rightarrow P} \frac{m(\Delta A)}{\Delta A},$$

rappresenta una funzione del punto. La massa

associata all'area ΔA è recuperabile tramite una integrazione:

$$m(\Delta A) = \int_{\Delta A} \mu \, dA \quad .$$

Lo studio del legame costitutivo delle travi inflesse si inquadra in questo contesto "astratto" tradizionale, qualora il modulo di Young E delle fibre longitudinali della trave, definito quindi in tutti i punti di una sezione retta, sia interpretato quale massa per unità di superficie. Le dimensioni di E sono quelle di una forza per unità di superficie: $E \equiv F L^{-2}$. Quindi la massa associata ad un'area ha le dimensioni di una forza.

In conseguenza della derivazione del legame costitutivo delle travi inflesse da una trasformazione rigida

della sezione retta, permane una struttura formale analoga a quella alla base della descrizione del moto rigido. Tuttavia occorre tenere presente che i significati fisici in gioco sono del tutto diversi e che in conseguenza di ciò gli sviluppi nei due casi possono notevolmente divergere.

La massa totale rappresenta la massa associata all'intera area:

$$M = m(A) = \int_A \mu \, dA \quad .$$

3.3.2 Vettore dei momenti statici

Si definisce vettore dei momenti statici rispetto ad un generico punto O del piano il vettore:

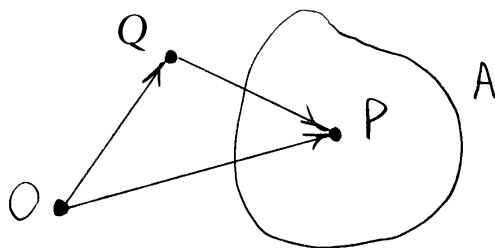
$$\underline{s} = \int_A \mu (P-O) dA.$$

Si è così costruito un campo vettoriale definito nel piano della sezione. Se O e Q sono due punti del piano, dalla identità vettoriale:

$$P-Q = (P-O) - (Q-O),$$

si trae la relazione:

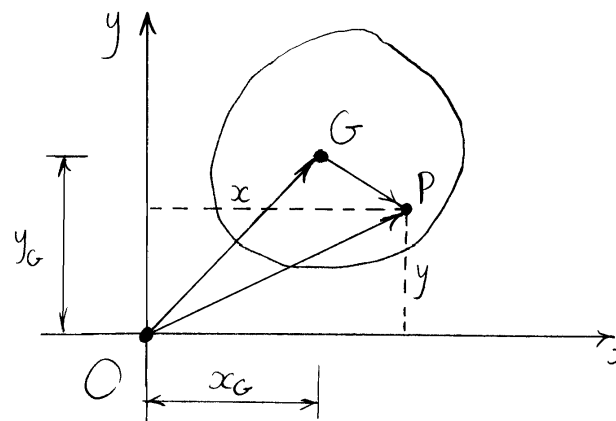
$$\underline{s}(Q) = \underline{s}(O) - M(Q-O),$$



che descrive il campo vettoriale noto il suo valore in un punto O . Se $M \neq 0$ (come nel caso di un sistema di masse tutte positive) il vettore dei momenti statici si annulla in uno e un solo punto del piano G , detto baricentro del sistema di masse. Posto $Q \equiv G$, dalla condizione $\underline{s}(G) = \underline{0}$ si trae:

$$G-O = \frac{1}{M} \underline{s}(O).$$

In componenti in un sistema cartesiano



ortogonale Oxy risulta:

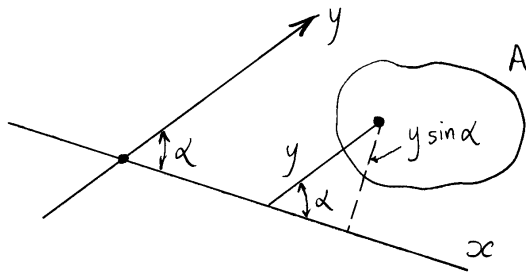
$$\{P-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{G-O\} \equiv \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix}.$$

Se ne deduce:

$$\{\bar{s}(O)\} = \begin{Bmatrix} \int_A \mu x dA \\ \int_A \mu y dA \end{Bmatrix}.$$

Momenti statici

Data una retta x non orientata nel piano delle masse ed una associata retta orientata y , non



parallela a x , si definisce momento statico del sistema di masse rispetto all'asse x la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per la

distanza con segno da x , valutata nella direzione di y :

$$S_x = \int_A \mu y dA.$$

Si dice che la retta y orienta esternamente la retta x , e, in contrapposizione, che la retta y e' orientata internamente. Se con $\bar{S}_x$ indichiamo il momento statico ottenuto valutando le distanze nella direzione ortogonale ad x , sempre con l'orientazione esterna indotta da y , si ottiene:

$$\bar{S}_x = \int_A \mu y \sin \alpha dA = S_x \sin \alpha.$$

In un sistema cartesiano ortogonale Oxy , gli assi cartesiani si orientano esternamente vicendevolmente e i relativi momenti statici risultano:

$$\begin{cases} S_x = \int_A \mu y dA \\ S_y = \int_A \mu x dA \end{cases},$$

da cui l'interpretazione delle componenti del vettore dei momenti statici:

$$\{\underline{s}\} \equiv \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix}.$$

Le coordinate del baricentro risultano dunque:

$$\begin{cases} x_G = \frac{S_y}{M} \\ y_G = \frac{S_x}{M} \end{cases}.$$

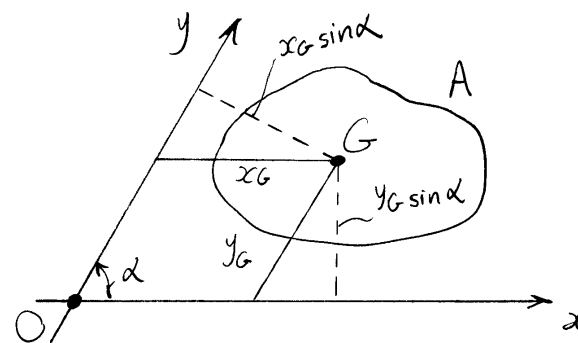
Queste relazioni restano valide anche in un sistema di riferimento obliquo. Infatti in tal caso risulta:

$$y_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_x}{M} = \frac{S_x \sin \alpha}{M},$$

e analogamente:

$$x_G \sin \alpha = \frac{\bar{S}_y}{M} = \frac{S_y \sin \alpha}{M},$$

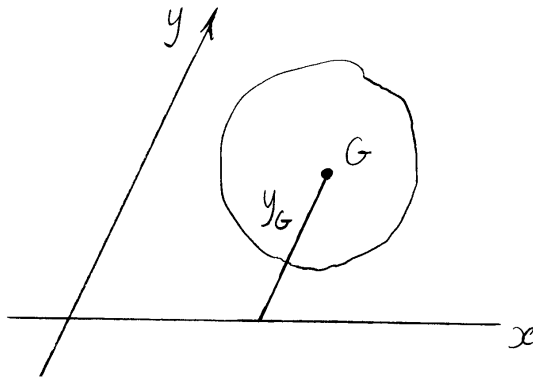
dove, ancora, $\bar{S}_x$ e $\bar{S}_y$ sono i momenti statici valutati con distanze ortogonali a x e y rispettivamente.



Proprietà del baricentro

Ricavando i momenti statici rispetto agli assi in funzione delle coordinate del baricentro si ottiene il teorema di Varignon, che afferma:

Nota il baricentro, e quindi nota la sua distanza da una qualunque retta del piano, per es. la

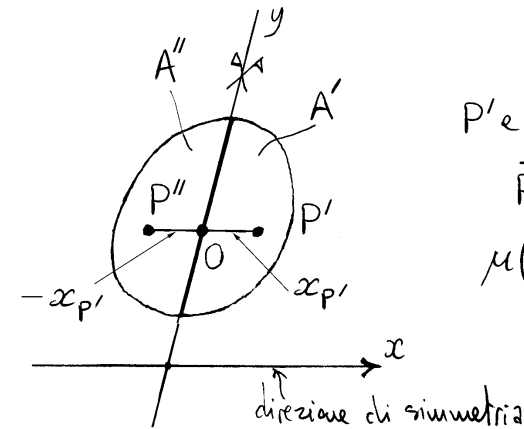


retta x, il momento statico rispetto a tale retta, orientata esternamente da una retta y, si ottiene moltiplicando la massa totale per la distanza dotata del segno indotto da y:

$$S_x = M y_G.$$

E' evidente da tale risultato che il momento statico si annulla in corrispondenza e solo in corrispondenza delle rette baricentriche, e questo indipendentemente dalla direzione rispetto alla quale sono valutate le distanze.

Da ciò consegue che se il sistema di masse possiede un asse di simmetria (anche obliqua) allora tale asse contiene il baricentro. Infatti, sia y un asse di simmetria dell'area piana A e sia x un asse avente la direzione di simmetria.



P' e P'' simmetrici:

$$\overline{P'O} = \overline{P''O}$$

$$\mu(P') = \mu(P'')$$

L'asse y divide l'area in due parti A' e A'' tali che:

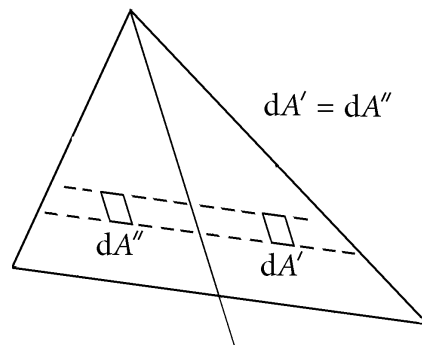
$$\int_{A'} \mu x dA = - \int_{A''} \mu x dA,$$

poichè ad ogni punto P' in A' avente distanza con segno $x_{P'}$ da y e massa μ' , corrisponde il punto simmetrico

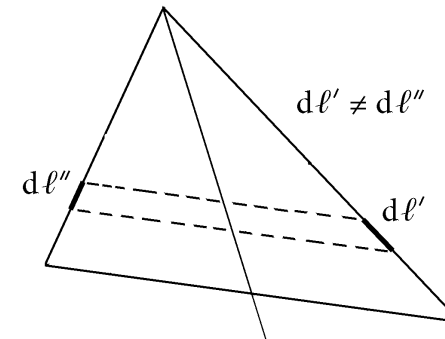
co P'' in A'' avente stessa massa e distanza con segno opposto. Risulta quindi:

$$S_y = \int_{A'} \mu x dA + \int_{A''} \mu x dA = 0.$$

Se la sezione non è omogenea occorre che in posizione simmetrica ci sia la stessa massa elementare, ovvero sia in posizione simmetrica devono essere uguali il prodotto della distribuzione di massa per la misura dell'elemento geometrico. Se la sezione è omogenea occorre che in posizione simmetrica ci siano elementi geometrici di uguale misura. In quest'ultimo caso è quello che succede in un generico triangolo rispetto ad una mediana. Ma se si considera una sezione sottile di linea media triangolare, con lo

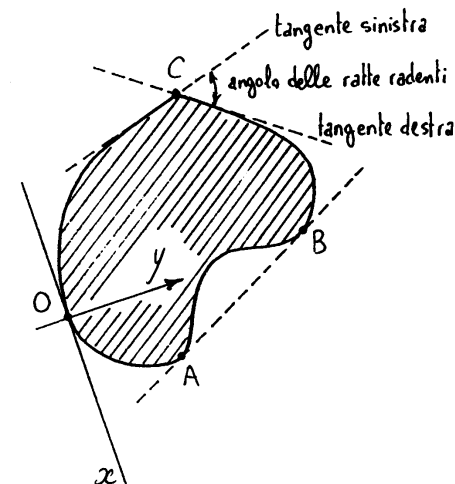


spessore concentrato sulla linea media, gli elementi di linea media in posizione simmetrica rispetto ad una mediana non hanno in generale la stessa misura. Se allora lo spessore è costante la sezione sottile non è in generale simmetrica rispetto ad una mediana. Questo è in accordo col fatto che se la sezione sottile omogenea la si considera come area, per avere simmetria rispetto alla mediana occorre che gli spessori siano uguali in posizione simmetrica ma valutati nella direzione della simmetria. Questo comporta che in generale, se c'è simmetria, gli spessori ortogonali alla linea media in posizione simmetrica non sono uguali tra loro.



Vale infine la proprietà: se le masse sono tutte positive e non allineate allora il baricentro è interno all'involuppo delle rette radenti, ovvero sia di quelle rette che toccano la figura senza tagliarla.

Dimostrazione. Infatti data una qualunque retta radente x orientata esternamente da una retta y' entrante nel semipiano contenente le masse risulta $S_x > 0$ e dunque $y_G = \frac{S_x}{M} > 0$. Quindi il baricentro si trova, rispetto all'asse

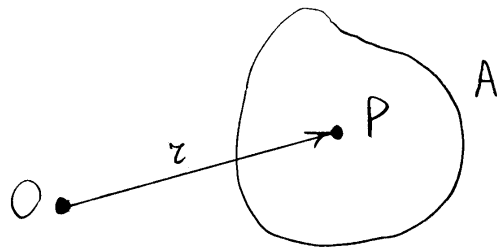


x , dalla parte delle masse. Poiché questo deve valere per ogni retta radente, il baricentro è interno al loro involuppo, come volevasi dimostrare. ■

3.3.3 Tensore di inerzia

Si definisce tensore di inerzia, relativo ad un generico punto O del piano, il seguente tensore doppio:

$$\underline{\underline{J}} = \int_A \mu \{ (P-O) \cdot (P-O) \underline{\underline{I}} - (P-O) \otimes (P-O) \} dA .$$



Si definiscono poi, relativamente allo stesso punto O del piano, il tensore di Eulero:

$$\underline{\underline{y}} = \int_A \mu (P-O) \otimes (P-O) dA ,$$

e il momento di inerzia polare:

$$J_O = \int_A \mu (P-O) \cdot (P-O) dA = \int_A \mu r^2 dA ,$$

dove r è la distanza del generico punto dal polo O .

Con queste convenzioni il tensore di inerzia risulta:

$$\underline{\underline{J}} = J_O \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{y}} .$$

In componenti, in un sistema cartesiano ortogonale Oxy , risulta:

$$\{ P-O \} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} ,$$

$$[(P-O) \otimes (P-O)] = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} ,$$

$$(P-O) \cdot (P-O) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = x^2 + y^2 ,$$

$$[(P-O) \cdot (P-O) \underline{\underline{I}}] = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} .$$

Si ottiene quindi:

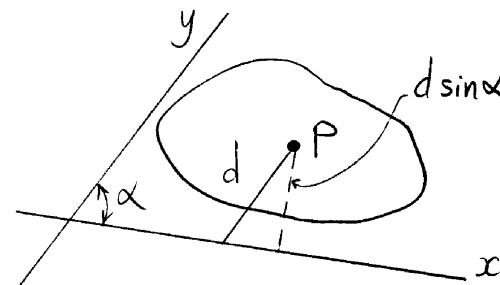
$$[\underline{I}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu y^2 dA & -\int_A \mu xy dA \\ -\int_A \mu xy dA & \int_A \mu x^2 dA \end{bmatrix},$$

$$[\underline{y}] = \begin{bmatrix} \int_A \mu x^2 dA & \int_A \mu xy dA \\ \int_A \mu xy dA & \int_A \mu y^2 dA \end{bmatrix},$$

$$J_0 = \int_A \mu (x^2 + y^2) dA.$$

Momenti di inerzia

Data una retta non orientata x nel piano delle masse ed una direzione y non parallela ad x si definisce momento di inerzia del sistema di masse rispetto all'asse x la somma delle singole masse moltiplicate ognuna per il quadrato della



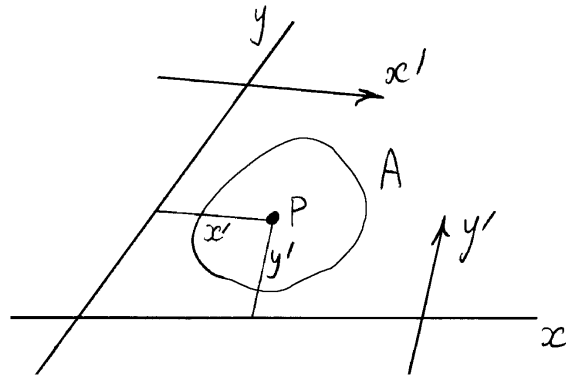
distanza dall'asse x valutata nella direzione y :

$$J_x = \int_A \mu d^2 dA.$$

Se con $\bar{J}_x$ si indica il momento di inerzia che si ottiene valutando le distanze nella direzione ortogonale ad x si ottiene poi:

$$\bar{J}_x = \int_A \mu (d \sin \alpha)^2 dA = J_x \sin^2 \alpha.$$

Analogamente, dati due assi x e y orientati esternamente dalle rette orientate y' e x' rispettivamente, si definisce momento centrifugo del sistema di masse rispetto agli assi x e y la



somma delle singole masse moltiplicate ognuna per le distanze dagli assi x e y valutate, in segno, nella direzione di y' e x' rispettivamente:

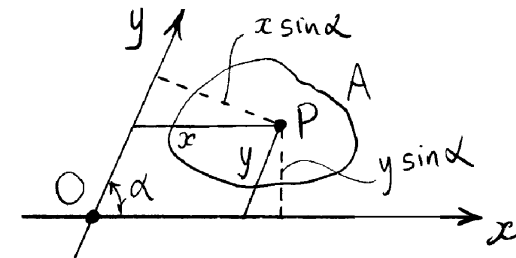
$$I_{xy} = \int_A \mu x' y' dA.$$

Dato un sistema cartesiano Oxy , in generale obliquo, ciascuno degli assi orienta esternamente l'altro. Valutando il momento centrifugo legato a tali orientazioni si ottiene:

$$I_{xy} = \int_A \mu xy dA.$$

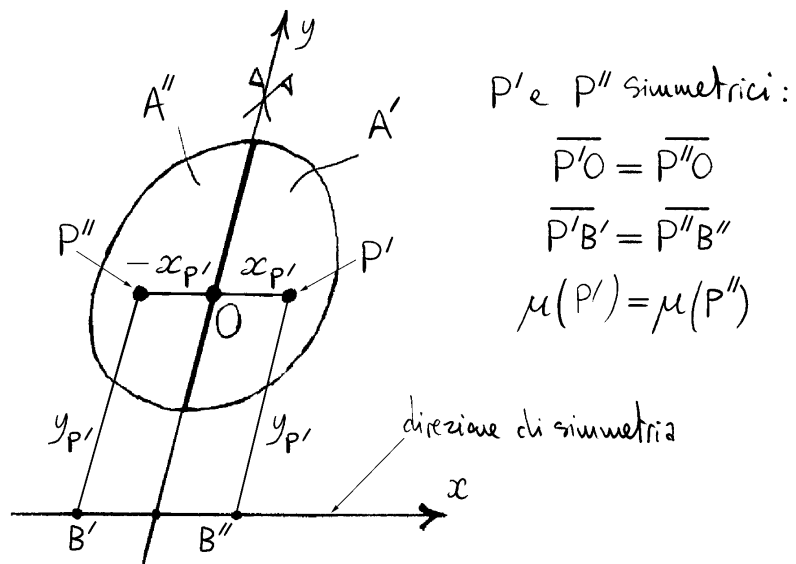
Valutando poi il momento centrifugo $\bar{I}_{xy}$ legato alle direzioni ortogonali agli assi x e y , con le orientazioni indotte da tali assi, si ha:

$$\bar{I}_{xy} = \int_A \mu (x \sin \alpha) (y \sin \alpha) dA = I_{xy} \sin^2 \alpha.$$



Se la sezione possiede un asse di simmetria anche obliquo, il momento centrifugo rispetto all'asse di simmetria e ad un qualunque asse avente la direzione della simmetria e' nullo.

Infatti sia y un asse di simmetria dell'area piana A e sia x un asse avente la direzione di simmetria e si considerino le due aree A' e A'' in cui l'area A e' divisa dall'asse y . Poiche' ad ogni punto P' di A'

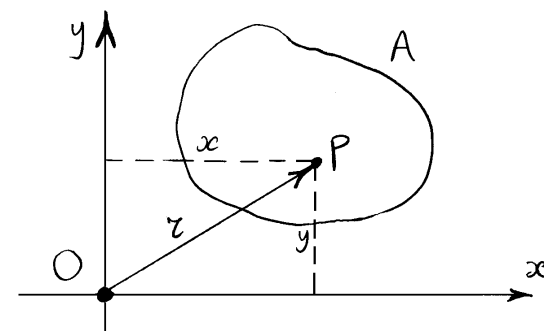


corrisponde il punto simmetrico P'' avente stessa massa, uguale distanza con segno dall'asse x e distanza con segno opposta dall'asse y risulta:

$$\int_{A''} \mu xy dA = - \int_{A'} \mu xy dA,$$

da cui segue immediatamente che $J_{xy} = 0$.

Cio' premesso, le rappresentazioni dei tensori di inerzia $\underline{J}$ e di Eulero $\underline{y}$ e del momento di inerzia



polare J_0 in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy diventano:

$$[\underline{J}] \equiv \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix},$$

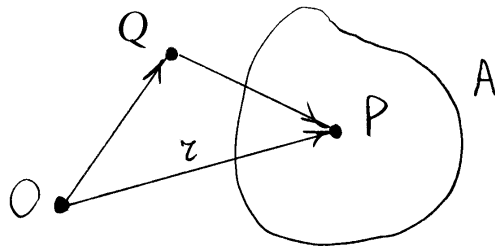
$$[\underline{y}] \equiv \begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix},$$

$$J_0 = J_x + J_y,$$

dove i momenti di inerzia J_x e J_y e il momento centrifugo J_{xy} sono relativi agli assi coordinati.

Formule di trasposizione o del trasporto (Teorema di Huyghens-Steiner)

Il tensore di inerzia $\underline{J}$ e il tensore di Eulero $\underline{y}$ costituiscono due campi tensoriali definiti in tutti i punti del piano delle masse.



Se O e Q sono due punti del piano, dalla identità vettoriale:

$$\mathbf{P} - \mathbf{O} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{O}),$$

risulta :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{P} - \mathbf{O}) &= (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \\ &+ (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{P} - \mathbf{Q}), \end{aligned}$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} \underline{y}(\mathbf{O}) &= \underline{y}(\mathbf{Q}) + M(\mathbf{Q} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + \\ &+ \underline{s}(\mathbf{Q}) \otimes (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) + (\mathbf{Q} - \mathbf{O}) \otimes \underline{s}(\mathbf{Q}). \end{aligned}$$

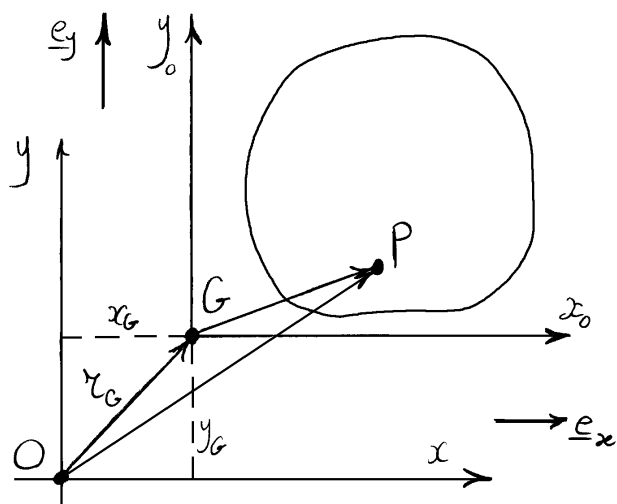
In particolare, se si fa coincidere il punto Q con il baricentro G , si ottiene:

$$\underline{y}(\mathbf{O}) = \underline{y}(\mathbf{G}) + M(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \otimes (\mathbf{G} - \mathbf{O}),$$

poiché $\underline{s}(\mathbf{G}) = \underline{0}$.

Noti i momenti d'inerzia J_{x_0}, J_{y_0} e il momento centrifugo $J_{x_0 y_0}$ relativi ad una coppia $G x_0 y_0$ di assi baricentrici, componenti del tensore di Eulero $\underline{y}(\mathbf{G})$, e' quindi possibile determinare i momenti J_x, J_y e J_{xy} relativamente ad una coppia di assi Oxy paralleli ai precedenti, componenti del tensore di Eulero $\underline{y}(\mathbf{O})$. A tal fine basta mettere in componenti la relazione precedente, tenendo conto che:

$$\{(\mathbf{G} - \mathbf{O})\} = \begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \end{Bmatrix},$$



$$[(G-O) \otimes (G-O)] = \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix},$$

dove x_G e y_G sono le coordinate del baricentro nel sistema non baricentrico Oxy , risulta:

$$\begin{bmatrix} J_y & J_{xy} \\ J_{xy} & J_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{y_0} & J_{x_0 y_0} \\ J_{x_0 y_0} & J_{x_0} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix}.$$

Si ottengono così le formule di trasposizione per i momenti di inerzia e centrifugo:

$$\begin{cases} J_x = J_{x_0} + M y_G^2 \\ J_y = J_{y_0} + M x_G^2 \\ J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G \end{cases}.$$

Da queste formule è evidente che in un fascio di rette parallele il minimo momento di inerzia si ha rispetto all'asse baricentrico, almeno nel caso di sistemi di masse positive.

Sommando le due formule di trasposizione relative ai momenti di inerzia si ottiene la formula di trasposizione per il momento polare:

$$J_0 = J_G + M r_G^2,$$

dove $r_G^2 = x_G^2 + y_G^2$ è il quadrato della distanza del punto O dal baricentro e dove si è tenuto conto che

$$J_0 = J_x + J_y \quad \text{e} \quad J_G = J_{x_0} + J_{y_0}.$$

Direzioni e momenti principali di inerzia

Le direzioni principali ξ e η del tensore di inerzia sono dette *direzioni principali di inerzia*, il sistema principale $O\xi\eta$ è detto *sistema principale di inerzia*, mentre i valori principali di inerzia coincidono con i momenti di inerzia rispetto agli assi principali J_ξ e J_η , che per tale motivo vengono detti *momenti principali di inerzia*. Nel sistema principale di inerzia la rappresentazione del momento di inerzia polare J_O e dei tensori di inerzia $\mathbf{J}$ e di Eulero $\mathcal{J}$ risultano:

$$J_O = J_\xi + J_\eta, \quad [\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{bmatrix}, \quad [\mathcal{J}] = \begin{bmatrix} J_\eta & 0 \\ 0 & J_\xi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

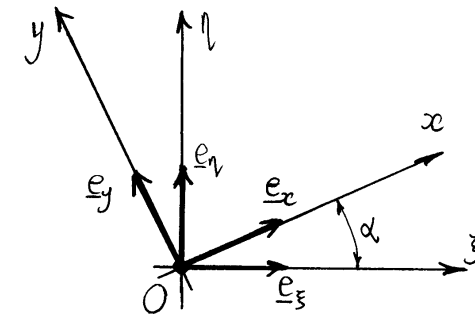
Si noti che nel caso di un sistema di masse positive i momenti principali J_ξ e J_η sono entrambi positivi e il determinante del tensore di inerzia $\mathbf{J}$ è quindi positivo:

$$\det \mathbf{J} = J_\xi J_\eta > 0.$$

Ne consegue che in tal caso il tensore di inerzia $\mathbf{J}$ è simmetrico e definito positivo, in accordo con l'analoga richiesta per la matrice di elasticità.

Formule di rotazione

Siano $O\xi\eta$ e Oxy rispettivamente il sistema principale e un generico sistema di riferimento, entrambi di centro O .



Noti i momenti principali J_ξ e J_η e l'angolo α che l'asse x forma con l'asse ξ , positivo se antiorario, le formule di rotazione forniscono in tal caso i momenti di inerzia J_x e J_y e il momento centrifugo J_{xy} in funzione dell'angolo α :

$$\begin{cases} J_x = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \sin^2 \alpha \\ J_y = J_\xi \sin^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \alpha \\ J_{xy} = (J_\xi - J_\eta) \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}.$$

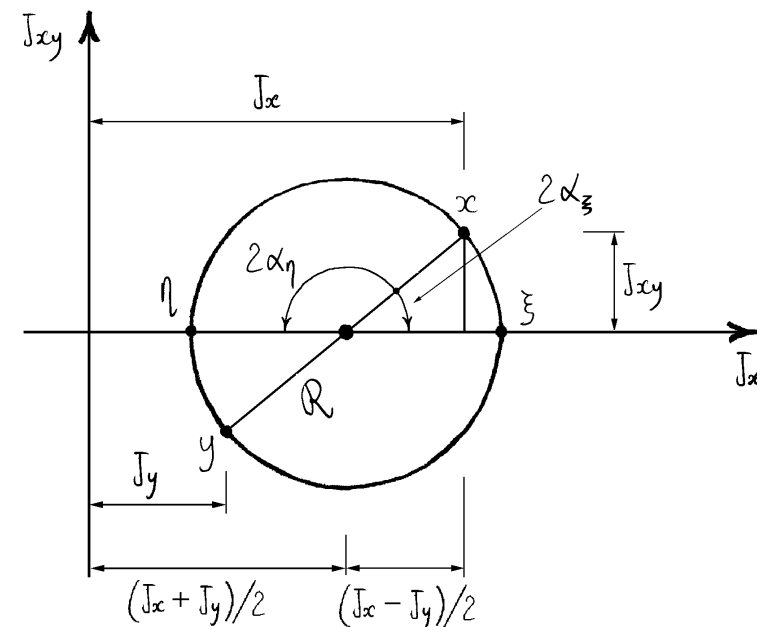
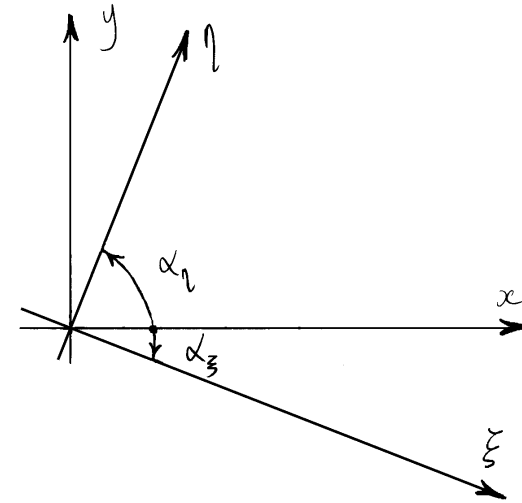
Circonferenza di Mohr

Per costruire la circonferenza a partire dai momenti di inerzia J_x e J_y e dal momento centrifugo J_{xy} relativi ad un generico sistema Oxy occorre considerare che il punto x è individuato dalla coppia (J_x, J_{xy}) mentre il punto y dalla coppia $(J_y, -J_{xy})$.

Unendo i due punti si ottiene un diametro, la sua intersezione con l'asse delle ascisse determina il centro e infine l'intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse individua i punti ξ e η corrispondenti degli assi principali. Tenendo poi conto che le rotazioni nel piano delle masse sono concordi in segno e pari alla metà di quelle nel piano di Mohr, è possibile individuare le direzioni principali ξ e η a partire dagli assi x e y .

Dalla circonferenza si ottiene inoltre che:

$$\begin{cases} R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \\ c = \frac{J_x + J_y}{2} \end{cases},$$



e si riottengono i momenti principali di inerzia:

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = c \pm R .$$

Sempre dalla circonferenza si ottiene infine che :

$$\tan 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} ,$$

dove α_0 indica uno qualsiasi dei due angoli che individuano le direzioni principali di inerzia.

Si noti che la circonferenza di Mohr associata ad un tensore di inerzia è sempre situata dalla parte positiva dell'asse dei momenti di inerzia, essendo questi sempre positivi.

Raggi di inerzia

Un momento di inerzia J_x , valutato rispetto ad un generico asse x , ha le dimensioni di una massa per una lunghezza al quadrato. Se lo si divide per la massa totale e si estrae la radice quadrata si ottiene una quantità omogenea ad una lunghezza che prende il

nome di raggio di inerzia (relativo all'asse x):

$$l_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} .$$

Il significato fisico di raggio di inerzia l_x è quello di distanza dall'asse x a cui occorre concentrare la massa totale M per ottenere lo stesso momento di inerzia rispetto all'asse x .

Dividendo le due formule di trasposizione e le due formule di rotazione relative ai momenti di inerzia per la massa totale M si ottengono le analoghe formule di trasposizione:

$$\begin{cases} l_x^2 = l_{x_0}^2 + y_G^2 \\ l_y^2 = l_{y_0}^2 + x_G^2 \end{cases} .$$

e di rotazione:

$$\begin{cases} l_x^2 = l_{\xi}^2 \cos^2 \alpha + l_{\eta}^2 \sin^2 \alpha \\ l_y^2 = l_{\xi}^2 \sin^2 \alpha + l_{\eta}^2 \cos^2 \alpha \end{cases} .$$

per i raggi di inerzia.

Ellisse centrale di inerzia (o ellisse di Culmann)

L'ellisse centrale di inerzia o ellisse di Culmann è la curva di equazione:

$$\mathcal{M} (P-G) \cdot \underline{Y}^{-1} (P-G) = 1,$$

dove $\underline{Y}^{-1}$ è l'inverso del tensore di Eulero relativo al baricentro.

Infatti, in componenti nel sistema principale Gxy risulta:

$$[\underline{Y}^{-1}] \equiv \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix}, \quad \{P-G\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix},$$

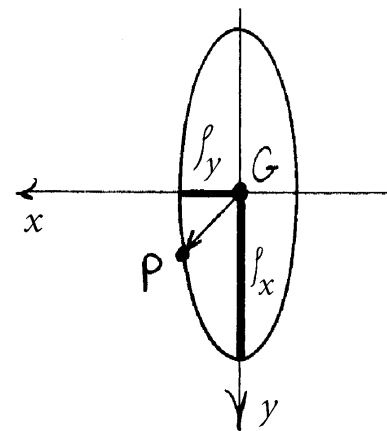
e l'equazione diventa:

$$\mathcal{M} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/J_y & 0 \\ 0 & 1/J_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 1.$$

Poiché $\mathcal{M}/J_y = 1/\rho_y^2$ e $\mathcal{M}/J_x = 1/\rho_x^2$ si ottiene infine:

$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1.$$

Tale relazione rappresenta l'equazione di un'ellisse, che ha quali semidiametri ρ_y lungo l'asse x e ρ_x lungo l'asse y .

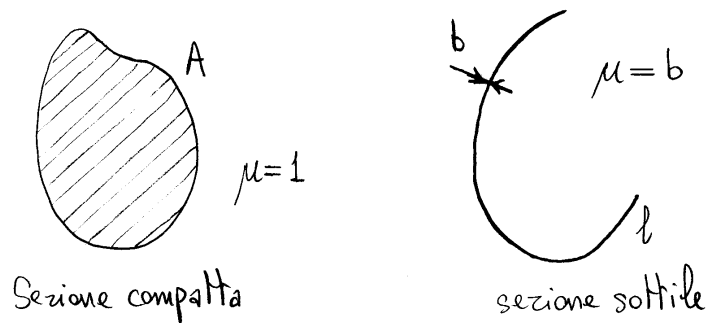


Occorre prestare attenzione al fatto che il raggio di inerzia ρ_x rispetto all'asse x è calcolato con le distanze valutate nella direzione dell'asse y . Coerentemente con tale circostanza ρ_x coincide con il semidiametro lungo l'asse y . Un'analoga considerazione vale per il raggio di inerzia ρ_y rispetto all'asse y .

3.4 Sezioni omogenee

Nel seguito si considerano delle sezioni omogenee. Questo significa che i calcoli vengono fatti a meno del modulo di Young, che nel nostro caso rappresenta la distribuzione di massa. In definitiva si considera una "geometria delle aree", in cui la "massa" è costituita dalla stessa area e la distribuzione di massa è adimensionale e vale 1. Ne risulta che i momenti statici hanno dimensione L^3 e i momenti di inerzia, centrifughi e polari L^4 .

Nel caso delle sezioni sottili la lunghezza della generica corda si concentra, approssimativamente, sulla



linea media. Ne risulta che tale caso viene studiato come quello di una massa distribuita su di una linea piana l con distribuzione di massa pari allo spessore b . Quindi la distribuzione di massa, in tal caso su una linea, ha la dimensione di una lunghezza.

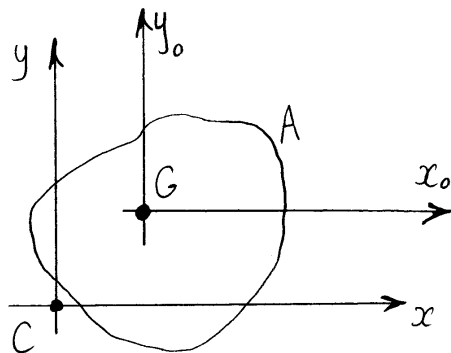
Scopo dello studio di una sezione è innanzitutto quello della determinazione del baricentro, del sistema principale di inerzia baricentrico e del calcolo dei momenti principali di inerzia baricentrici.

La conoscenza del baricentro e della massa totale permette di determinare il momento statico rispetto ad un qualunque asse, grazie al teorema di Varignon. La conoscenza del sistema e dei momenti principali di inerzia permette di determinare i momenti di inerzia e centrifughi di coppie di assi ortogonali generici, grazie alle formule di rotazione e del trasporto.

Nell'applicare le formule del trasporto si tenga conto che il momento di inerzia diminuisce se da

assi non baricentrici si passa ad assi baricentrici mentre aumenta nel caso contrario. Si tenga poi conto che è indifferente riferirsi alle coordinate del baricentro (x_G, y_G) nel sistema Cxy non baricentrico oppure alle coordinate (x_c, y_c) del punto C nel sistema baricentrico Gx_0y_0 , poiché tali coordinate sono uguali in modulo e opposte in segno e conducono pertanto agli stessi risultati:

$$x_G^2 = x_c^2, \quad y_G^2 = y_c^2, \quad x_G y_G = x_c y_c.$$



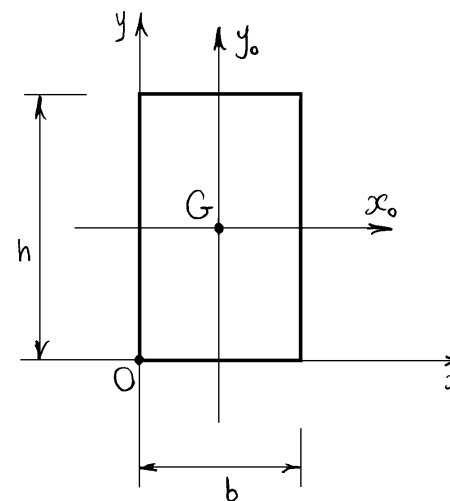
3.4.1 Sezioni tipiche

Rettangolo

Un rettangolo ha due assi di simmetria. Il baricentro coincide con la loro intersezione e i due assi sono principali di inerzia. Se x_0 e y_0 rappresentano gli assi principali di inerzia si ha quindi:

$$J_{x_0 y_0} = 0.$$

Si calcoli innanzitutto il momento di inerzia rispet-



$$A = bh$$

$$x_G = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{y_0} = \frac{b^3h}{12}$$

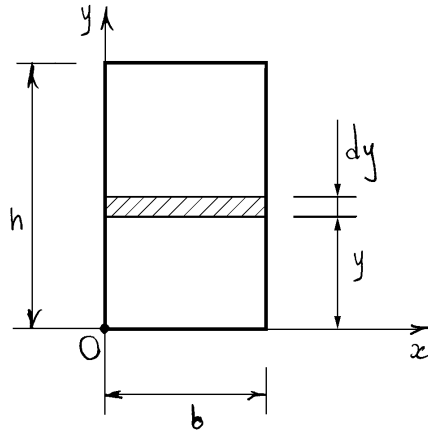
$$J_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_y = \frac{b^3h}{3}$$

$$J_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

to ad una base :

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h b y^2 dy = \frac{b h^3}{3} .$$



Utilizzando le formule del trasporto e' poi possibile calcolare il momento principale di inerzia J_{x_0} e il momento centrifugo J_{xy} rispetto alle basi:

$$J_{x_0} = \frac{b h^3}{3} - (b h) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{b h^3}{12} ,$$

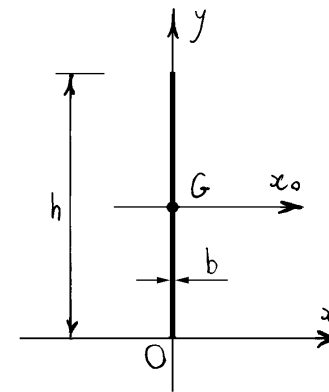
$$J_{xy} = 0 + (b h) \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4} .$$

Invertendo infine il ruolo di base e altezza si hanno le analoghe formule per J_y e J_{y_0} :

$$J_y = \frac{b^3 h}{3} , \quad J_{y_0} = \frac{b^3 h}{12} .$$

Rettangolo sottile

Nel caso di un rettangolo sottile, il momento di inerzia J_y , relativo all'asse di simmetria che contiene la linea media, e' nullo, se si concentra lo spessore lungo



$$A = b h \quad J_{x_0} = \frac{b h^3}{12}$$

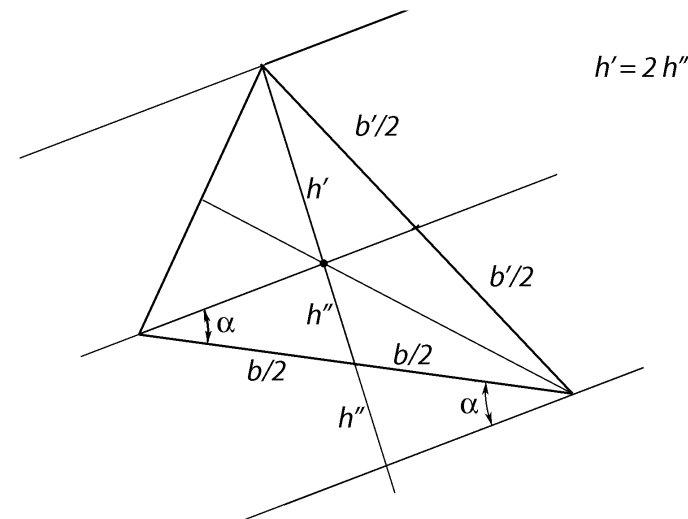
$$y_G = \frac{h}{2} \quad J_y = 0$$

$$J_x = \frac{b h^3}{3}$$

la linea media. E' chiaro che per un effettivo rettangolo sottile la quantità $b^3h/12$, anche se piccola, e' l'unica che contribuisce al momento d'inerzia J_y . In tal caso si potra' ritenere $J_y = 0$ solo se gli effetti flessionali che ne dipendono sono trascurabili. Se invece il rettangolo sottile fa parte di una sezione sottile complessa la quantità $b^3h/12$ e' solo una delle tante che contribuisce al calcolo delle quantità inerziali e come tale e' trascurabile se $b \ll h$, indipendentemente dagli effetti che tale quantità avrebbe per il singolo rettangolo.

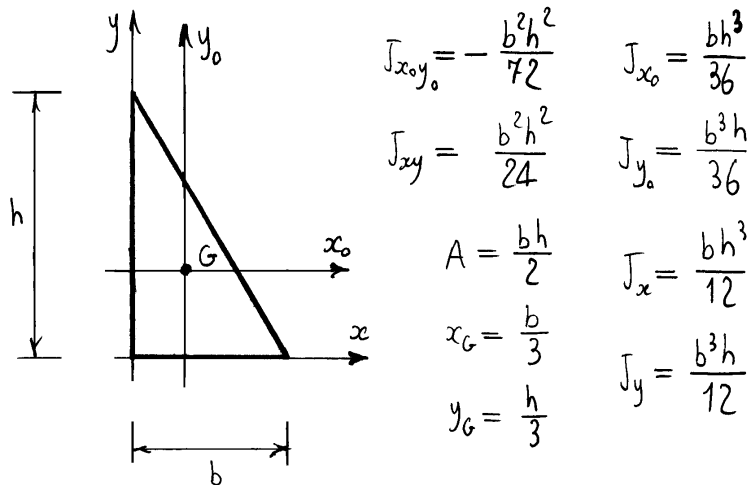
Triangolo rettangolo

Poiche' le mediane di un triangolo sono assi di simmetria obliqua, nel loro punto di incontro si trova il baricentro. La mediana viene divisa nelle proporzioni $1/3$ e $2/3$, come si può dedurre dallo schema seguente.



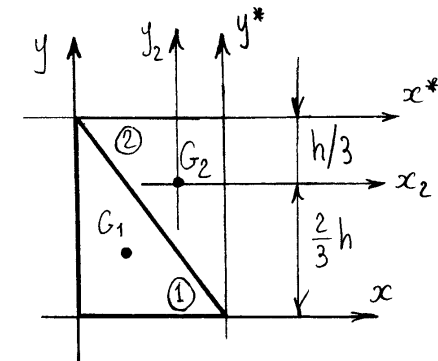
Ne consegue che nel sistema di riferimento Oxy individuato dalle basi, le coordinate del baricentro valgono:

$$x_G = \frac{b}{3} \quad , \quad y_G = \frac{h}{3} \quad .$$



Si tenga ora conto che dalla somma di due triangoli rettangoli di uguali dimensioni si ottiene un rettangolo di uguale base e altezza. Con le convenzioni di figura, si ha:

$$I_x^{①} = I_{x^*}^{②} \quad , \quad I_{xy}^{①} = I_{x^* y^*}^{②} \quad .$$



Tenendo allora conto che le quantità relative al rettangolo, già note, possono calcolarsi sommando i contributi dovuti ai due triangoli si ha:

$$\begin{aligned}
 \frac{bh^3}{3} &= 2I_x - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow I_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) bh^3 = \frac{bh^3}{12} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{b^2 h^2}{4} &= 2I_{xy} - \left(\frac{bh}{2}\right)\frac{b}{3}\frac{h}{3} + \left(\frac{bh}{2}\right)\frac{2}{3}b\frac{2}{3}h \Rightarrow \\
 \Rightarrow I_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{4}{18} \right) b^2 h^2 = \frac{b^2 h^2}{24} ,
 \end{aligned}$$

dove il trasporto del contributo del triangolo ② dagli assi x^* e y^* a quelli x e y è stato fatto per il tramite degli assi baricentrici x_2 e y_2 del triangolo ②.

Utilizzando le formule del trasporto è poi possibile calcolare i momenti J_{x_0} e $J_{x_0 y_0}$ relativi ad assi baricentrici:

$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36},$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{b^2 h^2}{24} - \left(\frac{bh}{2}\right)\frac{b}{3}\frac{h}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Poiché $J_{x_0 y_0} \neq 0$, gli assi x_0 e y_0 non sono principali di inerzia.

Infine, i momenti J_y e J_{y_0} si ottengono invertendo il ruolo di base e altezza:

$$J_y = \frac{b^3 h}{12}, \quad J_{y_0} = \frac{b^3 h}{36}.$$

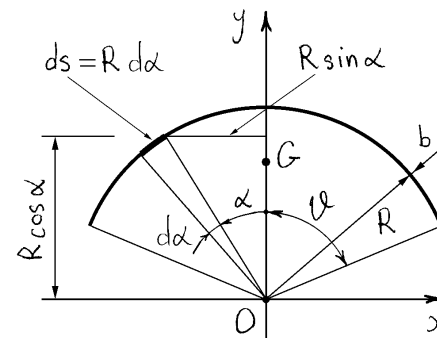
Arco circolare sottile

L'arco circolare sottile possiede un asse di simmetria che contiene quindi il baricentro ed è principale di inerzia. Per calcolare la posizione del baricentro si consideri il sistema di riferimento Oxy , con y coincidente con l'asse di simmetria e il punto O con il centro dell'arco. Detta ϑ la semiapertura dell'arco, risulta:

$$A = 2bR\vartheta$$

$$S_x = 2 \int_0^\vartheta (b ds) R \cos \alpha =$$

$$2 \int_0^\vartheta b R^2 \cos \alpha d\alpha = 2bR^2 \sin \vartheta$$



$$A = 2\vartheta R b$$

$$y_G = R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

$$J_x = bR^3 \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

$$J_y = bR^3 \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

e dunque:

$$y_G = \frac{S_x}{A} = R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}.$$

Poiché è sempre $\tan \vartheta > \vartheta$ (per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$) risulta:

$$\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \cos \vartheta \Rightarrow y_G > R \cos \vartheta,$$

e ne consegue che G è interno all'involuppo delle rette radenti, come deve essere.

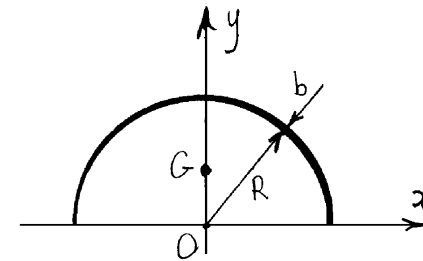
Infine risulta:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \cos^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right), \end{aligned}$$

$$I_y = 2 \int_0^{\vartheta} b R^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha =$$

$$= 2 b R^3 \int_0^{\vartheta} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \, d\alpha = b R^3 \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono la semicirconferenza sottile ponendo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

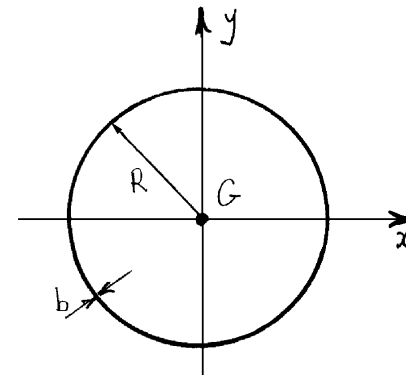


$$A = \pi R b$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi b R^3}{2}$$

e la circonferenza sottile ponendo $\vartheta = \pi$:



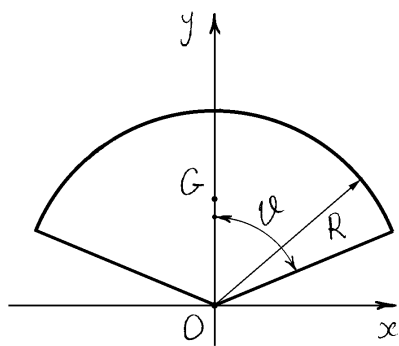
$$A = 2\pi R b$$

$$I_x = I_y = \pi b R^3$$

Settore circolare

Anche il settore circolare possiede un asse di simmetria, che risulta quindi principale di inerzia e contiene il baricentro. Tenendo conto che il settore può pensarsi suddiviso in triangoli infinitesimi che hanno baricentro a $(2/3)R$ dal centro del settore, il suo baricentro può calcolarsi concentrando l'area dei triangoli nel loro baricentro ottenendo così un arco circolare di raggio $(2/3)R$:

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta},$$



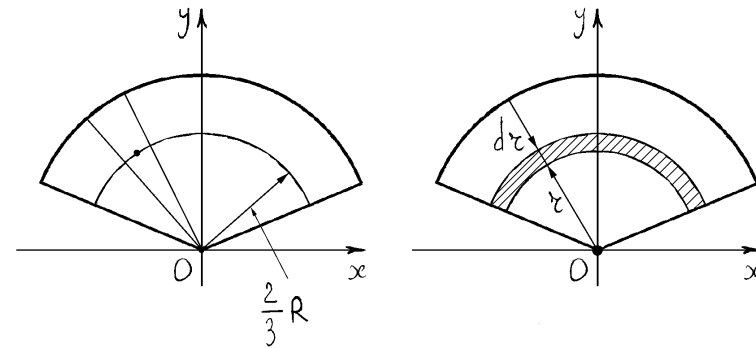
$$A = \vartheta R^2$$

$$y_G = \frac{2}{3} R \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$$

$$J_x = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

$$J_y = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right)$$

dove ϑ è ancora la semiampiezza e avendo anche in questo caso assunto un sistema di riferimento Oxy con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria e il punto O con il centro del settore.

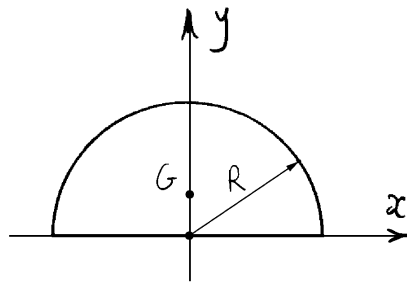


I momenti di inerzia J_x e J_y possono calcolarsi dividendo il settore in archi circolari di spessore dr e di raggio r variabile da 0 a R :

$$J_x = \int_0^R r^3 \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right),$$

$$J_y = \int_0^R r^3 \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right) dr = \frac{R^4}{4} \left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2} \right).$$

Come casi particolari si ottengono il semicerchio ponendo $\vartheta = \pi/2$:

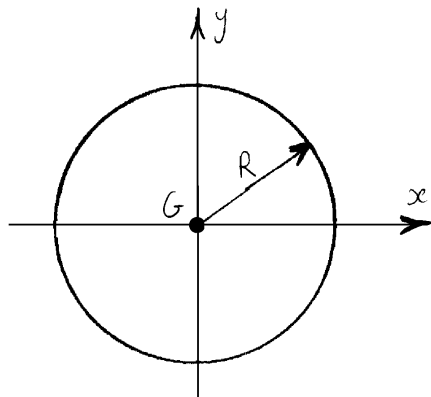


$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_G = \frac{4}{3\pi} R$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

e il cerchio ponendo $\vartheta = \pi$:



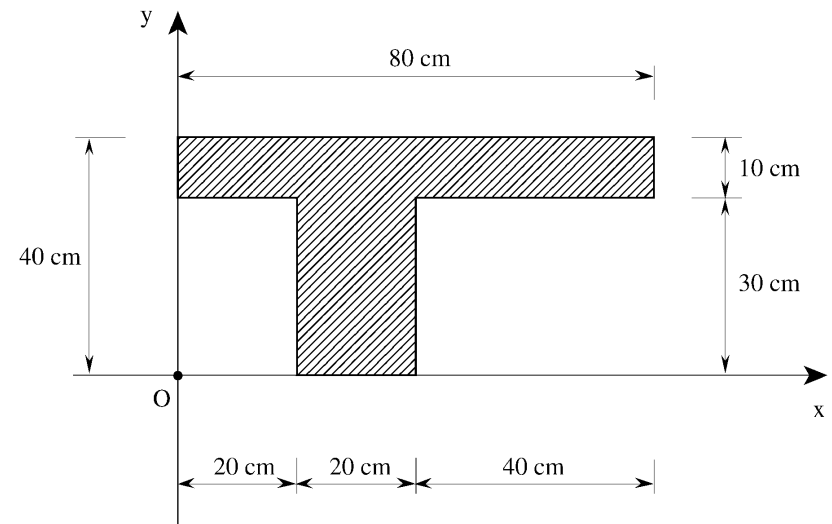
$$A = \pi R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

3.4.2 Sezioni Composte di parti semplici

Le quantità inerziali sono additive, ovvero si possono calcolare sommando i contributi delle singole parti che compongono la sezione. Se allora la sezione è composta di parti semplici, delle quali siano note le quantità inerziali, questa proprietà permette di calcolare le quantità inerziali di tutta la sezione.

Sezione composta di due rettangoli



$$A^{①} = 10 \times 80 = 800 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = 20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A = 1400 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{①} = A^{①} \times 35 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} \times 15 = 9000 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 37000 \text{ cm}^3$$

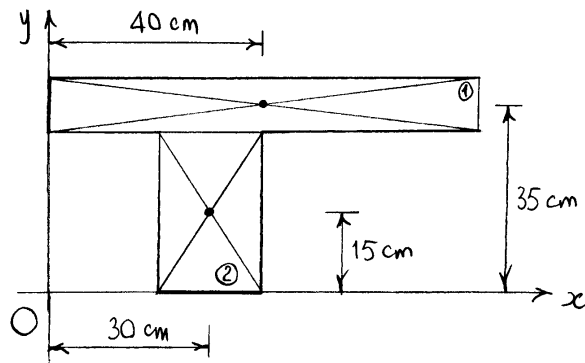
$$S_y^{①} = A^{①} \times 40 = 32000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} \times 30 = 18000 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 50000 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 26.43 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 35.71 \text{ cm}$$



$$J_{x_o}^{①} = \frac{80 \times 10^3}{12} + A^{①} (35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{②} = \frac{20 \times 30^3}{12} + A^{②} (15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{①} = \frac{10 \times 80^3}{12} + A^{①} (40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

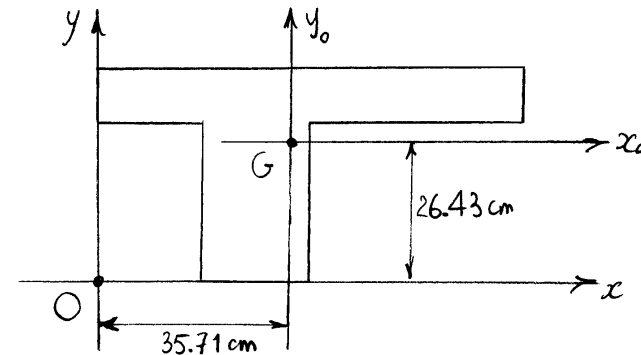
$$J_{y_o}^{②} = \frac{30 \times 20^3}{12} + A^{②} (30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{①} = A^{①} (35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

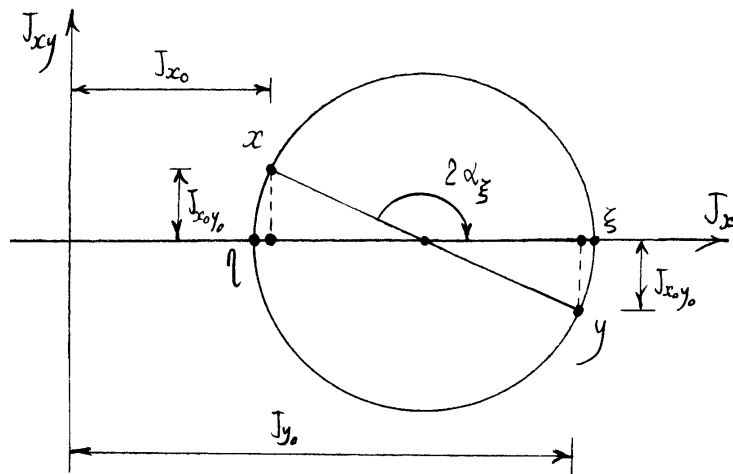
$$J_{x_o y_o}^{②} = A^{②} (15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o} = 68571 \text{ cm}^4$$



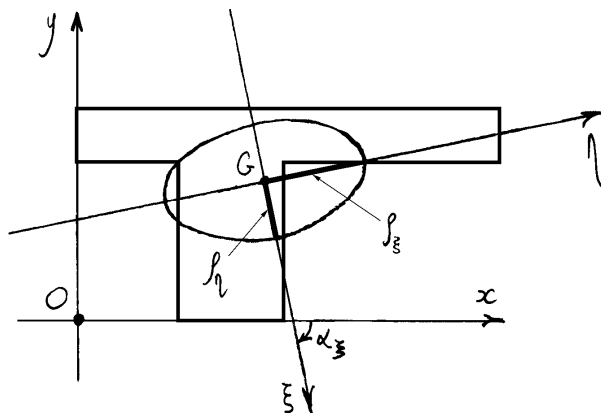
$$\left. \begin{array}{l} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{array} \right\} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_o} - J_{y_o})^2 + 4 J_{x_o y_o}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$



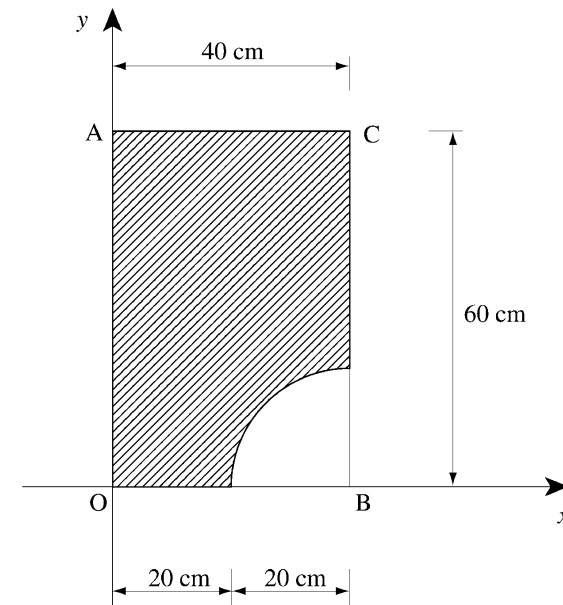
$$\begin{cases} l_\xi = \sqrt{J_\xi/A} = 18.83 \text{ cm} \\ l_\eta = \sqrt{J_\eta/A} = 11.13 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\alpha_\xi = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_0} - J_\xi}{J_{x_0} y_0} \right\} = -77.43^\circ$$



Sezione rettangolare con un intaglio

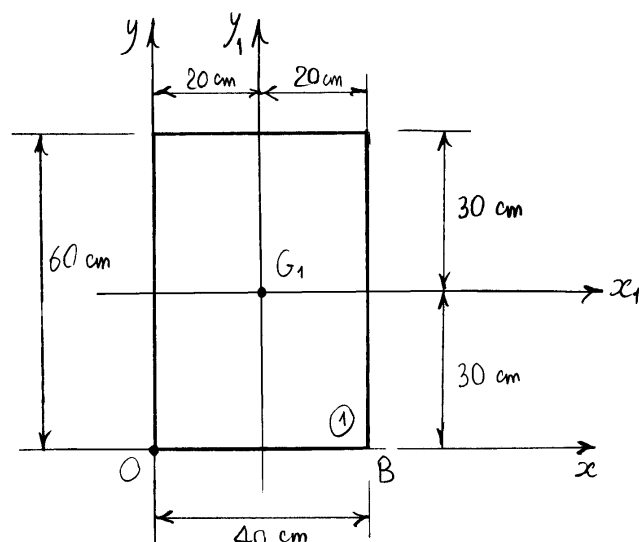
La sezione seguente non è la somma ma la differenza di due parti semplici, una rettangolare e una in forma di settore circolare di semiampiezza pari a $\pi/4$ radianti. Quindi tutti i contributi del settore circolare



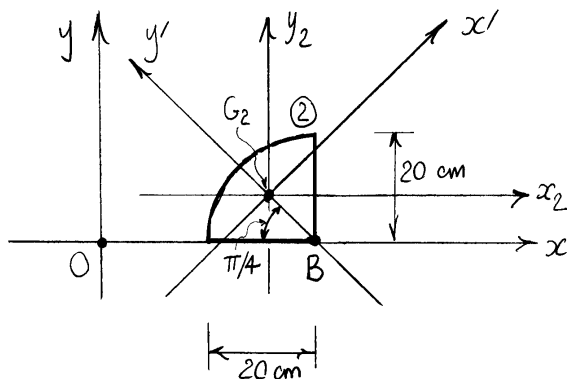
vanno sottratti da quelli del rettangolo. In tali casi a volte si parla di masse negative e i calcoli si svolgono, in conseguenza, associando una distribuzione di massa -1 alla parte che va sottratta.

Questo ultimo modo di procedere è senz'altro indicato se si deve scrivere un programma di calcolo. Nel caso si debba manualmente risolvere un problema è più indicato sottrarre direttamente le quantità, come fatto nel seguito.

Rettangolo



Settore circolare (da sottrarre)



$$A^{①} = 40 \times 60 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$A^{②} = \frac{\pi}{4} 20^2 = 314.16 \text{ cm}^2$$

$$A = A^{①} - A^{②} = 2085.8 \text{ cm}^2$$

$$\overline{BG}_2 = \frac{2}{3} 20 \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = 12.00 \text{ cm}$$

$$\begin{cases} x_{G1} = 20 \text{ cm} \\ y_{G1} = 30 \text{ cm} \end{cases}, \begin{cases} x_{G2} = 40 - \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 31.51 \text{ cm} \\ y_{G2} = \overline{BG}_2 \cos \frac{\pi}{4} = 8.488 \text{ cm} \end{cases}$$

$$S_x^{①} = A^{①} y_{G1} = 72000 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{②} = A^{②} y_{G2} = 2666.7 \text{ cm}^3$$

$$S_x = S_x^{①} - S_x^{②} = 69333 \text{ cm}^3 \Rightarrow y_G = \frac{S_x}{A} = 33.24 \text{ cm}$$

$$S_y^{①} = A^{①} x_{G1} = 48000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{②} = A^{②} x_{G2} = 9899.7 \text{ cm}^3$$

$$S_y = S_y^{①} - S_y^{②} = 38100 \text{ cm}^3 \Rightarrow x_G = \frac{S_y}{A} = 18.27 \text{ cm}$$

$$J_{x'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} - A^{(2)} \overline{BG}_2^2 = 6145.2 \text{ cm}^4$$

$$J_{y'}^{(2)} = \frac{R^4}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 11416 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(1)} = \frac{40 \times 60^3}{12} + A^{(1)} (y_G - y_{G1})^2 = 745190 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (y_G - y_{G2})^2 = 201250 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o} = J_{x_o}^{(1)} - J_{x_o}^{(2)} = 543940 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(1)} = \frac{60 \times 40^3}{12} + A^{(1)} (x_G - x_{G1})^2 = 327210 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_o}^{(2)} = J_{x'}^{(2)} \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + J_{y'}^{(2)} \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2})^2 = 63898 \text{ cm}^4$$

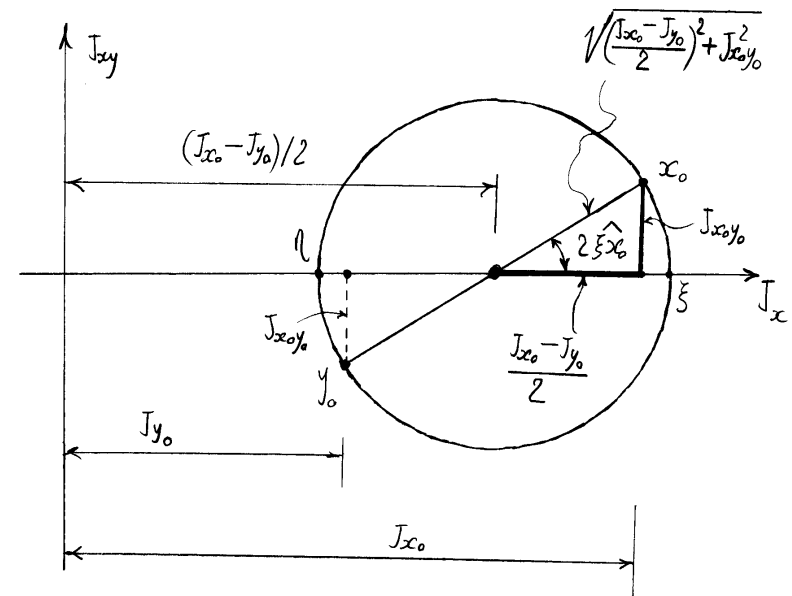
$$J_{y_o} = J_{y_o}^{(1)} - J_{y_o}^{(2)} = 263320 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(1)} = A^{(1)} (x_G - x_{G1}) (y_G - y_{G1}) = -13482 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o}^{(2)} = (J_{x'}^{(2)} - J_{y'}^{(2)}) \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + A^{(2)} (x_G - x_{G2}) (y_G - y_{G2}) = -100360 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_o y_o} = J_{x_o y_o}^{(1)} - J_{x_o y_o}^{(2)} = 86880 \text{ cm}^4$$

$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_o} + J_{y_o}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_o} - J_{y_o}}{2}\right)^2 + J_{x_o y_o}^2} = \left\{ \begin{matrix} 568660 \text{ cm}^4 \\ 238600 \text{ cm}^4 \end{matrix} \right.$$



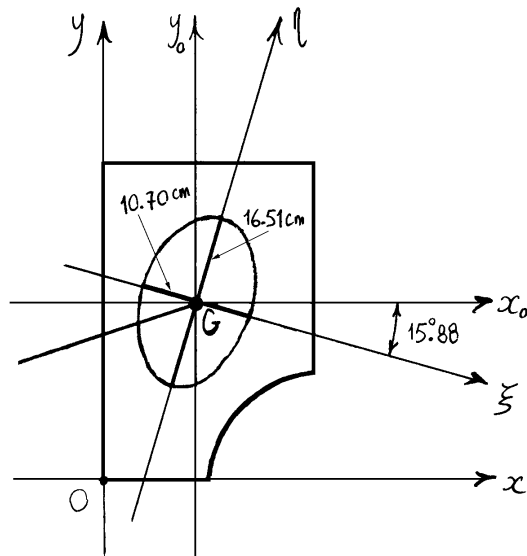
$$\tan(2\hat{\xi}_{x_o}) = \frac{J_{x_o y_o}}{(J_{x_o} - J_{y_o})/2} \Rightarrow \alpha_{\xi} = 15.88^\circ \text{ (orario)}$$

oppure:

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x_o} - J_{\xi}}{J_{x_o y_o}} \right\} = -15.88^\circ.$$

$$l_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 16.51 \text{ cm}$$

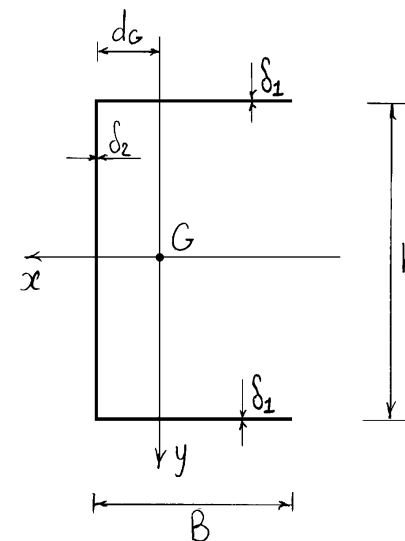
$$l_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 10.70 \text{ cm}$$



La sezione a C sottile

La sezione a C ha un asse di simmetria che contiene il baricentro ed è principale di inerzia.

La sezione risulta inoltre composta di tre rettangoli sottili. Si fa riferimento alla linea media della sezione sottile dove viene concentrato lo spessore.



$$A = 2\delta_1 B + \delta_2 H$$

Determinazione del baricentro ($S_y = 0$):

$$H\delta_2 d_G - 2B\delta_1 \left(\frac{B}{2} - d_G \right) = 0 \implies$$

$$\Rightarrow d_G = \frac{\delta_1 B^2}{2\delta_1 B + H\delta_2}.$$

Momenti di inerzia:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + 2(\delta_1 B)\left(\frac{H}{2}\right)^2,$$

$$J_y = 2\left\{\frac{\delta_1 B^3}{12} + (\delta_1 B)\left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2\right\} + \delta_2 H d_G^2,$$

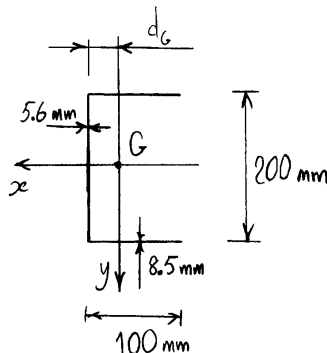
termine di trasporto

cioè:

$$J_x = \frac{\delta_1 B H^2}{2} + \frac{\delta_2 H^3}{12},$$

$$J_y = \frac{\delta_1 B^3}{6} + 2\delta_1 B\left(\frac{B}{2} - d_G\right)^2 + \delta_2 H d_G^2.$$

Per esempio:



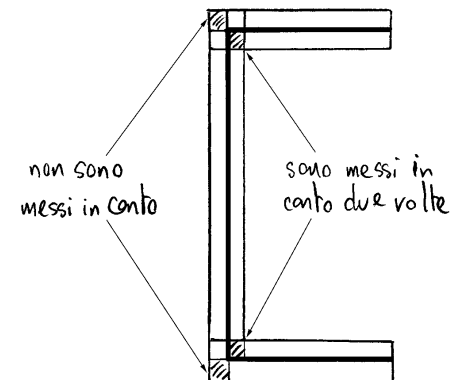
$$A = 2820 \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

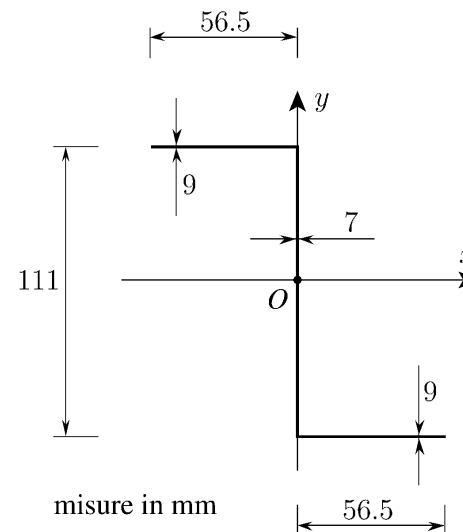
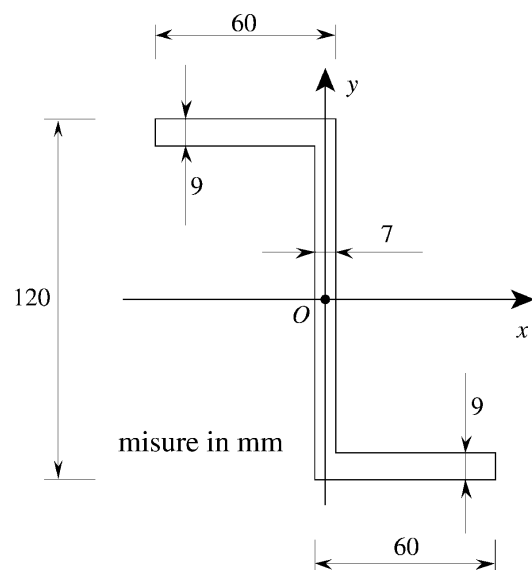
$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Si noti che l'approssimazione di sezione sottile ha condotto a tenere conto due volte di due rettangoli di dimensione $\frac{\delta_1}{2} \times \frac{\delta_2}{2}$ e a non tenere conto di altri due rettangoli di uguali dimensioni. Inoltre nel calcolo dei momenti di inerzia si sono trascurati i momenti $B\delta_1^3/12$ e $H\delta_2^3/12$ relativi agli assi baricentrici dei singoli rettangoli, quantità che sono piccole rispetto ai termini di trasporto.



La sezione a Z sottile



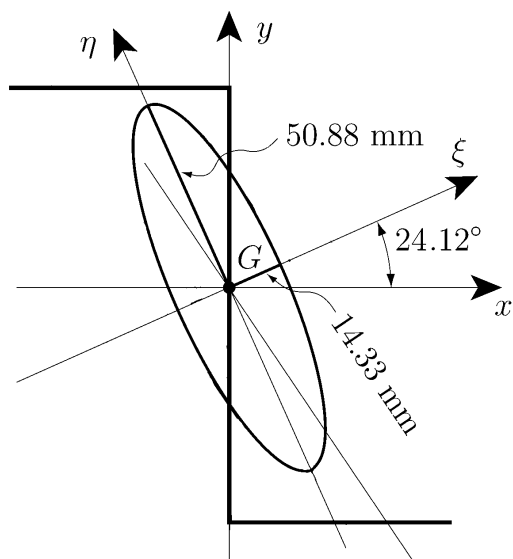
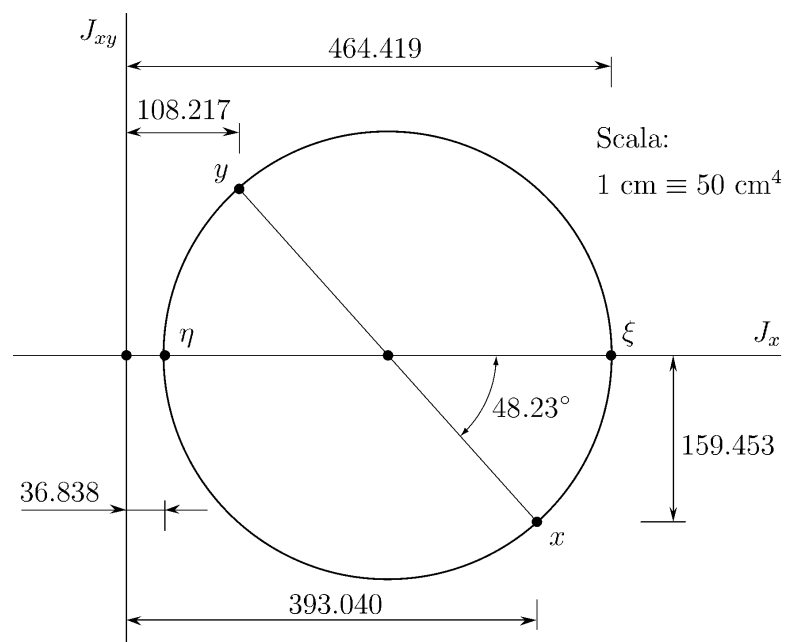
Si risolve la sezione concentrando lo spessore sulla linea media. La figura presenta una simmetria polare di polo O (invarianza per rotazioni di 180° attorno al punto O). Questa condizione è sufficiente per affermare che il baricentro coincide con il polo O, poiché il suo vettore dei momenti statici :

$$\underline{s}(O) = \int_A (\underline{P} - O) dA ,$$

è senz'altro nullo dato che ad ogni vettore posizione ($\underline{P} - O$) ne corrisponde uno uguale ed opposto per la condizione di polar simmetria.

Quantità inerziali:

$$\begin{cases} A = 17.94 \text{ cm}^2 \\ J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases} \quad \begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \\ \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha_\xi = 48.23^\circ \\ \alpha_\xi = 24.12^\circ \end{cases}$$



DISTRIBUZIONE DELLA TENSIONE NORMALE

Nel seguito si studierà la distribuzione della tensione normale su una sezione retta generica conseguente ai vari tipi di *sollecitazioni semplici*, ovverossia di caratteristiche della sollecitazione, che possono trovarsi ad agire sulla stessa sezione retta, limitatamente a quelle che generano una tensione normale. Si consideri che in ogni caso la soluzione conseguente all'applicazione di più caratteristiche della sollecitazione si può ottenere in generale per sovrapposizione degli effetti. Ciò non toglie comunque che a volte sia auspicabile anche lo studio diretto della distribuzione delle componenti di tensione conseguente a più caratteristiche della sollecitazione agenti contemporaneamente.

Ricordando le (3.2) e (3.5), la tensione normale σ_z è determinata dalla relazione costitutiva locale:

$$\sigma_z \mathbf{e}_z = E \epsilon \mathbf{e}_z + E \mathbf{k}_f \times (P - G), \quad (4.1)$$

dove $\mathbf{e}_z$ è il versore ortogonale alla sezione retta, ϵ è la dilatazione lineare della linea d'asse baricentrica e $\mathbf{k}_f$ è la curvatura flessionale. La semplicità della relazione (4.1) rende possibile sviluppare una casistica completa delle possibili distribuzioni di tensione normale.

Per individuare le distribuzioni della tensione normale corrispondenti alla forza normale N e al momento flettente $\mathbf{M}_f$ occorre associare alla (4.1) i legami costitutivi assiale:

$$N = \mathcal{M} \epsilon, \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{N}{\mathcal{M}}, \quad (4.2)$$

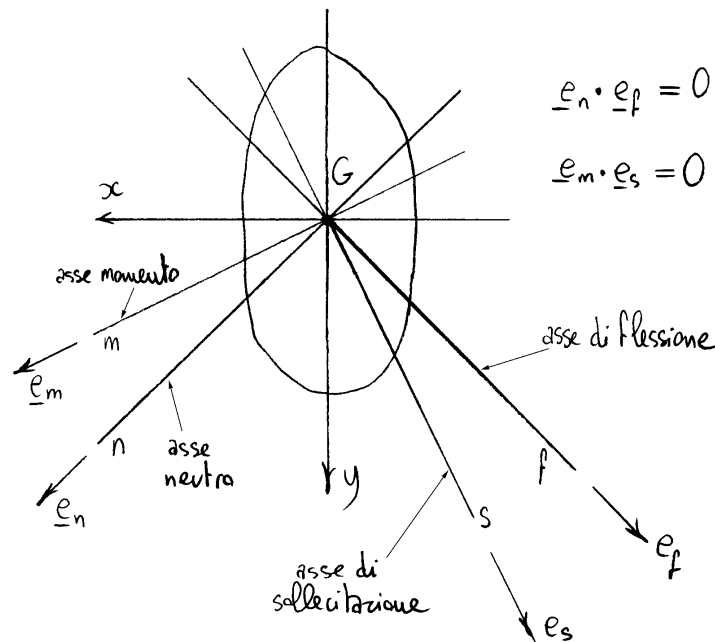
e flessionale:

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{J} \mathbf{k}_f, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k}_f = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_f. \quad (4.3)$$

Si ricorda che la validità delle (4.2) e (4.3) richiede la scelta del baricentro G quale polo per il calcolo sia del momento flettente $\mathbf{M}_f$ che della dilatazione ϵ . Sostituendo le (4.2) e (4.3) nella (4.1) si ottiene infine:

$$\sigma_z \mathbf{e}_z = E \frac{N}{\mathcal{M}} \mathbf{e}_z + E \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}_f \right) \times (P - G), \quad (4.4)$$

L'asse baricentrico m , avente la direzione di $\mathbf{M}_f$, è detto *asse momento*, mentre l'asse baricentrico s ortogonale all'asse momento è detto *asse di sollecitazione*. Si noti che l'asse di sollecitazione è individuato dall'intersezione della sezione retta con il *piano di sollecitazione*, piano baricentrico contenente la coppia flettente $\mathbf{M}_f$. L'asse baricentrico n , avente la direzione di $\mathbf{k}_f$, è detto *asse neutro*, mentre l'asse baricentrico f ortogonale all'asse neutro è detto *asse di flessione*. Si ricordi che $\mathbf{k}_f$ è il vettore della rotazione relativa mentre $\epsilon \mathbf{e}_z$ è quello della traslazione relativa. Ne consegue che in presenza di sola flessione, cioè se $N = 0$, la sezione subisce una rotazione relativa attorno all'asse neutro e ne risulta che le fibre longitudinali individuate da tale asse hanno dilatazione nulla e quindi, in accordo con la (4.1), tensione normale nulla. Questa doppia circostanza, statica e cinematica, giustifica il nome di asse neutro (della flessione). Si noti infine che l'asse di flessione è individuato dall'intersezione della sezione retta con il *piano di flessione*, piano baricentrico ortogonale all'asse neutro e quindi contenente,



nell'intorno del baricentro, la linea d'asse deformata per effetto della sola flessione.

4.1 Criterio di snervamento

La distribuzione delle tensioni normali dedotta precedentemente dipende strettamente dall'assunzione di un legame costitutivo locale elastico lineare. È già stato detto a suo tempo (si veda il par. 3.1 a p. 62) come implementare altri tipi di legame costitutivo nell'ambito del modello della trave inflessa. Se si vogliono effettuare delle verifiche di resistenza agli stati limite ultimi può essere indispensabile mettere in conto lo sviluppo di deformazioni plastiche oppure di danneggiamenti del materiale. In tal caso occorre quindi valutare il livello di snervamento, o di danneggiamento, corrispondente al dato stato tensionale, livello a partire dal quale iniziano a svilupparsi le plasticizzazioni, oppure i danneggiamenti, del materiale. Se si assume un comportamento elastico lineare nella fase precedente lo

snervamento del materiale, come è sempre lecito fare per esempio nel caso di acciaio strutturale laminato a caldo, lo stato tensionale precedente il raggiungimento di tale limite è quello deducibile dalla (4.1).

Per quel che riguarda il limite di snervamento, si noti che se sulla sezione retta della trave è presente la sola tensione normale allora la tensione nell'intorno di un punto risulta monoassiale, ovvero dello stesso tipo di quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. In tal caso si suppone che lo snervamento nell'intorno di un punto avvenga quando la tensione normale coincide con la tensione di snervamento. Se con σ_s^+ e σ_s^- si indicano i moduli della tensione di snervamento, rispettivamente a trazione e a compressione, lo snervamento viene quindi raggiunto quando la tensione normale σ soddisfa una delle due uguaglianze seguenti:

$$\sigma = \sigma_s^+, \quad \sigma = -\sigma_s^-, \quad (4.5)$$

mentre per la stretta appartenenza al dominio di elasticità si richiede che sia:

$$-\sigma_s^- < \sigma < \sigma_s^+. \quad (4.6)$$

Se il materiale presenta un uguale livello di snervamento σ_s a trazione e a compressione, come nel caso dei materiali metallici, è sufficiente confrontare con tale valore il modulo della tensione normale. Il criterio di snervamento e la stretta appartenenza al dominio di elasticità si esprimono quindi rispettivamente come segue:

$$|\sigma| = \sigma_s, \quad |\sigma| < \sigma_s. \quad (4.7)$$

Poiché la tensione normale varia in generale da punto a punto della sezione retta, la verifica del raggiungimento della condizione di snervamento va eseguita nei punti maggiormente sollecitati.

La conoscenza del livello di snervamento del materiale e dello stato tensionale dedotto nell'ipotesi di materiale indefinitamente elastico, con la sola aggiunta di un "opportuno" coefficiente di sicurezza, permette anche di effettuare in modo molto semplice una verifica di resistenza alle tensioni ammissibili. Basta a tale scopo sfruttare la condizione (4.6) di appartenenza al dominio di elasticità, e richiedere quindi che la tensione normale σ soddisfi la condizione:

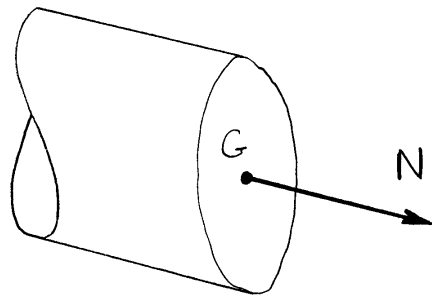
$$\frac{-\sigma_s^-}{\gamma} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_s^+}{\gamma}, \quad (4.8)$$

dove γ è un coefficiente di sicurezza maggiore dell'unità. È opportuno a questo punto ricordare che la semplicità della verifica (4.8) è figlia delle

stesse ragioni che hanno reso obsoleto il metodo di verifica alle tensioni ammissibili.

4.2 Forza normale centrata

Si dice che una sezione è soggetta ad una forza normale centrata se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è la forza normale, avendo scelto quale polo di riduzione il baricentro della sezione stessa. Essendo $M_f = 0$ la tensione normale vale:



$$\sigma_z = E \frac{N}{M}. \quad (4.9)$$

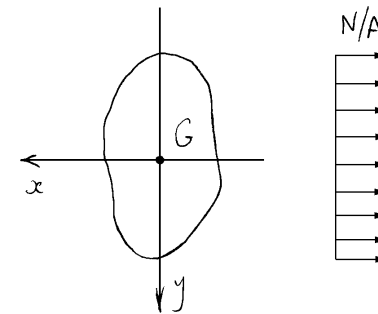
4.2.1 Sezioni omogenee

Nel caso di sezione omogenea, la tensione normale è costante nella sezione:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad (4.10)$$

e rappresenta dunque la più semplice distribuzione di tensioni normali sulla sezione retta.

Si ricorda che se la forza normale è positiva è detta di trazione, se negativa di compressione.



4.2.2 Sezioni composte di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nel materiale i -esimo vale:

$$\sigma_i = E_i \frac{N}{M},$$

dove E_i è il modulo di Young dell' i -esimo materiale e la massa totale vale:

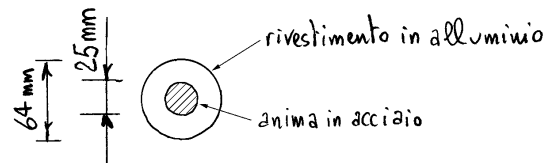
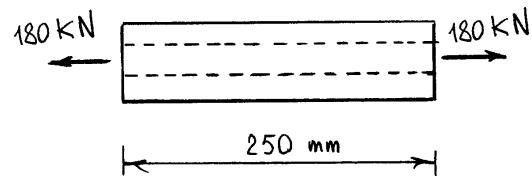
$$M = \sum_i E_i A_i,$$

dove A_i è l'area dell' i -esimo materiale.

Come esempio, si consideri una barretta circolare costituita da un'anima in acciaio e da un rivestimento

in alluminio, di moduli di Young rispettivamente:

$$\begin{cases} E_{ac} = 210 \text{ GPa} = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ E_{al} = 70 \text{ GPa} = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$



Risulta:

$$\begin{cases} A_{ac} = \frac{\pi}{4} (25 \text{ mm})^2 = 491 \text{ mm}^2 \\ A_{al} = \frac{\pi}{4} (64 \text{ mm})^2 - A_{ac} = 2726 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

e quindi:

$$M = E_{ac} A_{ac} + E_{al} A_{al} = 2.94 \times 10^8 \text{ N}.$$

Le tensioni normali σ_{ac} nell'acciaio e σ_{al} nell'alluminio valgono allora:

$$\sigma_{ac} = E_{ac} \frac{N}{M} = 129 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{al} = E_{al} \frac{N}{M} = 42.9 \text{ N/mm}^2,$$

e le quote N_{ac} e N_{al} di forza normale assorbite rispettivamente dall'area di acciaio e da quella di alluminio valgono infine:

$$N_{ac} = \sigma_{ac} A_{ac} = 63131 \text{ N},$$

e

$$N_{al} = \sigma_{al} A_{al} = 116869 \text{ N}.$$

Si noti che a seguito della maggior rigidezza, ovvero sia del modulo di Young più elevato, l'anima in acciaio assorbe una quota di carico più che proporzionale rispetto all'area.

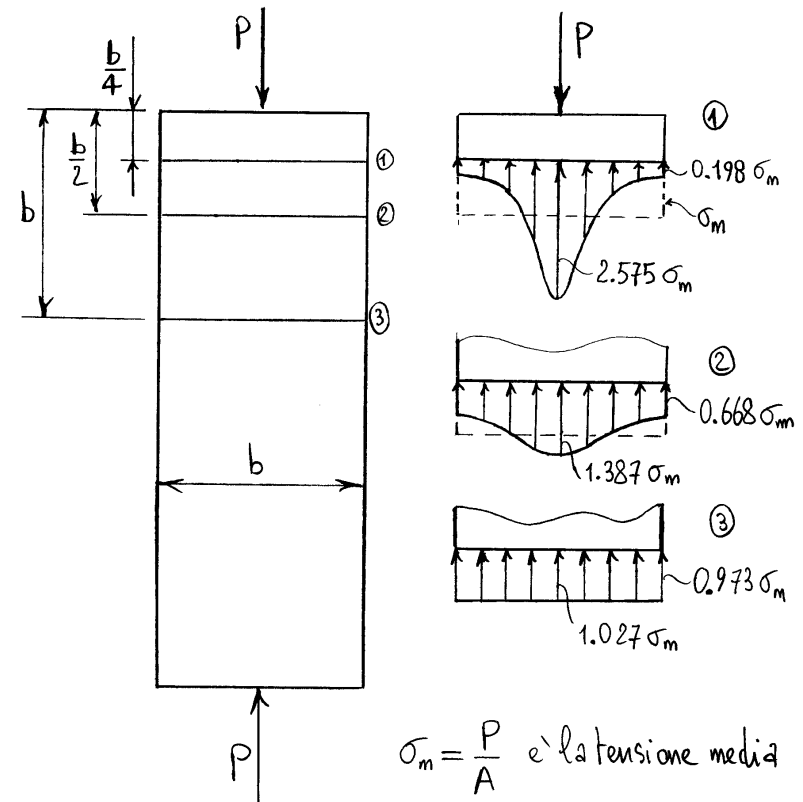
4.2.3 Concentrazioni di sforzo

Gli sforzi vicino ai punti di applicazione di carichi concentrati possono superare anche di molto lo sforzo medio. Stessa cosa succede quando un elemento strutturale contiene una discontinuità, come un foro oppure una brusca variazione di sezione. Spesso sono proprio le concentrazioni di sforzo che innescano la propagazione di una frattura.

Per quel che riguarda i carichi concentrati, prendiamo quale esempio una lastra di larghezza b e soggetta ad una estremità ad un carico concentrato. Nella figura seguente sono illustrati gli andamenti degli sforzi agenti in tre sezioni poste a distanze crescenti dal punto di applicazione del carico concentrato, andamenti dedotti nell'ambito della teoria matematica dell'elasticità e confermati qualitativamente dall'analisi fotoelastica condotta su provini di materiale apposito. L'andamento tensionale illustrato è in accordo con il

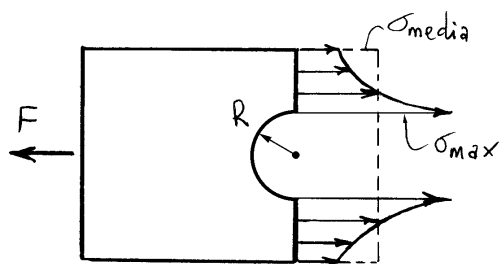
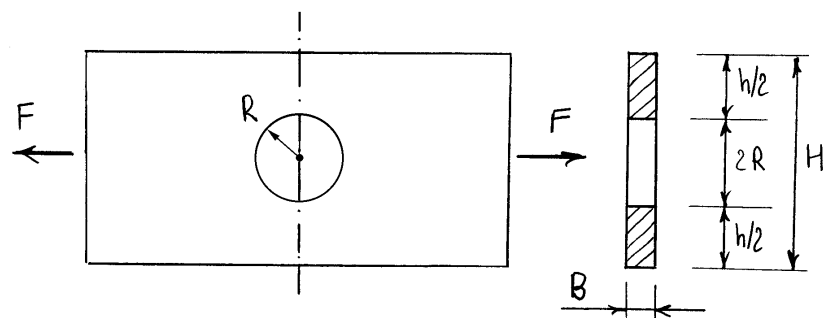
principio di Saint Venant :

"la distribuzione degli sforzi conseguente alla applicazione di carichi staticamente equivalenti è praticamente indipendente dalle effettive modalità di applicazione del carico, ad eccezione delle immediate vicinanze della zona di applicazione del carico."



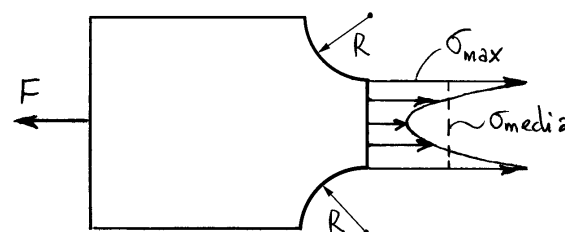
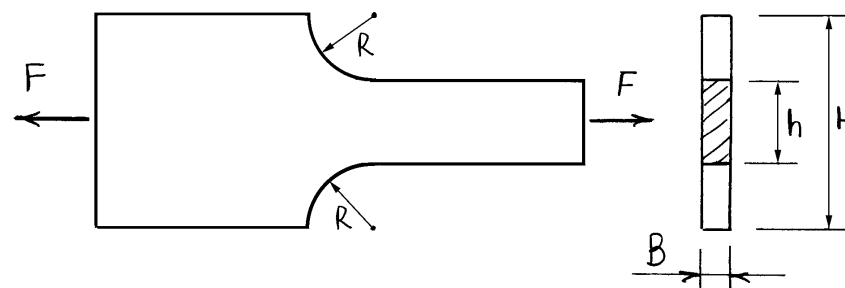
Si ricorda che è la validità di tale principio che consente di fondare una teoria della trave sulle caratteristiche della sollecitazione.

Nelle figure seguenti sono invece riportati gli andamenti tensionali in corrispondenza di un foro in una lastra e di una brusca variazione di sezione rispettivamente, dovuti all'applicazione di una forza normale centrata.



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$



$$A = B h$$

$$\sigma_{media} = \frac{F}{A}$$

Per trattare questi casi di concentrazione di sforzo si introduce il concetto di fattore di concentrazione degli sforzi:

$$S = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{media}},$$

che si ritrova tabellato in manuali o in testi sull'argomento.

4.2.4 Condizioni di snervamento (sezioni omogenee)

La situazione statica è quella che si ha in un provino soggetto a trazione o a compressione semplice. Per tale motivo occorre quindi confrontare direttamente la tensione normale agente sulla sezione con quella di snervamento (tensione al limite di elasticità, effettiva o convenzionale).

Se il materiale presenta un diverso livello di snervamento a trazione e a compressione, a seconda che N sia di trazione oppure di compressione occorre confrontarsi con la corrispondente tensione di snervamento, a trazione oppure a compressione. Le condizioni di appartenenza al dominio di elasticità risultano quindi:

$$\frac{N}{A} \leq \sigma_s^+ \quad \text{se} \quad N > 0,$$

$$\frac{N}{A} \geq -\sigma_s^- \quad \text{se} \quad N < 0,$$

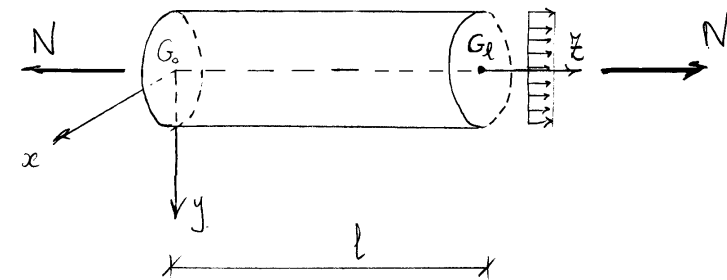
dove σ_s^+ e σ_s^- sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

Nel caso di sezioni composte di più materiali, la condizione di snervamento

va imposta per ogni materiale, relativamente alla tensione di snervamento del singolo materiale.

◇ ◇ ◇

Integrazione in un campo di spostamenti. Si consideri ora un cilindro omogeneo soggetto al campo di tensioni sopra descritto. Si vuole mostrare nel seguito che tale campo di tensioni è integrabile in un campo di spostamenti. A tale scopo si trasforma innanzitutto il campo di tensioni in un campo di deformazioni applicando la legge di Hooke inversa, per poi integrare il campo di deformazioni così ottenuto in un campo di spostamenti.



Il campo tensionale soluzione risulta:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (4.11)$$

Il campo delle deformazioni si ottiene dalla relazione inversa di Hooke:

$$\epsilon = \frac{1}{E} \left((1 + \nu) \sigma - \nu (\text{tr } \sigma) I \right). \quad (4.12)$$

Poiché:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} \end{bmatrix}, \quad \text{tr } \sigma = \frac{N}{A}, \quad (4.13)$$

risulta:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{N}{EA} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gradiente della rotazione locale rigida:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} = 0, \quad (i,j) = \begin{cases} (x,y) \\ (x,z) \\ (y,z) \end{cases}.$$

A meno di una inesenziale rotazione rigida globale di tutto il cilindro risulta:

$$\begin{cases} \underline{w} = \underline{0} \\ \text{grad } \underline{u} = \underline{\varepsilon} \end{cases}, \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

Integrando si ottiene quindi:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x + f(y, z).$$

Risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f = g(z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow g = \text{cost}.$$

Una costante rappresenta una traslazione rigida, in tal caso nella direzione dell'asse x . A meno di tale traslazione rigida, la componente dello spostamento in direzione dell'asse x vale:

$$u = -\nu \frac{N}{EA} x.$$

Procedendo analogamente per v e w , si ottiene definitivamente il quadro completo delle componenti di spostamento:

$$u = -\frac{\nu N}{EA} x,$$

$$v = -\frac{\nu N}{EA} y,$$

$$w = \frac{N}{EA} z$$

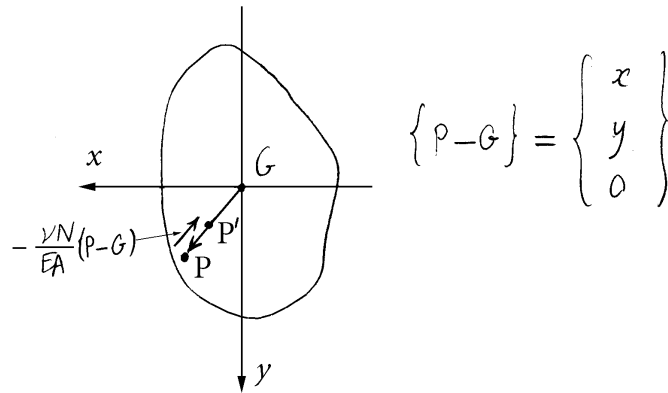
Tale campo di spostamenti può essere separato in due quote:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} - \frac{\nu N}{EA} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{u} = \frac{N}{EA} z \underline{e}_z - \frac{\nu N}{EA} (P-G).$$

Il primo termine è indipendente da x ed y e quindi rappresenta una *traslazione rigida della sezione* (in direzione dell'asse z).



Il secondo termine ha componente $w = 0$ e dipende da x e da y . Rappresenta quindi una deformazione della sezione nel proprio piano.

Tale deformazione sposta un punto P in direzione della congiungente di P con G , e poiché il rapporto:

$$\frac{|P-P'|}{|P-G|} = \frac{\nu N}{EA},$$

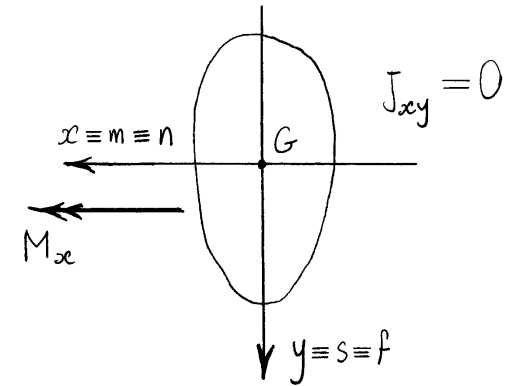
è costante, cioè non dipende da P , tale deformazione rappresenta una *omotetia*.

Da tale decomposizione del campo degli spostamenti risulta evidente che la sezione resta piana.

◇ ◇ ◇

4.3 Flessione retta

Si dice che una sezione è soggetta a *flessione retta* se l'unica caratteristica della sollecitazione che agisce nella sezione è un momento flettente con asse momento coincidente con una direzione principale di inerzia. Se l'asse



momento m coincide con l'asse x del sistema principale Gxy , risulta:¹

$$\underline{k}_f = k_x \underline{e}_x = \frac{M_x}{J_x} \underline{e}_x, \quad (4.14)$$

e quindi:²

$$\sigma_z = E \frac{M_x}{J_x} y, \quad (4.15)$$

avendo tenuto conto che $P - G = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y$ e che $\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z$.

Si noti che nel caso descritto l'asse di sollecitazione s coincide con l'altro asse principale y , l'asse neutro n con l'asse momento e l'asse di flessione f con l'asse di sollecitazione.

4.3.1 Sezioni omogenee

Nel caso di sezione omogenea risulta:

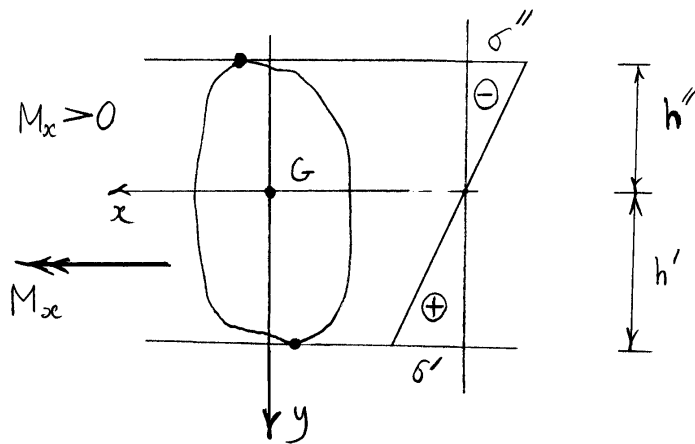
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (4.16)$$

¹Cfr. la (4.3), p. 105.

²Cfr. la (4.1), p. 105.

sottintendendo che in tal caso con J_x si indica il momento di inerzia della sola area. Si ricordi che con tale convenzione il momento di inerzia che compare nella (4.15) vale EJ_x .

L'andamento delle tensioni normali è lineare e queste si annullano sull'asse x . Se $M_x > 0$ le tensioni normali sono positive per $y > 0$ e negative



per $y < 0$, viceversa se $M_x < 0$.

Inevitabilmente ci saranno delle tensioni positive e delle tensioni negative. In corrispondenza dei punti più lontani dall'asse x si avranno le massime tensioni (in modulo). Se h' e h'' indicano tali distanze nella direzione delle y positive e negative rispettivamente le corrispondenti tensioni, in modulo,

valgono:

$$\sigma' = \frac{|M_x|}{J_x} h' = \frac{|M_x|}{W_x'},$$

$$\sigma'' = \frac{|M_x|}{J_x} h'' = \frac{|M_x|}{W_x''},$$

dove:

$$W_x' = \frac{J_x}{h'}, \quad W_x'' = \frac{J_x}{h''},$$

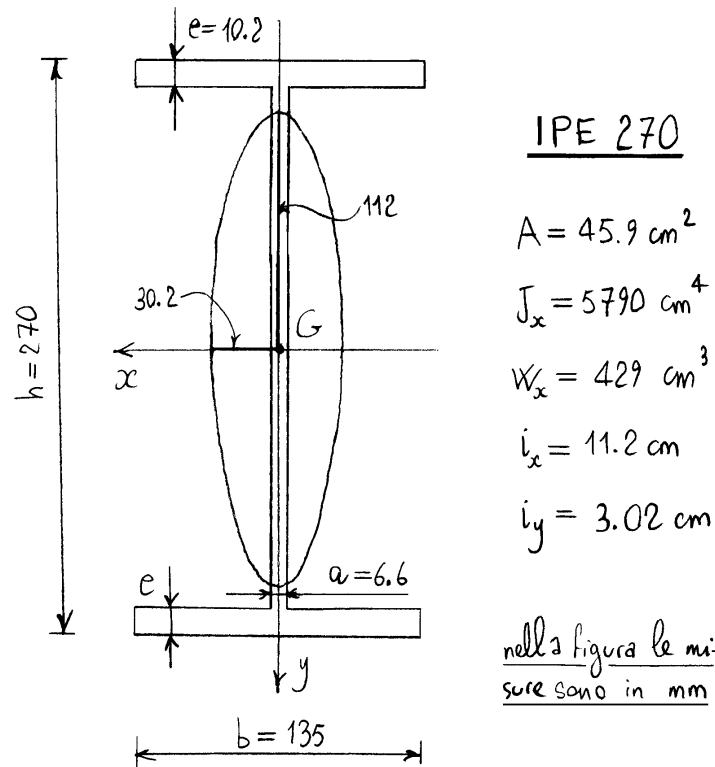
sono detti moduli di resistenza della sezione.

Si osservi che la dimensione di un modulo di resistenza, nell'attuale contesto di sezioni omogenee, è di una lunghezza al cubo (L^3).

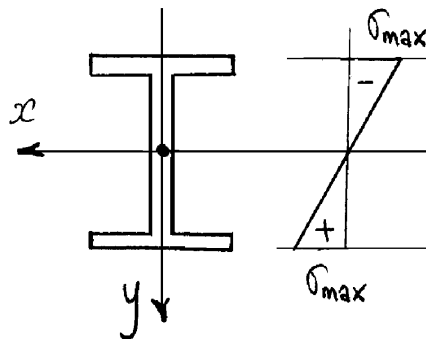
Sezione a doppio T tipo IPE

Si valutano nel seguito le tensioni normali massime nel caso della sezione IPE 270 di figura soggetta ad un momento flettente $M_x = 60 \text{ kN m}$.³ Le misure riportate in figura sono tratte dalle apposite tabelle riguardanti i profilati tipo IPE. In tali tabelle è consuetudine indicare i raggi di inerzia con il simbolo i .

³I profilati in acciaio commerciali tipo IPE sono di sezione sottile a doppio T allungata, cioè di altezza prevalente rispetto alla base, e sono adatti ad assorbire le sollecitazioni dovute ad un momento flettente. Una sezione sottile di tale tipo può essere indicata con la lettera "I" dritta, maiuscola e con le grazie, il che giustifica la prima lettera della sigla "IPE". Il resto della sigla sta per "Profilo Europeo".



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \times 10^6 \text{ Nmm}}{429 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 140 \text{ N/mm}^2.$$



4.3.2 Sezioni composte di più materiali

Se la sezione è composta di più materiali, la tensione normale nell' i -esimo materiale vale:

$$\sigma_z = E_i \frac{M_x}{J_x} y. \quad (4.17)$$

Nella (4.17) E_i è il modulo di Young dell' i -esimo materiale mentre J_x , di dimensione FL^2 , è il momento di inerzia generato dalla distribuzione nella sezione dei moduli di Young dei vari materiali e vale:

$$J_x = \sum_i E_i J_{xi}, \quad (4.18)$$

dove J_{xi} è il momento di inerzia della sola area A_i dell' i -esimo materiale, ovvero calcolato a meno della massa:

$$J_{xi} = \int_{A_i} y^2 dA, \quad (4.19)$$

Omogeneizzazione

In alternativa è possibile omogeneizzare l'area rispetto a uno dei materiali, per esempio il primo di modulo di Young E_1 . Si definiscono allora i coefficienti di omogeneizzazione n_i degli altri materiali:

$$n_i = \frac{E_i}{E_1}, \quad (4.20)$$

l'area omogeneizzata A^0 :

$$A^0 = A_1 + \sum_i n_i A_i, \quad (4.21)$$

e il momento di inerzia omogeneizzato J_x^0 :

$$J_x^0 = J_{x1} + \sum_i n_i J_{xi}, \quad (4.22)$$

dove la somma è estesa agli altri materiali. Con queste definizioni, il momento di inerzia generato dalla distribuzione nella sezione dei moduli di Young dei vari materiali vale:

$$J_x = E_1 J_x^0. \quad (4.23)$$

In un punto di coordinata y appartenente all'area A_1 del materiale rispetto al quale è fatta l'omogeneizzazione la tensione normale vale allora:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x^0} y, \quad (4.24)$$

mentre in un punto di coordinata y appartenente all'area A_i dell' i -esimo materiale si ha invece:

$$\sigma_z = n_i \frac{M_x}{J_x^0} y, \quad (4.25)$$

Sezione rettangolare in cemento armato

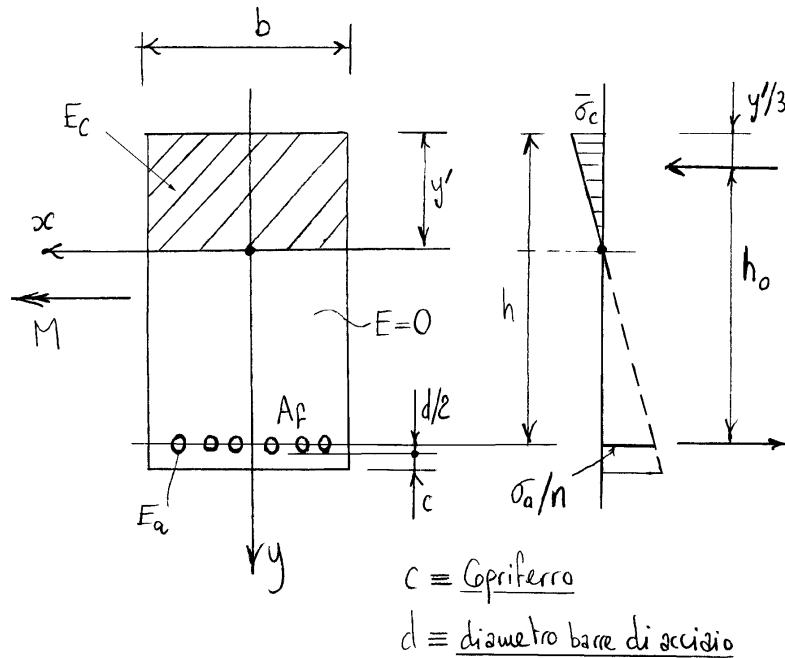
Come esempio di sezione composta di più materiali, si considera una sezione rettangolare in cemento armato a semplice armatura.

Per il calcolo degli spostamenti e della deformazione una struttura in cemento armato è equiparata ad una struttura omogenea resistente anche a trazione e con modulo di Young pari al modulo del calcestruzzo.

Le barre di armatura, assorbendo le tensioni di trazione che il calcestruzzo non è in grado di assorbire e limitando od eliminando, in tal modo, lo sviluppo delle fessurazioni, assicurano tale comportamento.

Il discorso cambia quando si voglia verificare, oppure progettare, una struttura in cemento armato.

In tal caso non si può prescindere dalla presenza delle armature e dallo sviluppo di eventuali fessurazioni. Il modo più semplice per tenere conto della scarsa resistenza a trazione del calcestruzzo, ai fini della verifica di resistenza, è quello di trascurarla del tutto. Si fa allora riferimento ad un modello deformativo nel quale la sezione retta reagisce solo in corrispondenza delle fibre compresse del calcestruzzo e non di quelle tese. Ne risulta che l'asse neutro divide in due zone la sezione retta, ad una delle quali compete il modulo E_c del calcestruzzo mentre all'altra compete il modulo nullo ($E=0$). All'area di armatura, che può considerarsi concentrata nei baricentri delle singole barre, compete il modulo E_a dell'acciaio. La posizione y'



dell'asse neutro risulta un'incognita del problema. Naturalmente si suppone la perfetta aderenza acciaio-calcestruzzo e, in accordo con le assunzioni cinematiche fatte, che le sezioni restino piane. Il momento statico rispetto all'asse neutro vale:

$$S_x = -E_c \frac{b y'^2}{2} + E_a A_f (h - y').$$

Nella flessione retta l'asse neutro deve essere baricentrico. Imponendo tale condizione si ottiene un'equazione di secondo grado in y' :

$$S_x = 0 \Rightarrow y'^2 + 2 \frac{n A_f}{b} y' - 2 \frac{n A_f}{b} h = 0,$$

dove $n = E_a/E_c$ è il coefficiente di omogeneizzazione dell'acciaio rispetto al calcestruzzo e h è l'altezza utile della sezione, cioè la distanza del baricentro delle barre di armatura dal lembo superiore del calcestruzzo compresso. Delle due soluzioni dell'equazione di secondo grado l'una, negativa, è priva di significato per il nostro problema mentre l'altra, positiva, vale:

$$y' = \frac{n A_f}{b} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n A_f}} \right\}.$$

Se con J_x si indica il momento di inerzia omogeneizzato all'area di calcestruzzo:

$$J_x = \frac{b y'^3}{3} + n A_f (h - y')^2,$$

La distribuzione della tensione normale nella sezione retta vale:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} y, \quad (y < 0),$$

in corrispondenza del calcestruzzo compresso,

$$\sigma = \sigma_a = n \frac{M}{J_x} (h - y'),$$

in corrispondenza delle barre di armatura, ed infine è nulla in corrispondenza del calcestruzzo teso.

Se con σ_c si indica poi la tensione di compressione (in modulo) al lembo superiore del calcestruzzo compresso, risulta anche:

$$\sigma_c = \frac{M}{J_x} y'.$$

Il braccio della coppia interna (risultante nel calcestruzzo compresso — risultante nell'acciaio teso), vale:

$$h_o = h - \frac{y'}{3}.$$

La coppia interna ha dunque il valore:

$$M = \frac{1}{2} \sigma_c b y' h_o = \sigma_a A_f h_o,$$

da cui si ottiene, in alternativa:

$$\sigma_a = \frac{M}{A_f h_o}, \quad \sigma_c = \frac{2M}{b y' h_o}.$$

Uguagliando le due diverse espressioni di σ_a e di σ_c si ottiene:

$$\frac{M}{A_f h_o} = n \frac{M}{J_x} (h - y') \Rightarrow h_o = \frac{J_x}{n A_f (h - y')},$$

$$\frac{2M}{b y' h_o} = \frac{M}{J_x} y' \Rightarrow h_o = \frac{2 J_x}{b y'^2}.$$

Le due espressioni sono senz'altro equivalenti, poiché la condizione $S_x = 0$ può essere posta nella forma:

$$-\frac{b y'^2}{2} + n A_f (h - y') = 0.$$

4.3.3 Condizioni di snervamento

La condizione di appartenenza al dominio di elasticità richiede che le massime tensioni a trazione e a compressione non superino, in modulo, le corrispondenti tensioni di snervamento:

$$\begin{cases} \frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^+ \text{ e } \frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x > 0 \\ -\frac{M_x}{W_x''} \leq \sigma_s^+ \text{ e } -\frac{M_x}{W_x'} \leq \sigma_s^- & \text{se } M_x < 0 \end{cases}.$$

Se il materiale presenta lo stesso livello di snervamento a trazione e compressione si confronterà semplicemente la massima tensione in modulo con la tensione di snervamento:

$$\max \left\{ \frac{|M_x|}{W_x'}, \frac{|M_x|}{W_x''} \right\} \leq \sigma_s.$$

Se poi la sezione è simmetrica rispetto all'asse x , ovvero se $W_x' = W_x'' = W_x$, le tensioni massime a trazione e compressione sono uguali in modulo

◇ ◇ ◇

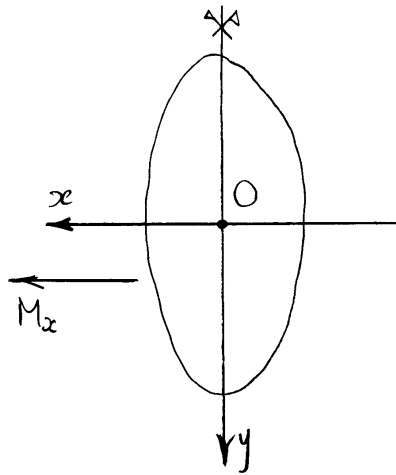
Cenni al calcolo a rottura.

Quanto detto finora vale nell'ipotesi di legame costitutivo elastico lineare:

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Come già detto tale legame lineare, sempre nell'ambito delle ipotesi cinematiche della trave inflessa, può essere sostituito da uno più generale in cui non solo l'elasticità può essere non lineare, ma il legame stesso può essere elastoplastico. È chiaro che generalizzazioni di questo tipo sono a volte indispensabili se si vogliono eseguire delle verifiche agli stati limite ultimi.

In tale contesto più generale, flessione retta significa asse neutro ortogonale all'asse di sollecitazione. Se la sezione ha un asse di simmetria e l'asse momento è ortogonale all'asse di simmetria (ovverossia la coppia agisce sul piano di simmetria) tale condizione è, per simmetria, senz'altro soddisfatta.



La condizione che individua l'asse neutro è $N=0$:

$$\int_A \sigma dA = 0.$$

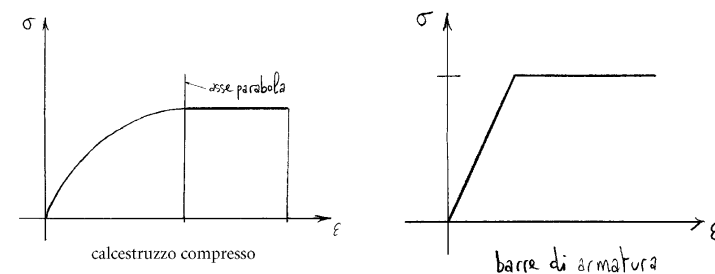
Si noti a tale proposito che i concetti di baricentro e di assi principali di inerzia sono strettamente connessi al legame lineare e non possono essere utilizzati in un contesto più generale. Assumendo un sistema di riferimento Oxy , con l'asse y coincidente con l'asse di simmetria, la coppia flettente risulta poi:

$$M_x = \int_A \sigma y dA.$$

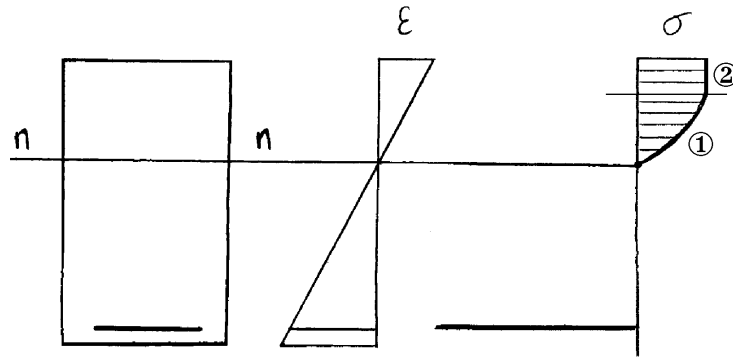
Inoltre, il legame tra la dilatazione ε della generica fibra longitudinale e le caratteristiche della deformazione ε_0 e K_x risulta:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + K_x y.$$

Per es., nel caso del calcestruzzo armato si può utilizzare, come già detto, un diagramma σ - ε parabolico nella parte elastica seguito da un tratto perfettamente plastico, per quel che riguarda il calcestruzzo compresso, mentre per le barre di armatura può essere scelto un diagramma bilineare.



La distribuzione delle tensioni normali nel calcestruzzo compresso è quindi non lineare nella parte di calcestruzzo in fase elastica e costante nella parte in fase plastica.

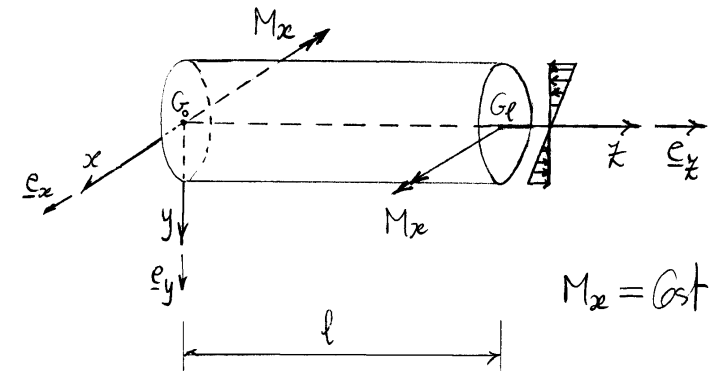


- ① fase elastica non lineare
② fase perfettamente plastica

◇ ◇ ◇

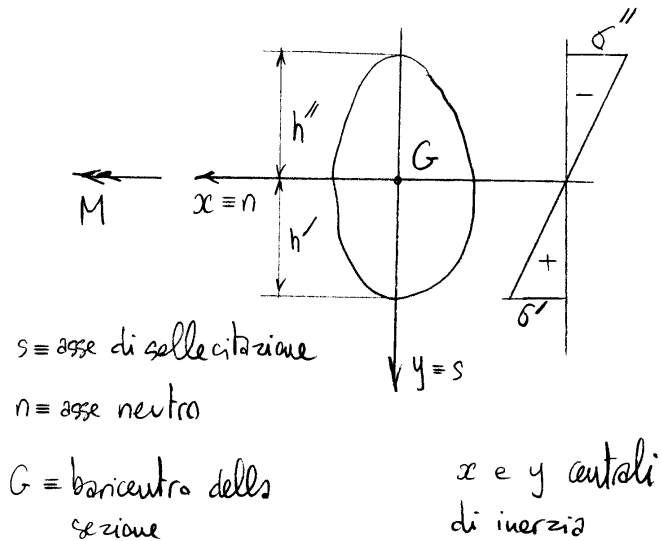
Integrazione in un campo di spostamenti.

Si consideri ora un cilindro omogeneo soggetto al campo di tensioni sopra descritto. Si vuole mostrare nel seguito che tale campo di tensioni è integrabile in un campo di spostamenti. A tale scopo si trasforma innanzitutto il campo di tensioni in un campo di deformazioni applicando la legge di Hooke inversa, per poi integrare il campo di deformazioni così ottenuto in un campo di spostamenti.



Il campo tensionale soluzione risulta:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J_x} y, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$



Tenendo conto che :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \underline{\underline{\sigma}} - \nu \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{I}} \},$$

e che in componenti risulta:

$$\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_x,$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

$$[(\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}] = \frac{M_x}{J_x} \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix},$$

ne consegue il seguente tensore di deformazione infinitesima:

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{M_x}{E J_x} \begin{bmatrix} -\nu y & 0 & 0 \\ 0 & -\nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Nota che $\varepsilon=0$ per $y=0$, ovvero lungo l'asse neutro.

Ricordiamo che la rotazione rigida dell'intorno di un punto è rappresentata dal tensore di rotazione $\underline{\underline{\omega}}$ emisimmetrico oppure dal vettore rotazione $\underline{\underline{\varphi}}$:

$$[\underline{\underline{\omega}}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{xz} \\ -\omega_{xz} & \omega_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \{ \underline{\underline{\varphi}} \} = \begin{Bmatrix} \omega_{xy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}.$$

Gradiente di $\underline{w}$:

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}.$$

Si noti che le componenti non nulle di $\underline{\varepsilon}$ sono $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ e che queste dipendono solo da y . Ne consegue che per avere derivate diverse dallo zero occorre che $x_j = y$ oppure $x_i = y$. Risulta:

$$[\text{grad } \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (k) & x & y & z & (ij) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} xy \\ xz \\ yx \end{array} \end{array} \end{array},$$

e quindi:

$$w_{zy} = \frac{M_x}{EJ_x} z,$$

$$w_{xz} = 0,$$

$$w_{yx} = \nu \frac{M_x}{EJ_x} x,$$

a meno di inessenziali rotazioni rigide complessive di tutto il cilindro.

In definitiva:

$$[\underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} 0 & -\nu x & 0 \\ \nu x & 0 & -z \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi:

$$[\text{grad } \underline{u}] = [\underline{\varepsilon} + \underline{w}] = \frac{M_x}{EJ_x} \begin{bmatrix} -\nu y & -\nu x & 0 \\ \nu x & -\nu y & -z \\ 0 & z & y \end{bmatrix}.$$

Integrando negli spostamenti si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + f(y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x + \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy + \text{cost}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \nu \frac{M_x}{EJ_x} x \Rightarrow v = \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EJ_x} x^2 + f(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow f = -\frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EJ_x} y^2 + g(z) \\ \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow \frac{dg}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow g = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{EJ_x} z^2 \end{cases}$$

$$\boxed{v = \frac{M_x}{2EJ_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} + Cost}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \Rightarrow w = w(y, z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{M_x}{EJ_x} z \Rightarrow w = \frac{M_x}{EJ_x} yz + f(z) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{M_x}{EJ_x} y + \frac{df}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{df}{dz} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{w = \frac{M_x}{EJ_x} yz + Cost}$$

Quindi, a meno di un inessenziale moto rigido complessivo di traslazione, si ottiene il seguente campo continuo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = -\nu \frac{M_x}{EJ_x} xy \\ v = \frac{M_x}{2EJ_x} \left\{ -z^2 + \nu(x^2 - y^2) \right\} \\ w = \frac{M_x}{EJ_x} yz \end{cases} .$$

Separando i vari contributi, è possibile scrivere tale campo di spostamenti in forma matriciale nel modo seguente:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{M_x}{2EJ_x}z^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_x}{EJ_x}z \\ 0 & \frac{M_x}{EJ_x}z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione
della sezione
in direzione y

Rotazione della sezione
attorno all'asse x
di ampiezza $M_x z / EJ_x$

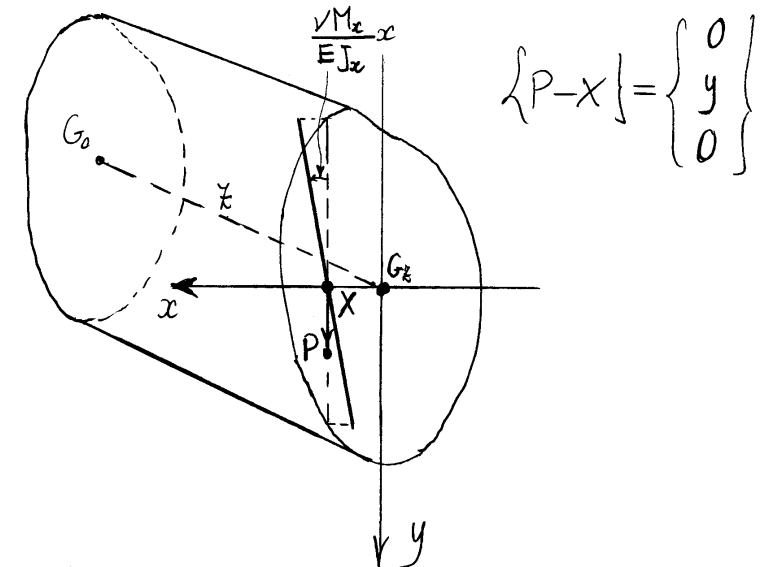
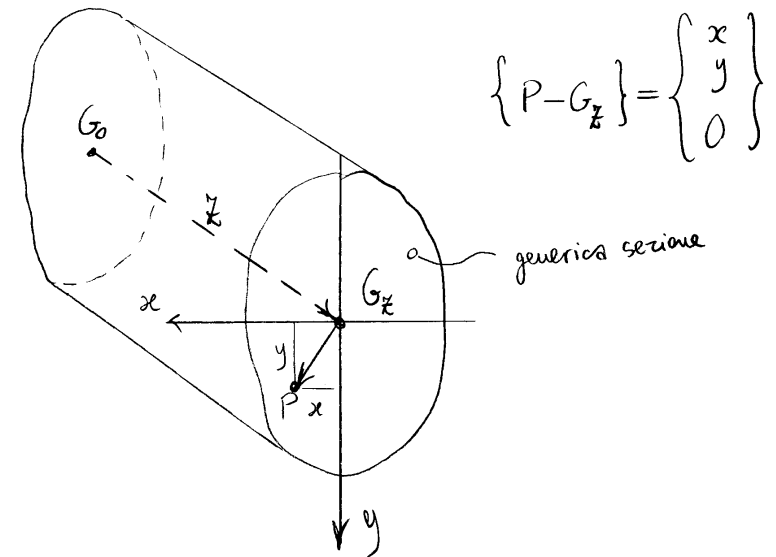
$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ \nu \frac{M_x}{2EJ_x}z^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\nu \frac{M_x}{EJ_x}x & 0 \\ \nu \frac{M_x}{EJ_x}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

traslazione del
segmento ortogonale
ad x lungo
la direzione y

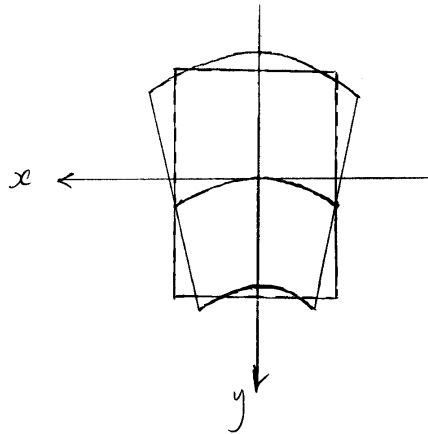
Rotazione, nel piano della sezione,
del segmento ortogonale ad x, attorno
al punto X intersezione del segmento
con l'asse x e di ampiezza $\nu \frac{M_x}{EJ_x}x$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ -\nu \frac{M_x}{2EJ_x}y^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deformazione del
segmento ortogonale
a x, nella propria
retta



Deformazione della sezione nel proprio piano:



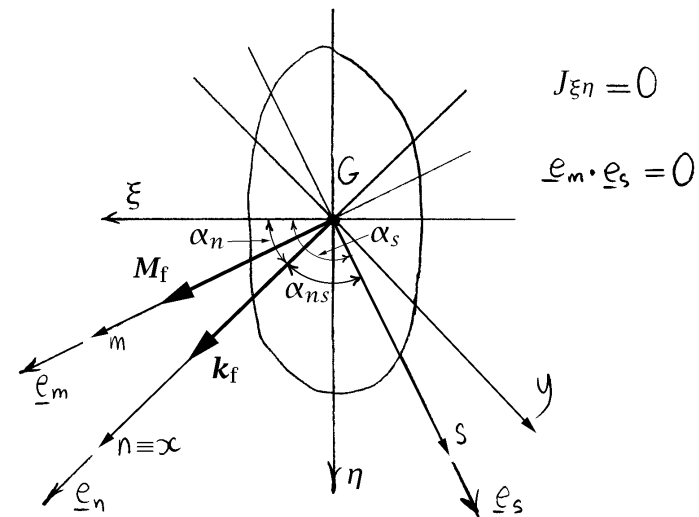
È possibile scrivere il campo di spostamenti, in forma vettoriale, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \underline{u} = & -\frac{M_x}{2EI_x} x^2 \underline{e}_y + \frac{M_x}{EI_x} x \underline{e}_x (P - \xi) \\ & + \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EI_x} x^2 \underline{e}_y + \nu \frac{M_x}{EI_x} x \underline{e}_x (P - x) \\ & - \frac{\nu}{2} \frac{M_x}{EI_x} y^2 \underline{e}_y \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

4.4 Flessione Deviata

Si ha flessione deviata quando la sezione è soggetta a solo momento flettente, di asse momento m non coincidente con un asse principale di inerzia. In tal caso l'asse neutro n e quello di sollecitazione s sono sempre distinti e mai ortogonali. Infatti sia α_{ns} l'angolo compreso tra l'asse neutro n e quello di sollecitazione s . Se M_f e k_f sono rispettivamente il momento flettente e la curvatura flessionale, la condizione $\alpha_{ns} = 0$ è equivalente alla condizione $M_f \cdot k_f = 0$ e quindi, tenuto conto del legame costitutivo flessionale, alla condizione $k_f \cdot J k_f = 0$. Dato che il tensore di inerzia J è definito positivo ne risulta che è sempre $\alpha_{ns} \neq 0$. Inoltre non può che essere $\alpha_{ns} \neq \frac{\pi}{2}$, poiché se fosse $\alpha_{ns} = \frac{\pi}{2}$ allora k_f avrebbe la direzione di M_f e l'asse momento m sarebbe principale d'inerzia.



Gli assi n e s , sempre distinti e mai ortogonali, sono detti *assi coniugati* e costituiscono un sistema Gns baricentrico di assi cartesiani non ortogonali detto *sistema coniugato*. Gli assi ξ e η baricentrici e principali centrali di inerzia costituiranno a loro volta un sistema $G\xi\eta$ baricentrico ortogonale. Si considererà inoltre un secondo sistema ortogonale Gxy non principale di inerzia, strumentale per i calcoli nel sistema non ortogonale Gns , avente l'asse x coincidente con l'asse neutro n e quindi l'asse y con l'asse di flessione f .

4.4.1 Relazione tra asse neutro e asse di sollecitazione (coniugio)

Il momento flettente M_f e la curvatura flessionale k_f si possono scrivere nella forma:

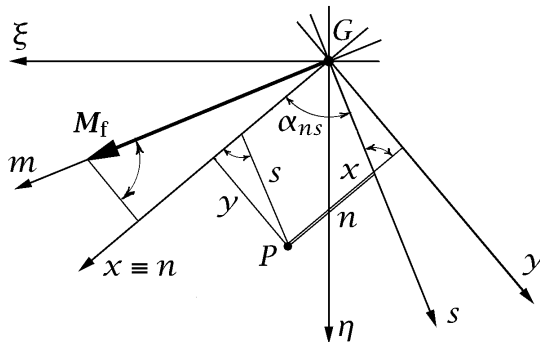
$$M_f = M e_m, \quad k_f = k e_n. \quad (4.26)$$

Le componenti del momento flettente e della curvatura flessionale nel sistema non principale di inerzia Gxy risultano allora rispettivamente:

$$M_x = M \sin \alpha_{ns}, \quad M_y = -M \cos \alpha_{ns}, \quad (4.27)$$

e:

$$k_x = k, \quad k_y = 0. \quad (4.28)$$



Valutando l'equazione costitutiva flessionale nel sistema non principale Gxy :

$$\begin{Bmatrix} M \sin \alpha_{ns} \\ -M \cos \alpha_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

si ottiene allora:

$$M \sin \alpha_{ns} = J_x k, \quad -M \cos \alpha_{ns} = -J_{xy} k. \quad (4.30)$$

Dal rapporto tra le (4.30) si ottiene la relazione definente l'angolo α_{ns} tra asse neutro e asse di sollecitazione nel sistema non principale Gxy :

$$\tan \alpha_{ns} = \frac{J_x}{J_{xy}}. \quad (4.31)$$

Proprietà del coniugio. L'asse n è l'asse neutro corrispondente all'asse di sollecitazione s se e solo se $J_{ns} = 0$.

Dimostrazione. Il generico punto P della sezione ha coordinate (x, y) e (n, s) , rispettivamente nel sistema non principale Gxy e in quello coniugato Gns , che soddisfano le seguenti formule di trasformazione:

$$n = x - \frac{y}{\tan \alpha_{ns}}, \quad s = \frac{y}{\sin \alpha_{ns}}. \quad (4.32)$$

Il momento di inerzia J_{ns} rispetto agli assi n e s vale quindi:

$$\begin{aligned} J_{ns} &= \int_A E n s \, dA = \int_A E \left(x - \frac{y}{\tan \alpha_{ns}} \right) \frac{y}{\sin \alpha_{ns}} \, dA \\ &= \frac{1}{\sin \alpha_{ns}} \left(J_{xy} - \frac{J_x}{\tan \alpha_{ns}} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

da cui discende che $J_{ns} = 0$ è equivalente alla (4.31), come volevasi dimostrare. ■

È evidente da questo risultato che se s è coniugato di n , allora n è coniugato di s , cioè la relazione è reciproca. Inoltre è possibile estendere il concetto di rette coniugate anche a rette non baricentriche, richiedendo appunto che il loro momento centrifugo sia nullo. Ne consegue che le rette coniugate della retta baricentrica n individuano un fascio di rette parallele.

Dimostrazione. Infatti sia n una retta baricentrica e s la coniugata di n per G . Sia poi O' un punto di n e si considerino i due sistemi ortogonali Gxy e $O'x'y'$ con gli assi x e x' coincidenti con n .

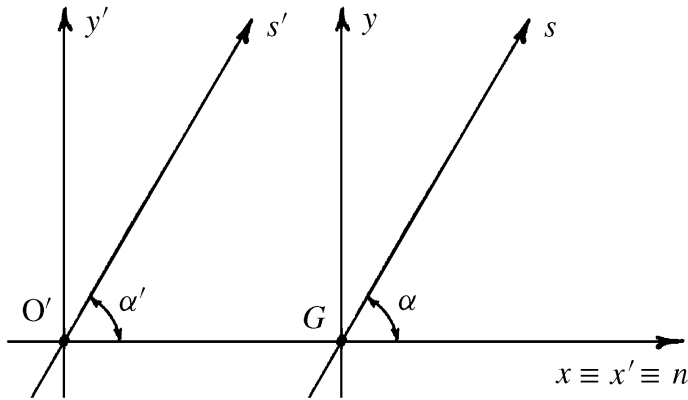
Detto α e α' le inclinazioni di s e s' rispetto ad n , con s' retta coniugata di n per O' , risulta:

$$\tan \alpha = \frac{J_x}{J_{xy}} = \frac{J_{x'}}{J_{x'y'}} = \tan \alpha',$$

dato che il trasporto da J_{xy} a $J_{x'y'}$ è nullo, come volevasi dimostrare. ■

Legame costitutivo nel sistema coniugato. Si consideri ora la formula di trasformazione tra i momenti di inerzia J_x e J_n rispetto all'asse neutro valutati con distanze rispettivamente ortogonali e in direzione dell'asse di sollecitazione s :

$$J_x = J_n \sin^2 \alpha_{ns}. \quad (4.34)$$



Utilizzando tale trasformazione, dalla prima delle (4.30) si ottiene il legame costitutivo nel sistema coniugato:

$$M = J_n k \sin \alpha_{ns}, \quad (4.35)$$

dove, per quanto detto, $J_n = \int_A E s^2 dA$ è il momento di inerzia rispetto all'asse neutro valutato con le distanze prese in direzione dell'asse di sollecitazione s .

Formula del coniugio. Si consideri ora il sistema principale di inerzia $G\xi\eta$. Siano poi α_n e α_s gli angoli che determinano rispettivamente l'asse neutro n e l'asse di sollecitazione s nel sistema principale. L'angolo α_{ns} compreso tra l'asse neutro n e quello di sollecitazione s vale allora:

$$\alpha_{ns} = \alpha_s - \alpha_n. \quad (4.36)$$

L'angolo α_m che determina l'asse momento m nel sistema principale vale invece:

$$\alpha_m = \alpha_s - \frac{\pi}{2}. \quad (4.37)$$

Le componenti del momento flettente e della curvatura flessionale nel sistema principale di inerzia $G\xi\eta$ risultano allora rispettivamente:

$$M_\xi = M \sin \alpha_s, \quad M_\eta = -M \cos \alpha_s, \quad (4.38)$$

e:

$$k_\xi = k \cos \alpha_n, \quad k_\eta = k \sin \alpha_n. \quad (4.39)$$

Valutando l'equazione costitutiva flessionale nel sistema principale di inerzia:

$$\begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 \\ 0 & J_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_\xi \\ k_\eta \end{Bmatrix}, \quad (4.40)$$

si ottiene:

$$M_\xi = J_\xi k_\xi, \quad M_\eta = J_\eta k_\eta. \quad (4.41)$$

Dal rapporto tra le (4.41), tenendo conto delle (4.38) e (4.39), discende la cosiddetta *formula del coniugio* tra gli angoli α_n e α_s che determinano rispettivamente la posizione dell'asse neutro e dell'asse di sollecitazione nel sistema principale di inerzia:

$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_\xi}{J_\eta} = -\frac{\rho_\xi^2}{\rho_\eta^2}. \quad (4.42)$$

Si noti che il segno negativo a secondo membro della (4.42) indica che gli angoli α_n e α_s hanno tangente di segno opposto. Da ciò consegue che le due direzioni coniugate appartengono a quadranti diversi tra quelli individuati dalle direzioni principali.

4.4.2 Tensioni normali

Per valutare la tensione normale σ_z nel sistema obliquo Gns , si utilizza il sistema ortogonale Gxy , grazie al quale, tenendo conto che $\epsilon = 0$, si ottiene:⁴

$$\sigma_z \mathbf{e}_z = E \mathbf{k}_t \times (P - G) = E k \mathbf{e}_x \times (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y) = E k y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y. \quad (4.43)$$

Dalla (4.43), con l'ausilio della (4.35), si ha poi:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} \frac{y}{\sin \alpha_{ns}}, \quad (4.44)$$

e per via della seconda delle (4.32), si ha infine la *formula monomia della flessione deviata*:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} s. \quad (4.45)$$

⁴Cfr. la (4.1), p. 105.

Valutando la tensione normale σ_z nel sistema principale di inerzia, si ottiene invece:

$$\sigma_z \mathbf{e}_z = E \mathbf{k}_f \times (P - G) = E \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_z \\ k_\xi & k_\eta & 0 \\ \xi & \eta & 0 \end{bmatrix} = E (k_\xi \eta - k_\eta \xi) \mathbf{e}_z. \quad (4.46)$$

Utilizzando le (4.41) si ottiene infine la seguente *formula binomia della flessione deviata*:

$$\sigma_z = E \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta - E \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi, \quad (4.47)$$

dove J_ξ e J_η sono i momenti principali. La (4.47) è equivalente alla sovrapposizione di due flessioni rette, una secondo l'asse ξ e l'altra secondo l'asse η . Il segno negativo del secondo addendo dipende dal fatto che invertendo l'ordine degli assi ξ e η , la coppia di assi diventa sinistra. D'altronde un momento M_η positivo tende le fibre dalla parte delle ξ negative. Con l'ausilio delle (4.38) la (4.47) si può anche scrivere nella forma:

$$\sigma_z = EM \left(\frac{\sin \alpha_s}{J_\xi} \eta + \frac{\cos \alpha_s}{J_\eta} \xi \right) \quad (4.48)$$

Annullando la (4.47) oppure la (4.48) si ottiene l'equazione dell'asse neutro:

$$\frac{M_\xi}{J_\xi} \eta - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi = 0, \quad \text{oppure} \quad \frac{\sin \alpha_s}{J_\xi} \eta + \frac{\cos \alpha_s}{J_\eta} \xi = 0. \quad (4.49)$$

Dal confronto con la formula monomia (4.45) si ottiene l'identità:

$$\frac{s}{J_n} = \frac{\sin \alpha_s}{J_\xi} \eta + \frac{\cos \alpha_s}{J_\eta} \xi. \quad (4.50)$$

In un punto P appartenente all'asse di sollecitazione risulta:

$$\xi = s \cos \alpha_s, \quad \eta = s \sin \alpha_s, \quad (4.51)$$

e sostituendo nella (4.50) si ha infine:

$$\frac{1}{J_n} = \frac{\cos^2 \alpha_s}{J_\eta} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{J_\xi}, \quad (4.52)$$

relazione che permette il calcolo del momento di inerzia J_n nel sistema principale. Alternativamente si possono utilizzare le formule di rotazione

che forniscono il momento di inerzia J_x rispetto all'asse neutro valutato con distanze ortogonali:

$$J_x = J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n, \quad (4.53)$$

dove α_n è l'angolo che determina l'asse neutro n nel sistema principale. Il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro valutato con distanze in direzione dell'asse di sollecitazione s , tenendo conto della (4.34) e della (4.36), vale allora:

$$J_n = \frac{J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)}, \quad (4.54)$$

dove α_s è l'angolo che determina l'asse di sollecitazione s nel sistema principale. Si consideri poi che tra le coordinate (ξ, η) principali e quelle (x, y) nel sistema non principale Gxy vale la seguente formula di trasformazione:

$$y = \eta \cos \alpha_n - \xi \sin \alpha_n. \quad (4.55)$$

Tenendo allora conto della seconda delle (4.32) e della (4.36) si ottiene la coordinata s nel sistema coniugato Gns :

$$s = \frac{\eta \cos \alpha_n - \xi \sin \alpha_n}{\sin (\alpha_s - \alpha_n)}. \quad (4.56)$$

◇ ◇ ◇

La (4.52) può anche essere ottenuta a partire dalla (4.54), utilizzando la formula di coniugio (4.42) nella forma:

$$\frac{J_\xi}{J_\eta} = - \frac{\sin \alpha_n \sin \alpha_s}{\cos \alpha_n \cos \alpha_s}, \quad (4.57)$$

e la relazione trigonometrica:

$$\sin (\alpha_s - \alpha_n) = \sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n. \quad (4.58)$$

Si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} J_n & \left(\frac{\cos^2 \alpha_s}{J_\eta} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{J_\xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)} \left(\frac{J_\xi}{J_\eta} \cos^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s + \sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s + \frac{J_\eta}{J_\xi} \sin^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s \Big) \\
& = \frac{1}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)} \left(-\sin \alpha_n \sin \alpha_s \cos \alpha_n \cos \alpha_s + \sin^2 \alpha_n \cos^2 \alpha_s \right. \\
& \quad \left. + \cos^2 \alpha_n \sin^2 \alpha_s - \sin \alpha_n \sin \alpha_s \cos \alpha_n \cos \alpha_s \right) \\
& = \frac{1}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)} \left\{ -\cos \alpha_s \sin \alpha_n (\sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n) \right. \\
& \quad \left. + \sin \alpha_s \cos \alpha_n (\sin \alpha_s \cos \alpha_n - \cos \alpha_s \sin \alpha_n) \right\} \\
& = \frac{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)}{\sin^2 (\alpha_s - \alpha_n)} = 1, \quad (4.59)
\end{aligned}$$

e ne risulta allora la (4.52).

◇ ◇ ◇

4.4.3 Sezioni omogenee

Nel caso di sezione omogenea la formula binomia (4.47), valida nel sistema principale $G\xi\eta$, si scrive:

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi, \quad (4.60)$$

dove ora è sottinteso che $J_\xi = \int_A \eta^2 dA$ e $J_\eta = \int_A \xi^2 dA$ sono i momenti di inerzia principali della sola area, ovverossia calcolati a meno del modulo di Young. L'equazione (4.60) è lineare in ξ e η . Nel caso di sezione composta da più materiali, quindi omogenea a tratti, la tensione normale è invece lineare solo limitatamente alle aree dei vari materiali.

Ancora nel caso di sezione omogenea, valida nel sistema coniugato Gns , la formula monomia (4.45) si scrive:

$$\sigma_z = \frac{M}{J_n} s, \quad (4.61)$$

avendo sottinteso che $J_n = \int_A s^2 dA$ è il momento di inerzia rispetto all'asse neutro della sola area, quindi calcolato a meno del modulo di Young. Dalla (4.61) consegue immediatamente che le tensioni normali, che si annullano sull'asse neutro, sono costanti su linee parallele all'asse neutro, linee di equazioni $s = \text{cost}$.

Si usa disegnare il diagramma delle tensioni normali prendendo quale fondamentale una parallela all'asse di sollecitazione e mandando le parallele all'asse neutro. Le rette radenti la sezione parallele all'asse neutro individuano i punti dove le tensioni normali sono massime e minime, mentre l'asse neutro individua i punti dove le tensioni sono nulle.

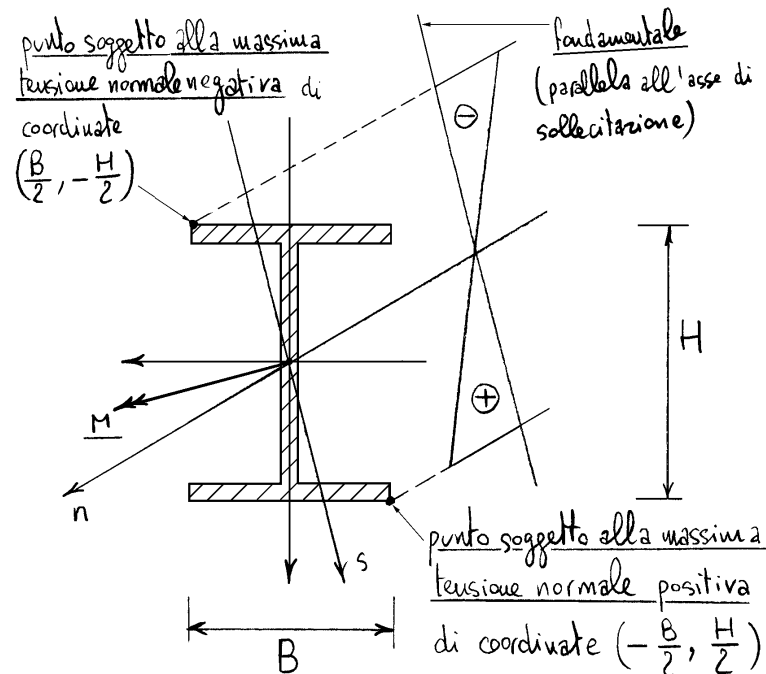
Il segno del momento stabilisce da quale parte rispetto all'asse neutro le tensioni normali sono positive. Nella figura è illustrato il caso di una sezione a doppio T. Data la doppia simmetria le tensioni normali massime e minime hanno lo stesso modulo e valgono:

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} + \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y},$$

$$\sigma_{x \min} = -\frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} - \frac{M_y}{J_y} \frac{B}{2} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}.$$

Se la sezione è in acciaio, avente uguale snervamento a trazione e compressione, la condizione che assicura alla tensione di essere interna al dominio di elasticità si scrive:

$$\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_s.$$

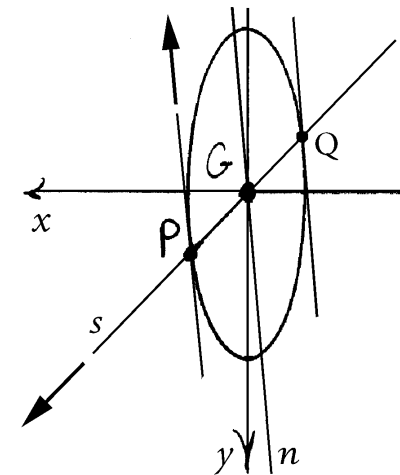


4.4.4 Proprietà dell'ellisse centrale di inerzia

L'ellisse centrale d'inerzia, di cui al par. 3.3.3 alla p. 86, racchiude in sé le proprietà di coniugio e inerziali delle rette baricentriche, proprietà che sono alla base, come visto, dello studio della flessione nelle travi. Nel seguito l'unico sistema di riferimento utilizzato è quello principale di inerzia che per semplicità sarà indicato con Gxy .

Proprietà delle tangenti. La direzione n , coniugata di una retta s che interseca l'ellisse nei punti P e Q , è fornita dalle tangenti all'ellisse negli stessi punti P e Q (che, per la simmetria dell'ellisse rispetto ai propri assi, sono parallele tra loro).

Dimostrazione. Infatti, siano e_s e e_n i versori rispettivamente della direzione orientata del vettore $P - G$ e della tangente all'ellisse nel punto P . Derivando l'equazione dell'ellisse rispetto alla coordinata lunghezza d'arco



definita a partire da un punto arbitrario dell'ellisse, si ottiene allora:

$$2\overline{MPG} e_s \cdot (J^{-1} e_n) = 0, \quad (4.62)$$

avendo tenuto conto della simmetria del tensore di Eulero J , del fatto che la derivata del punto uguaglia il versore e_n e avendo indicato con $\mathcal{M}$ la

massa totale e con $\overline{PG}$ il modulo del vettore $P - G$. Se α_n e α_s sono gli angoli che individuano, nel sistema principale di inerzia $Gx'y'$, le direzioni orientate dei versori $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}_s$ rispettivamente, la rappresentazione algebrica della (4.62) nel sistema principale si scrive:

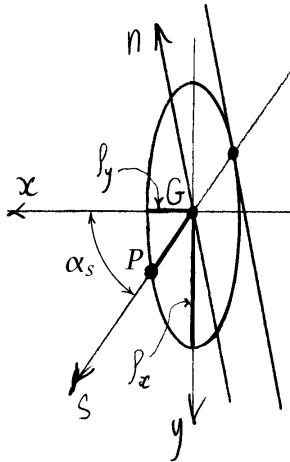
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_s & \sin \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_n \\ \sin \alpha_n \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.63)$$

Lo sviluppo della (4.63) conduce alla relazione di coniugio:

$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_x}{J_y}, \quad (4.64)$$

come volevasi dimostrare. ■

Proprietà dei semidiametri. *Il generico semidiametro dell'ellisse, individuato dal generico punto P , ha quale valore il raggio di inerzia ρ_n relativo all'asse n coniugato dell'asse s contenente il semidiametro stesso, raggio di inerzia calcolato con distanze valutate in direzione s .*



Dimostrazione. Infatti la rappresentazione algebrica dell'equazione dell'el-

lisce nel sistema principale di inerzia $Gx'y'$ si scrive:

$$\mathcal{M}\overline{PG}^2 \begin{bmatrix} \cos \alpha_s & \sin \alpha_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_s \\ \sin \alpha_s \end{Bmatrix} = 1. \quad (4.65)$$

Lo sviluppo della (4.65) conduce alla relazione:

$$\overline{PG}^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha_s}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{\rho_x^2} \right) = 1. \quad (4.66)$$

Tenendo conto che moltiplicando la (4.52) per la massa totale $\mathcal{M}$, nell'attuale contesto in cui il sistema principale è indicato con $Gx'y'$, risulta:

$$\frac{1}{\rho_n^2} = \frac{\cos^2 \alpha_s}{\rho_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{\rho_x^2}, \quad (4.67)$$

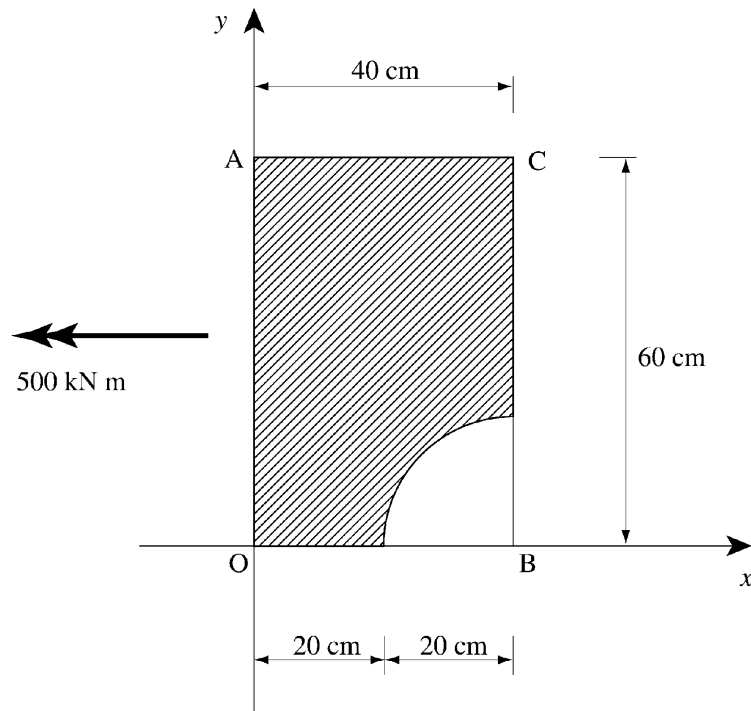
dalla (4.66) si ottiene:

$$\overline{PG}^2 = \rho_n^2, \quad (4.68)$$

come volevasi dimostrare. ■

4.4.5 Sezione rettangolare con un intaglio

Si consideri la seguente sezione rettangolare con un intaglio in forma di settore circolare, già in precedenza risolta per quel che riguarda le sue proprietà inerziali. Si supponga agente una coppia flettente di 500 kNm di asse momento orizzontale.

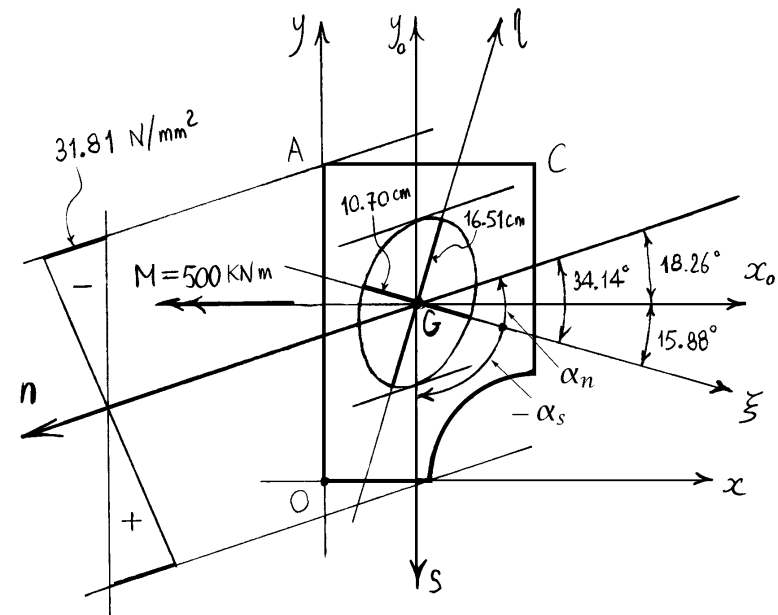


Poiché le direzioni principali sono inclinate rispetto alla orizzontale, la flessione è deviata.

L'asse di sollecitazione è verticale e la sua inclinazione α_s rispetto alla direzione principale ξ vale:

$$\alpha_s = -(90^\circ - \hat{\xi}x_0) = -74.12^\circ,$$

essendo $\hat{\xi}x_0 = 15.88^\circ$. L'inclinazione α_n dell'asse neutro si ottiene allora applicando la formula di coniugio:



$$\tan \alpha_n \tan \alpha_s = -\frac{J_\xi}{J_\eta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 34.14^\circ.$$

avendo tenuto conto che:

$$\begin{cases} J_\xi = 568\,660 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 238\,600 \text{ cm}^4 \end{cases}.$$

Le componenti della coppia flettente nel riferimento principale valgono:

$$\begin{cases} M_\xi = -M \cos \hat{\xi} x_0 = -480.91 \text{ kNm} \\ M_\eta = -M \sin \hat{\xi} x_0 = -136.83 \text{ kNm} \end{cases}.$$

L'equazione della tensione normale si può scrivere nella forma:

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi.$$

Uguagliando a zero si ottiene l'equazione dell'asse neutro e indi, in accordo con la formula di coniugio:

$$\tan \alpha_n = \frac{M_\eta}{M_\xi} \frac{J_\xi}{J_\eta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 34.14^\circ,$$

avendo tenuto conto che se il punto di coordinate (ξ, η) sta sull'asse neutro allora $\frac{\eta}{\xi} = \tan \alpha_n$.

Il punto con la massima tensione di compressione è il punto A, di coordinate:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 60 \text{ cm} \end{cases},$$

nel sistema di coordinate Oxy . Ricordando che le coordinate del baricentro, sempre nel sistema Oxy , valgono:

$$\begin{cases} x_G = 18.27 \text{ cm} \\ y_G = 33.24 \text{ cm} \end{cases}.$$

si ottengono immediatamente per traslazione le coordinate del punto A nel sistema baricentrico Gx_0y_0 :

$$\begin{cases} x_{0A} = x_A - x_G = -18.27 \text{ cm} \\ y_{0A} = y_A - y_G = 27.76 \text{ cm} \end{cases}.$$

Per determinare le coordinate del punto A nel sistema principale baricentrico si consideri il vettore $A - G$ di componenti:

$$\{A - G\} = \begin{Bmatrix} x_{0A} \\ y_{0A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{Bmatrix},$$

rispetto alla base e_i associata al sistema Gx_0y_0 . Detta e_i^* la base associata al sistema principale $G\xi\eta$ risulta:

$$e_i^* = R_{\alpha_\xi} e_i,$$

dove R_{α_ξ} è la rotazione di $\alpha_\xi = -15.88^\circ$ dal sistema Gx_0y_0 a quello principale $G\xi\eta$. Si ha allora:

$$(A - G) \cdot e_i^* = (A - G) \cdot (R_{\alpha_\xi} e_i) = \{R_{\alpha_\xi}^T (A - G)\} \cdot e_i,$$

e le coordinate di $A - G$ nel sistema principale coincidono, come già si sapeva, con quelle di $R_{\alpha_\xi}^T (A - G)$ nel sistema Gx_0y_0 .

La matrice rotazione R_{α_ξ} del sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$ vale:

$$R_{\alpha_\xi} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_\xi & -\sin \alpha_\xi \\ \sin \alpha_\xi & \cos \alpha_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9618 & 0.2737 \\ -0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix}.$$

e dunque le coordinate (ξ_A, η_A) valgono:

$$\begin{pmatrix} \xi_A \\ \eta_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9618 & -0.2737 \\ 0.2737 & 0.9618 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -18.27 \text{ cm} \\ 27.76 \text{ cm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24.89 \text{ cm} \\ 20.74 \text{ cm} \end{pmatrix},$$

La tensione σ_A vale infine:

$$\sigma_A = \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A = -31.81 \text{ N/mm}^2$$

Se si vuole invece applicare la formula monomia occorre calcolare il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro. Utilizzando le formule di rotazione si ottiene:

$$J_n = \frac{J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 \hat{n}s} = 515280 \text{ cm}^4,$$

con $\alpha_n = 34.14^\circ$ e dove si è tenuto conto che la formula di rotazione fornisce il momento di inerzia valutato con distanze ortogonali mentre nella formula monomia interviene il momento di inerzia valutato con distanze nella direzione dell'asse di sollecitazione. L'angolo $\hat{n}s$ tra asse di sollecitazione e asse neutro vale:

$$\hat{n}s = (90^\circ - \hat{x}_0 n) = 71.74^\circ,$$

essendo:

$$\hat{x}_0 n = \hat{\xi} n - \hat{\xi} x_0 = 34.14^\circ - 15.88^\circ = 18.26^\circ.$$

La coordinata di A in direzione s nel sistema Gns vale:

$$s_A = -(60 \text{ cm} - y_G) - x_G \tan \hat{x}_0 n = -32.79 \text{ cm}.$$

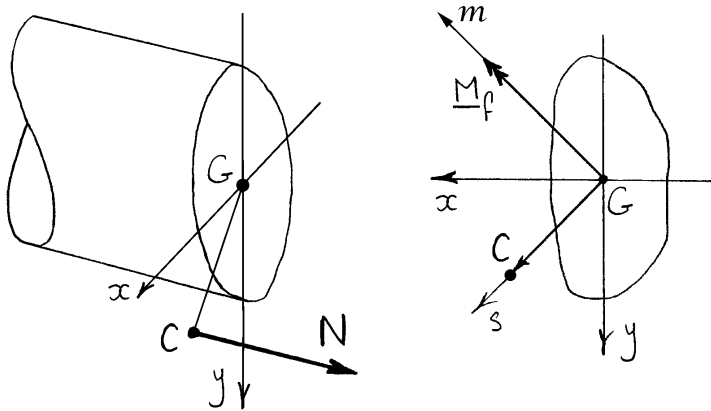
Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M}{J_n} s_A = - \frac{5 \times 10^8 \text{ Nmm}}{5.1528 \times 10^9 \text{ mm}^4} 32.79 \text{ mm} = \\ &= -31.81 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

in accordo con il risultato della formula binomia.

4.5 Forza normale eccentrica

Si ha *forza normale eccentrica* quando la sezione è soggetta ad una forza normale N con retta d'azione non baricentrica. Si ricorda che il punto C intersezione tra sezione e retta d'azione è detto *centro di sollecitazione*.



La forza normale eccentrica si compone della somma di una forza normale centrata di uguale valore N e di una flessione, in generale deviata, dovuta al momento M_f di N rispetto al baricentro:

$$M_f = M e_m = (C - G) \times N e_z, \quad (4.69)$$

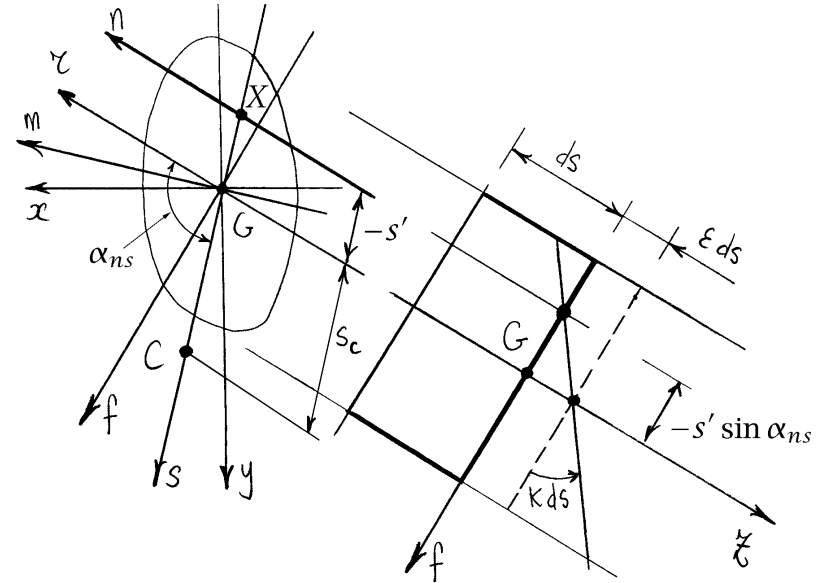
dove e_z è il versore normale alla sezione retta e m quello dell'asse momento. Dalla (4.69) risulta che M_f è ortogonale al vettore $C - G$, il che comporta che la direzione di tale vettore individua l'asse s di sollecitazione della flessione dovuta alla forza normale eccentrica. L'asse coniugato di s , cioè l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica, nel presente contesto sarà indicato con il simbolo r .

4.5.1 Asse neutro

Si assume come riferimento il sistema baricentrico coniugato non ortogonale $Gr s$ definito dalla flessione associata alla forza normale eccentrica. La trasformazione rigida relativa di una sezione retta vicina a quella

considerata si compone di una traslazione nella direzione ortogonale z di ampiezza ϵds , con ϵ dilatazione della linea d'asse baricentrica, e di una rotazione $k_f ds$ attorno all'asse neutro r baricentrico della flessione associata alla forza normale eccentrica:

$$k_f = k e_r. \quad (4.70)$$



La dilatazione della fibra longitudinale per il generico punto P della sezione vale allora:

$$\epsilon_P = \epsilon + k (s \sin \alpha_{ns}), \quad (4.71)$$

dove $s \sin \alpha_{ns}$ è la coordinata f del punto P nel sistema ortogonale $Gr f$ individuato dall'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica. La (4.71) si annulla nei punti di una retta n di equazione:

$$s = -\frac{\epsilon}{k \sin \alpha_{ns}}, \quad (4.72)$$

che assume quindi il significato di *asse neutro della forza normale eccentrica*. Si noti che tale asse risulta essere parallelo all'asse neutro r della

flessione associata alla forza normale eccentrica. Si noti anche che globalmente la sezione ruota di $k ds$ attorno a tale asse. Inoltre l'intersezione X tra asse neutro n e asse di sollecitazione s è individuata, sull'asse di sollecitazione, dalla coordinata s' che per la (4.72) vale:

$$s' = -\frac{\epsilon}{k \sin \alpha_{ns}}. \quad (4.73)$$

Da quanto detto e se si assume quale riferimento il sistema non ortogonale Xns , consegue che:

$$\epsilon_P = k (s \sin \alpha_{ns}). \quad (4.74)$$

Si faccia attenzione al fatto che ora s indica la coordinata del generico punto P ancora in direzione dell'asse di sollecitazione ma nel sistema non ortogonale Xns .

Valutando la relazione (4.69) nel sistema ortogonale Gms :

$$M \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_z \\ 0 & s_C & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

si ottiene:

$$M = N s_C, \quad (4.76)$$

dove s_C è la coordinata del centro di sollecitazione C sia nel sistema ortogonale Gms che nel sistema coniugato $Gr s$. Dai legami costitutivi assiale e flessionale, tenendo anche conto della (4.76), si ottiene:

$$\epsilon = \frac{N}{\mathcal{M}}, \quad k = \frac{M}{J_r \sin \alpha_{ns}} = \frac{N}{\mathcal{M}} \frac{s_C}{\rho_r^2 \sin \alpha_{ns}}, \quad (4.77)$$

dove $\mathcal{M}$ è la massa totale della sezione retta e $J_r = \int_A E s^2 dA$ il momento di inerzia rispetto all'asse r con distanze valutate nella direzione coniugata s . Inserendo le (4.77) nella (4.73) si ottiene infine l'intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione nella forma:

$$s' = -\frac{\rho_r^2}{s_C}. \quad (4.78)$$

Si noti che il segno negativo a secondo membro dell'uguaglianza significa che il centro di sollecitazione e l'asse neutro sono da parte opposta rispetto al baricentro.

4.5.2 Tensione normale

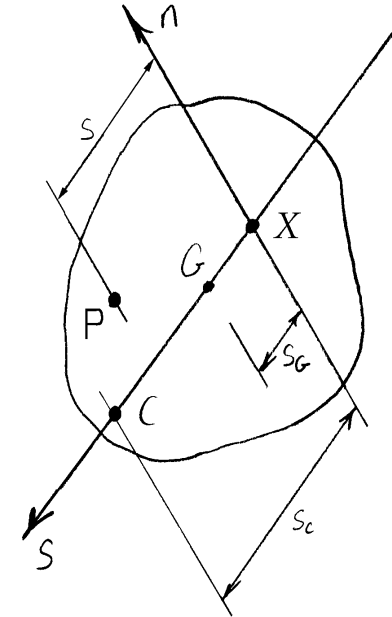
Nel generico punto P della sezione retta la tensione normale risulta $\sigma_z = E \epsilon_P$. Dalle (4.71) e (4.77) si ottiene allora la seguente *formula binomia della forza normale eccentrica*, valida nel sistema $Gr s$:

$$\sigma_z = E \left(\frac{N}{\mathcal{M}} + \frac{M}{J_r} s \right). \quad (4.79)$$

Dalla (4.74), valida nel sistema Xns , si ottiene invece:

$$\sigma_z = E (k \sin \alpha_{ns}) s. \quad (4.80)$$

Detta σ_z^r la tensione normale in corrispondenza dell'asse neutro r della



flessione associata alla forza normale eccentrica, asse definito da $s = 0$ nel sistema $Gr s$ e da $s = s_G$ nel sistema Xns , si ha, come si evince dalla (4.79):

$$\sigma_z^r = E \frac{N}{\mathcal{M}}. \quad (4.81)$$

Valutando allora la (4.80), valida nel sistema Xns , per $s = s_G$ e ricordando il teorema di Varignon, si ottiene:

$$k \sin \alpha_{ns} = \frac{N}{Ms_G} = \frac{N}{S_n}, \quad (4.82)$$

dove $S_n = \int_A E s \, dA$ rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro n della forza normale eccentrica, con distanze valutate nella direzione coniugata s . Inserendo la (4.82) nella (4.80) si ottiene infine la seguente *formula monomia della forza normale eccentrica*, valida nel sistema Xns :

$$\sigma_z = E \frac{N}{S_n} s. \quad (4.83)$$

Alla relazione (4.83) si arriva più semplicemente imponendo che la tensione normale sia proporzionale alla forza normale N applicata, alla distanza s dall'asse neutro e al modulo di Young:

$$\sigma_z = aENs, \quad (4.84)$$

e che inoltre valga EN/M in corrispondenza di un punto P posto sull'asse baricentrico parallelo all'asse neutro:

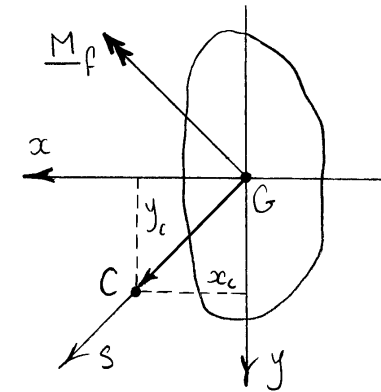
$$aENs_G = E \frac{N}{M}. \quad (4.85)$$

Si noti anche che adottando un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Xxy , con l'asse x coincidente con l'asse neutro n , si ottiene la formula:

$$\sigma_z = E \frac{N}{S_x} y. \quad (4.86)$$

In componenti nel sistema principale di inerzia Gxy risulta:

$$\underline{M}_f = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x_c & y_c & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix} = Ny_c \underline{e}_x - Nx_c \underline{e}_y,$$



e quindi:

$$\begin{cases} M_x = Ny_c \\ M_y = -Nx_c \end{cases}.$$

La tensione normale può quindi essere espressa, relativamente al sistema Gxy principale di inerzia, tramite la seguente formula trinomia:

$$\sigma_z = E \frac{N}{M} + E \frac{M_x}{J_x} y - E \frac{M_y}{J_y} x. \quad (16)$$

Questa può poi porsi nella forma:

$$\sigma_z = E \left(\frac{N}{M} + \frac{Ny_c}{J_x} y + \frac{Nx_c}{J_y} x \right) =$$

$$= E \frac{N}{M} \left(1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x \right), \quad (17)$$

dove $\rho_x^2 = J_x/M$ e $\rho_y^2 = J_y/M$ rappresentano i quadrati dei raggi di inerzia principali.

Nel caso omogeneo la (16) prende il nome di formula di Navier e assume la forma:

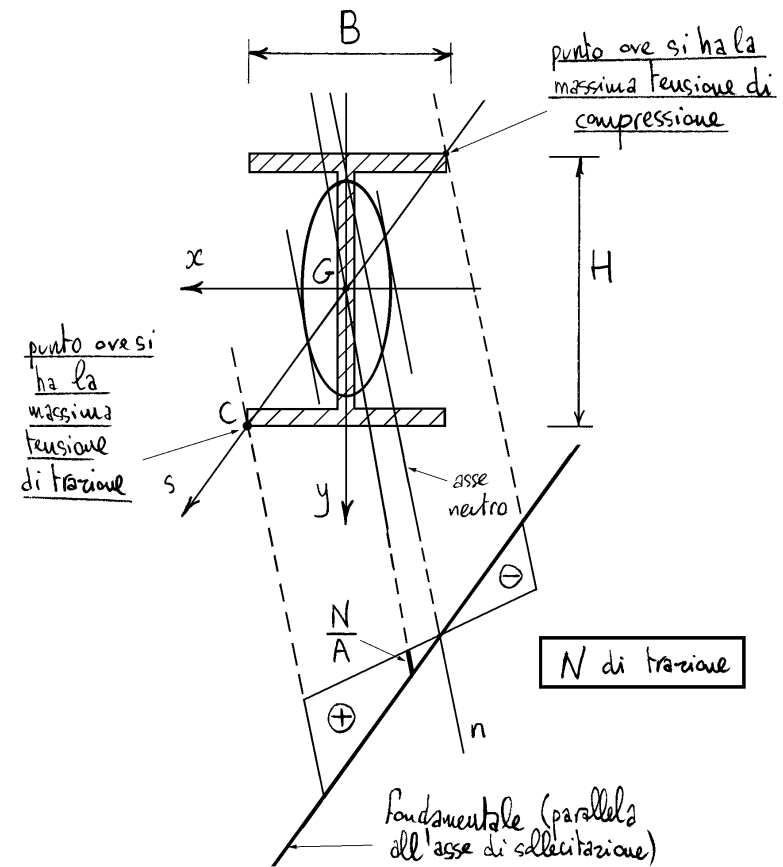
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x, \quad (18)$$

dove ora J_x e J_y sono i momenti di inerzia della sola area (con distribuzione di massa $\mu = 1$).

4.5.3 Sezioni omogenee

Le tensioni normali si annullano sull'asse neutro e sono costanti su rette parallele all'asse neutro. E' allora consuetudine di riportare tale valore costante nella direzione dell'asse neutro a partire da una retta parallela

all'asse di sollecitazione, presa quale riferimento. Le rette radenti parallele all'asse neutro individuano i punti di massima tensione normale a trazione e a compressione, nel caso l'asse neutro tagli la sezione. Se invece l'asse neutro non taglia la sezione, allora le



tensioni normali sono tutte dello stesso segno, positivo se lo sforzo normale è positivo e negativo nel caso opposto. In tal caso la tensione normale massima si ha in corrispondenza del punto (o dei punti) individuati dalla retta radente più lontana dall'asse neutro.

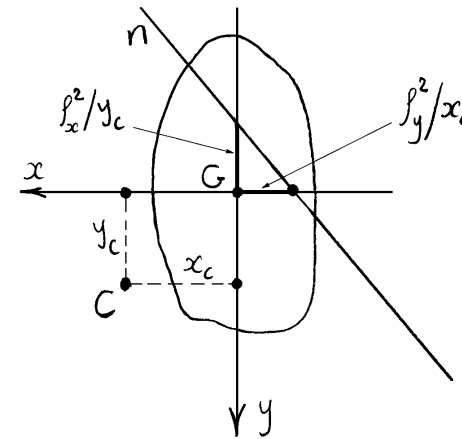
L'appartenenza al dominio di elasticità richiede alle massime tensioni, di trazione e di compressione, di essere inferiori alle rispettive tensioni di snervamento.

4.5.4 Antipolarità di inerzia

Equazione segmentaria dell'asse neutro.

L'equazione dell'asse neutro nel sistema baricentrico Gxy si può ottenere uguagliando a zero la (17) ottenendo così la seguente equazione segmentaria dell'asse neutro:

$$\frac{x}{-I_y^2/x_c} + \frac{y}{-I_x^2/y_c} = 1.$$



Le intersezioni x' e y' dell'asse neutro con gli assi x (di equazione $y=0$) e y (di equazione $x=0$) rispettivamente, valgono:

$$\begin{cases} x' = -\frac{I_y^2}{x_c} \\ y' = -\frac{I_x^2}{y_c} \end{cases}.$$

Corrispondenza tra rette e punti.

Si noti che, data una retta n non baricentrica, è possibile ricavare le coordinate del centro di sollecitazione C al quale corrisponde n quale asse neutro :

$$\begin{cases} x_c = - \frac{I_y^2}{x'} \\ y_c = - \frac{I_x^2}{y'} \end{cases} ,$$

dove ancora x' e y' sono le intersezioni con gli assi x e y dell'asse n .

Si vede così che sussiste una relazione biunivoca fra tutte le rette non baricentriche del piano e tutti i punti del piano (escluso il baricentro).

Questa corrispondenza tra punti e rette è detta antipolarità di inerzia. La retta n corrispondente ad un punto

C è detta antipolare di C , mentre il punto C corrispondente di una retta n è detto antipolo o centro relativo della retta n .

Una prima proprietà dell'antipolarità di inerzia si ha notando che le intersezioni x' e y' dell'asse neutro hanno sempre segno opposto rispetto alle coordinate x_c e y_c del centro di sollecitazione, per cui l'asse neutro è sempre situato dalla parte opposta di C rispetto al baricentro, come d'altronde era già stato stabilito in precedenza.

Inoltre, come già visto, l'asse neutro n corrispondente al centro di sollecitazione C ha la direzione dell'asse x coniugato dell'asse di sollecitazione s (direzione fornita dal vettore $C-G$). D'altronde l'asse neutro

ha equazione:

$$\frac{N}{M} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

mentre la sua parallela ε per il baricentro risulta:

$$\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0 ,$$

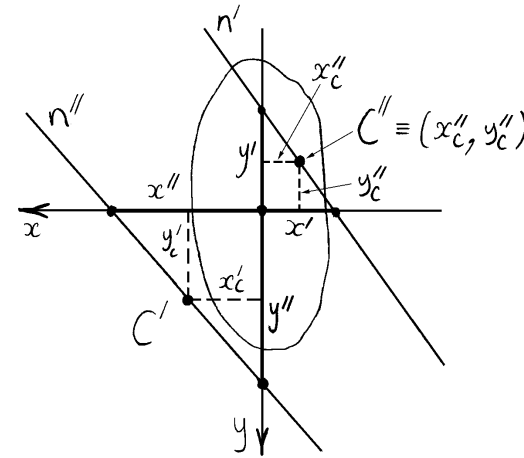
equazione dell'asse neutro nel caso in cui agisce il solo momento $\underline{M}_p$.

Una conseguenza di questa proprietà è che tutte le rette parallele ad ε hanno centro di sollecitazione sull'asse s coniugato di ε .

Teorema di reciprocità.

Si vuole poi mostrare che vale il teorema di reciprocità: "Se una retta n'' contiene il centro relativo C' di n' allora n' contiene il centro relativo C'' di n'' ".

Sia quindi n'' una generica retta passante per C' ed avente intersezioni x'' e y'' con gli assi x e y . La



sua equazione segmentaria vale:

$$\frac{x}{x''} + \frac{y}{y''} = 1 ,$$

e quindi per ipotesi vale la condizione:

$$\frac{x'_c}{x''} + \frac{y'_c}{y''} = 1 ,$$

poiché n'' contiene C' . Il centro relativo C'' di n'' ha coordinate:

$$\begin{cases} x''_c = -\frac{J_y}{J_x} \frac{y'_c}{y''} \\ y''_c = -\frac{J_x}{J_y} \frac{x'_c}{x''} \end{cases} .$$

Poichè:

$$\frac{-f_y^2/x''}{-f_y^2/x_c'} + \frac{-f_x^2/y''}{-f_x^2/y_c'} = \frac{x_c'}{x''} + \frac{y_c'}{y''} = 1,$$

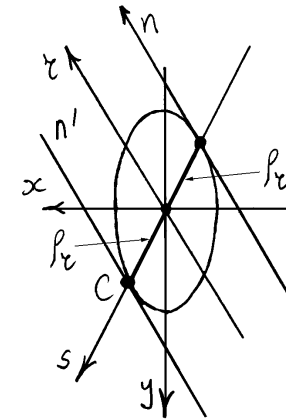
le coordinate del punto C'' soddisfanno l'equazione di n' :

$$\frac{x}{-f_y^2/x_c'} + \frac{y}{-f_x^2/y_c'} = 1,$$

e la retta n' contiene C'' , come volevasi dimostrare.

Polarità di inerzia.

Infine, la condizione $s' = -f_x^2/s_c$ mostra che se $s_c = f_x$, cioè se C si trova sull'ellisse centrale di inerzia, allora $s' = f_x$, ovvero la retta n è tangente all'ellisse nel punto opposto in diametro a C . Se al punto C facciamo corrispondere la retta n' simmetrica alla n rispetto al baricentro, la retta n' contiene il punto C . In questa nuova corrispondenza,



detta polarità di inerzia, i punti contenuti nella retta corrispondente individuano l'ellisse centrale di inerzia (che assume quindi il ruolo di conica fondamentale nella polarità di inerzia).

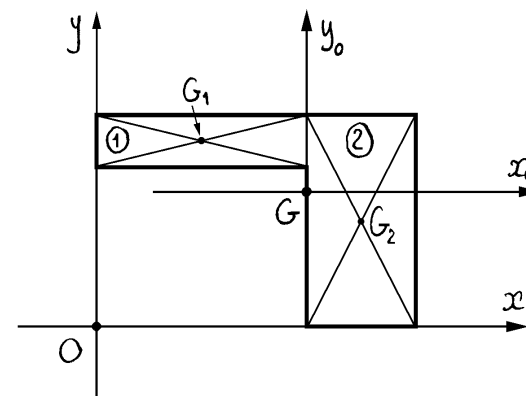
Non solo, ma la condizione $s' = -f_x^2/s_c$ ci informa anche del fatto che se $s_c > f_x$ (C esterno all'ellisse) allora $s' < f_x$ (n taglia l'ellisse) e viceversa.

4.5.5 Sezione composta di due rettangoli

Si suppone che la sezione in figura sia soggetta ad uno sforzo normale di compressione di 200 kN, applicato in corrispondenza del punto C :

1. determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);

2. disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
3. determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η ;
4. disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
5. calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
6. determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
7. calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



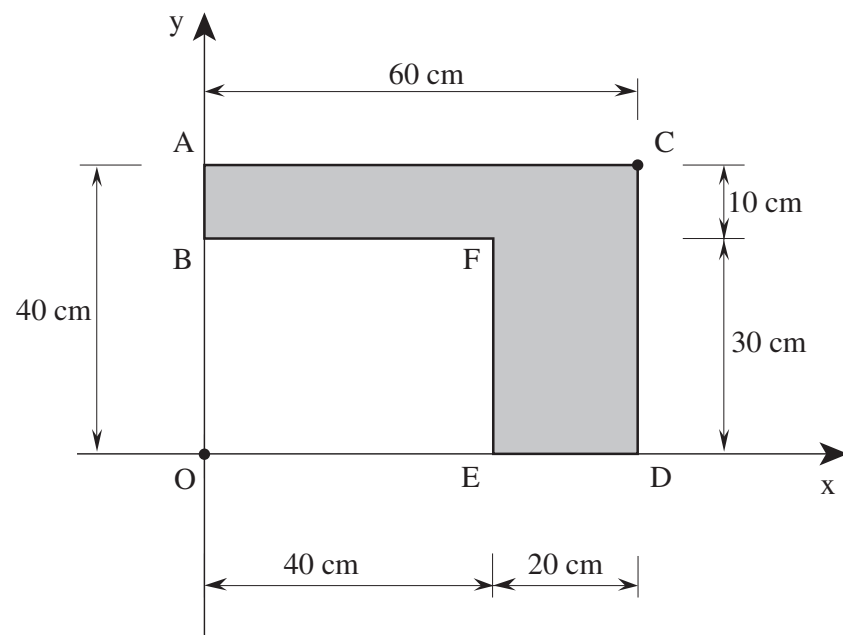
Aree e momenti statici (sistema Oxy):

	A/cm^2	x_G/cm	y_G/cm	S_x/cm^3	S_y/cm^3
①	400	20	35	14 000	8 000
②	800	50	20	16 000	40 000
TOT	1 200	40	25	30 000	48 000

Coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{48\,000 \text{ cm}^3}{1\,200 \text{ cm}} = 40 \text{ cm} ,$$

$$y_G = \frac{30\,000 \text{ cm}^3}{1\,200 \text{ cm}} = 25 \text{ cm} .$$



Momenti di inerzia e centrifugo rispetto agli assi x_0
e y_0 baricentrici:

$$\begin{cases} J_{x_0}^{(1)} = \frac{40 \text{ cm} \times (10 \text{ cm})^3}{12} + A^{(1)} (y_G - y_{G1})^2 \\ J_{x_0}^{(2)} = \frac{20 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{(2)} (y_G - y_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{y_0}^{(1)} = \frac{10 \text{ cm} \times (40 \text{ cm})^3}{12} + A^{(1)} (x_G - x_{G1})^2 \\ J_{y_0}^{(2)} = \frac{40 \text{ cm} \times (20 \text{ cm})^3}{12} + A^{(2)} (x_G - x_{G2})^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} J_{x_0 y_0}^{(1)} = A^{(1)} (y_G - y_{G1}) (x_G - x_{G1}) \\ J_{x_0 y_0}^{(2)} = A^{(2)} (y_G - y_{G2}) (x_G - x_{G2}) \end{cases}.$$

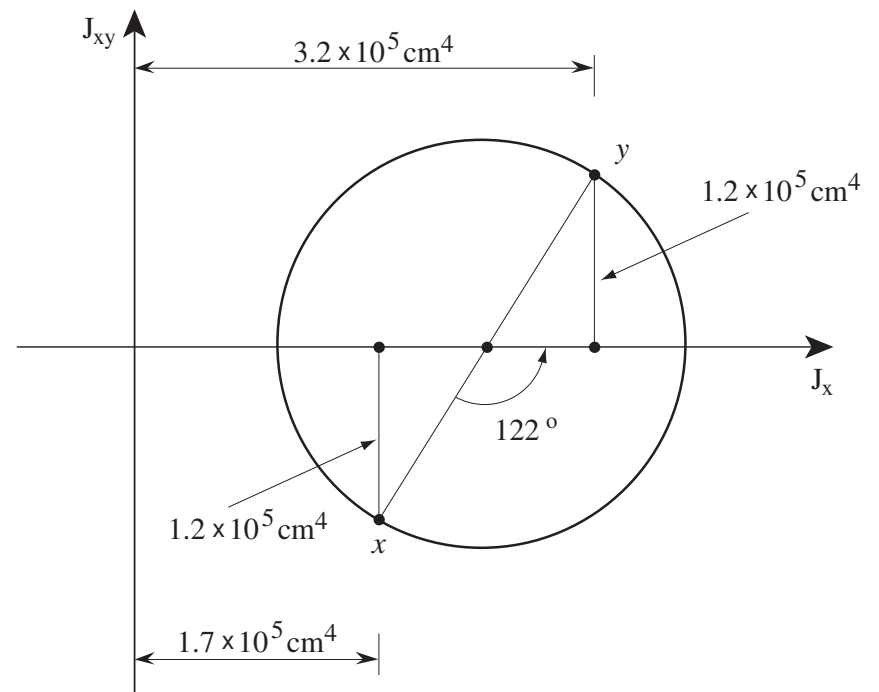
	J_{x_0}/cm^4	J_{y_0}/cm^4	$J_{x_0 y_0}/\text{cm}^4$
①	43 333	213 333	-80 000
②	126 667	106 667	-40 000
TOT	170 000	320 000	-120 000

Coordinate del baricentro:

$$\begin{aligned} A &= 1200 \text{ cm}^2 \\ S_x &= 30000 \text{ cm}^3 \Rightarrow x_G = 40 \text{ cm} \\ S_y &= 48000 \text{ cm}^3 \Rightarrow y_G = 25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Momenti di inerzia nel sistema baricentrico Gx_0y_0 :

$$\begin{aligned} J_{x0} &= 170000 \text{ cm}^4 \\ J_{y0} &= 320000 \text{ cm}^4 \\ J_{x0y0} &= -120000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



Momenti principali di inerzia:

$$\begin{Bmatrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{Bmatrix} = \frac{J_{x0} + J_{y0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x0} - J_{y0})^2 + 4J_{x0y0}^2} = \begin{Bmatrix} 386\,510 \text{ cm}^4 \\ 103\,490 \text{ cm}^4 \end{Bmatrix}.$$

Raggi principali di inerzia:

$$\rho_{\xi} = \sqrt{\frac{J_{\xi}}{A}} = 17.95 \text{ cm},$$

$$\rho_{\eta} = \sqrt{\frac{J_{\eta}}{A}} = 9.29 \text{ cm}.$$

Posizione degli assi principali di inerzia:

$$\alpha_{\xi} = \tan^{-1} \left\{ \frac{J_{x0} - J_{\xi}}{J_{x0y0}} \right\} = 61.00^{\circ}$$

Rotazione dal sistema Gx_0y_0 al sistema $G\xi\eta$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{\xi} & -\sin \alpha_{\xi} \\ \sin \alpha_{\xi} & \cos \alpha_{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4848 & -0.8746 \\ 0.8746 & 0.4848 \end{bmatrix}$$

Coordinate dei punti C, B, E nel sistema principale:

$$\{C - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 60 - 40 \\ 40 - 25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22.81 \text{ cm} \\ -10.22 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

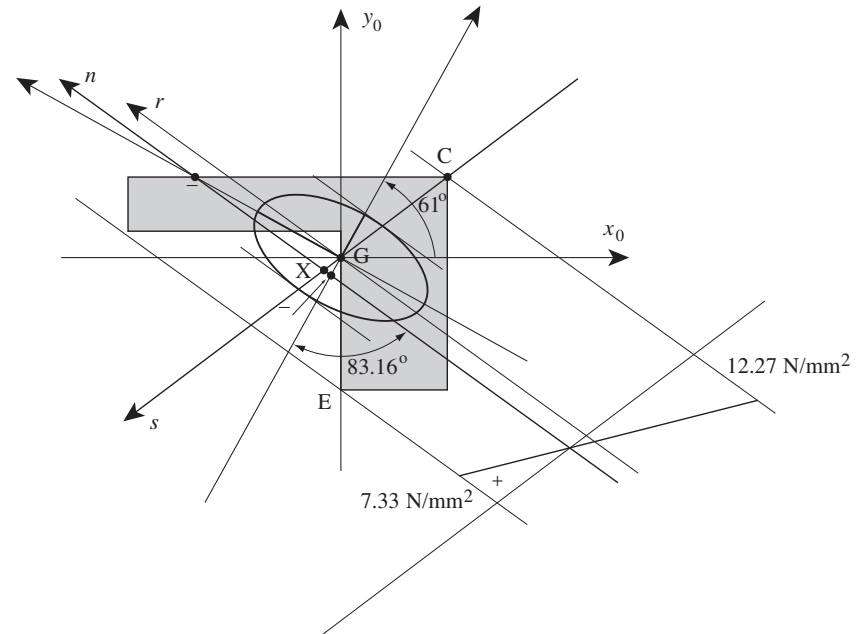
$$\{B - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 0 - 40 \\ 30 - 25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.02 \text{ cm} \\ 37.41 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

$$\{E - G\} = \mathbf{R}^T \begin{Bmatrix} 40 - 40 \\ 0 - 25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.87 \text{ cm} \\ -12.12 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\bar{\xi} = \frac{-\rho_{\eta}^2}{\xi_C} = -3.78 \text{ cm}$$

$$\bar{\eta} = \frac{-\rho_{\xi}^2}{\eta_C} = 31.51 \text{ cm}$$



Tensioni normali nei punti C, B, E:

$$N = -200 \text{ kN}$$

$$M_{\xi} = N\eta_C = 2\,044 \text{ kN cm}$$

$$M_{\eta} = -N\xi_C = 4\,563 \text{ kN cm}$$

$$\sigma_C = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_C - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_C = -12.27 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_B - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_B = 6.93 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_E = \frac{N}{A} + \frac{M_{\xi}}{J_{\xi}}\eta_E - \frac{M_{\eta}}{J_{\eta}}\xi_E = 7.33 \text{ N/mm}^2$$

Inclinazione dell'asse di sollecitazione nel sistema principale:

$$\alpha_s = \tan^{-1} \left\{ \frac{\eta_C}{\xi_C} \right\} = -24.13^{\circ}$$

Inclinazione dell'asse neutro nel sistema principale (due calcoli alternativi):

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left\{ -\frac{J_\xi}{J_\eta \tan \alpha_s} \right\} = 83.16^\circ$$

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left\{ -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} \right\} = 83.16^\circ$$

Angolo compreso tra l'asse di sollecitazione e l'asse neutro:

$$\widehat{s\hat{r}} = \alpha_r - \alpha_s = 107.29^\circ$$

Momento e raggio di inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \alpha_n + J_\eta \sin^2 \alpha_n}{\sin^2 \widehat{s\hat{r}}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha_s}{J_\eta} + \frac{\sin^2 \alpha_s}{J_\xi}} = 117\,920 \text{ cm}^4$$

$$\rho_r = \sqrt{\frac{J_r}{A}} = 9.91 \text{ cm}$$

Intersezione tra asse neutro e asse di sollecitazione:

$$\overline{CG} = \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2} = 25 \text{ cm}$$

$$\overline{GX} = \frac{\rho_r^2}{\overline{CG}} = 3.93 \text{ cm}$$

Momento statico rispetto all'asse neutro e tensione normale nel punto C (coordinate riferite al sistema Xns):

$$S_n = A s_G = -4\,717 \text{ cm}^3 \quad \text{dove} \quad s_G = -\overline{GX}$$

$$\sigma_C = \frac{N}{S_n} s_C = -12.27 \text{ N/mm}^2 \quad \text{dove} \quad s_C = -(\overline{CG} + \overline{GX})$$

4.5.6 Sezione circolare composta di due materiali

Data la sezione circolare di figura composta di due materiali di modulo di Young:

$$E_1 = 70 \text{ GPa}, \quad E_2 = 210 \text{ GPa},$$

e soggetta ad una forza normale N eccentrica di compressione di 250 kN applicata nel punto C :

1. calcolare il momento d'inerzia rispetto a un diametro (eventualmente omogeneizzato all'area di uno dei due materiali);
2. calcolare il raggio dell'ellisse centrale di inerzia;
3. disegnare l'asse di sollecitazione, l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica (quotando la sua inclinazione) e l'asse neutro della forza normale eccentrica (quotando la sua intersezione con l'asse di sollecitazione);
4. valutare il momento statico rispetto all'asse neutro (della forza normale eccentrica);
5. disegnare il diagramma quotato delle tensioni normali.

1. Tutti gli assi contenenti i diametri sono di simmetria e inoltre la sezione è invariante per rotazioni generiche attorno al centro comune delle due circonferenze. Ne consegue che tutti gli assi contenenti i diametri sono principali di inerzia e che i momenti di inerzia rispetto a questi assi sono uguali.

Siano:

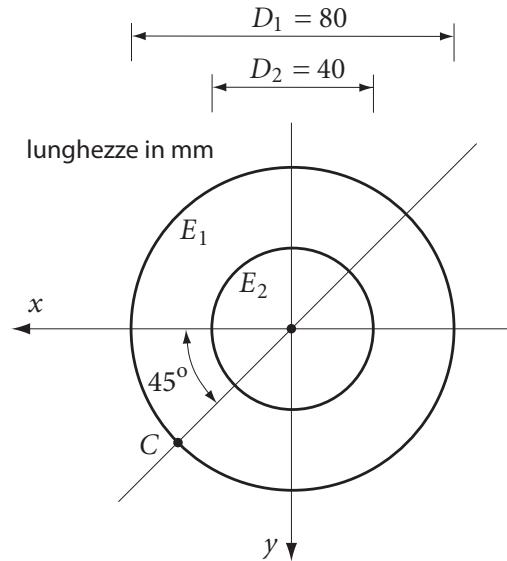
$$R_1 = \frac{D_1}{2} = 40 \text{ mm}, \quad R_2 = \frac{D_2}{2} = 20 \text{ mm},$$

i raggi del cerchio esterno ed interno rispettivamente. Il momento di inerzia della sola area J_1 della corona circolare 1 si valuta per differenza del contributo tra il cerchio esterno e quello interno:

$$J_1 = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4) = 1.8850 \times 10^6 \text{ mm}^4,$$

mentre il momento di inerzia J_2 della sola area del cerchio 2 vale:

$$J_2 = \frac{\pi}{4} R_2^4 = 1.2566 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$



Il momento di inerzia J rispetto ad un asse contenente un diametro vale allora:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_i E_i J_i \\
 &= (70 \times 10^3) (1.8850 \times 10^6) + (70 \times 10^3) (1.8850 \times 10^6) \\
 &= 1.5834 \times 10^{11} \text{ N mm}^2.
 \end{aligned}$$

Se si omogeneizza all'area del materiale 1, il coefficiente di omogeneizzazione vale:

$$n = \frac{E_2}{E_1} = \frac{210}{70} = 3.$$

Il momento di inerzia J^0 dell'area omogeneizzata rispetto ad un asse contenente un diametro vale allora:

$$\begin{aligned}
 J^0 &= J_1 + n J_2 = 1.8850 \times 10^6 + 3 \times (1.8850 \times 10^6) \\
 &= 2.2619 \times 10^6 \text{ mm}^4.
 \end{aligned}$$

2. Le aree A_2 e A_1 dei materiali 2 e 1 rispettivamente valgono:

$$A_2 = \pi R_2^2 = 1256.6 \text{ mm}^2, \quad A_1 = \pi R_1^2 - A_2 = 3769.9 \text{ mm}^2.$$

Ne risulta la seguente massa totale $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \sum_i E_i A_i = (70 \times 10^3) \times 3769.9 + (210 \times 10^3) \times 1256.6 \\
 &= 5.2779 \times 10^8 \text{ N},
 \end{aligned}$$

oppure la seguente area omogeneizzata:

$$A^0 = A_1 + n A_2 = 3769.9 + 3 \times 1256.6 = 7539.8 \text{ mm}^2.$$

L'ellisse centrale di inerzia nel caso in esame è una circonferenza di raggio:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}}} = \sqrt{\frac{J^0}{A^0}} = 17.32 \text{ mm}.$$

3. L'asse di sollecitazione s coincide con la congiungente il baricentro G con il centro di sollecitazione C ed è principale di inerzia. L'asse neutro r della flessione associate alla forza normale eccentrica è baricentrico e ortogonale all'asse di sollecitazione e quindi inclinato di 45° rispetto all'asse x . L'asse neutro n della forza normale eccentrica è parallelo all'asse r , è situato dalla parte opposta rispetto al baricentro e taglia l'ellisse centrale di inerzia dato che il centro di sollecitazione C ne è esterno.

L'intersezione X tra asse neutro n e asse di sollecitazione s è posta alla seguente distanza $\overline{GX}$ da G :

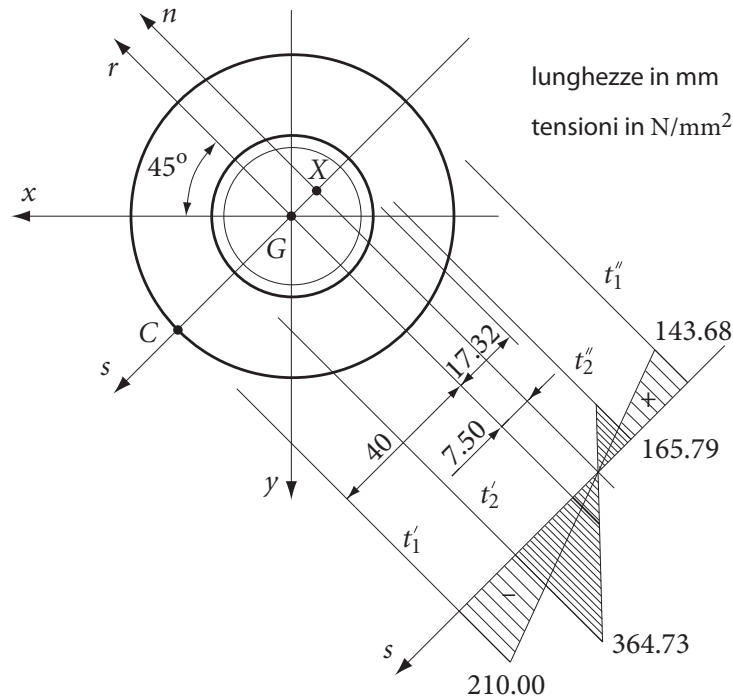
$$\overline{GX} = \frac{\rho^2}{\overline{GC}} = \frac{17.32^2}{40} = 7.50 \text{ mm},$$

dove $\overline{GC}$ è la distanza del centro di sollecitazione C dal baricentro G .

4. Per il teorema di Varignon il momento statico si ottiene concentrando la massa totale nel baricentro:

$$S_n = \mathcal{M} s_G = (5.2779 \times 10^8) \times 7.50 = 3.9584 \times 10^9 \text{ N mm},$$

dove s_G è la coordinata del baricentro G in direzione s nel sistema Xns , che con le convenzioni di figura è positiva.



Se si procede omogeneizzando, si ottiene il momento statico S_n^o omogeneizzato all'area del materiale 2:

$$S_n^o = A^o s_G = 7539.8 \times 7.50 = 56549 \text{ mm}^3.$$

5. Si considerino le radenti t'_1 e t''_1 all'area del materiale 1, parallele all'asse neutro, di coordinate rispettivamente:

$$s'_1 = \overline{GX} + R_1 = 7.5 + 40 = 47.5 \text{ mm},$$

$$s''_1 = \overline{GX} - R_1 = 7.5 - 40 = -32.5 \text{ mm}.$$

e quelle t'_2 e t''_2 radenti all'area del materiale 2, sempre parallele all'asse neutro, di coordinate rispettivamente:

$$s'_2 = \overline{GX} + R_2 = 7.5 + 20 = 27.5 \text{ mm},$$

$$s''_2 = \overline{GX} - R_2 = 7.5 - 20 = -12.5 \text{ mm},$$

Tenendo conto che $N = -250 \times 10^3 \text{ N}$, la tensione normale in corrispondenza di tali radenti vale rispettivamente:

$$\begin{aligned} \sigma'_1 &= E_1 \frac{N}{S_n} s'_1 = - (70 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 47.5 \\ &= -210.00 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''_1 &= E_1 \frac{N}{S_n} s''_1 = (70 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 32.5 \\ &= 143.68 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \sigma'_2 &= E_2 \frac{N}{S_n} s'_2 = - (210 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 27.5 \\ &= -364.73 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma''_2 &= E_2 \frac{N}{S_n} s''_2 = (210 \times 10^3) \times \frac{250 \times 10^3}{3.9584 \times 10^9} \times 12.5 \\ &= 165.79 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

Se si procede omogeneizzando si ottiene:

$$\sigma'_1 = \frac{N}{S_n^o} s'_1 = - \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 47.5 = -210.00 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma''_1 = \frac{N}{S_n^o} s''_1 = \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 32.5 = 143.68 \text{ N/mm}^2,$$

e:

$$\sigma'_2 = n \frac{N}{S_n^o} s'_2 = -3 \times \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 27.5 = -364.73 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma''_2 = n \frac{N}{S_n^o} s''_2 = 3 \times \frac{250 \times 10^3}{56549} \times 12.5 = 165.79 \text{ N/mm}^2.$$

4.5.7 Nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta il luogo dei centri di sollecitazione il cui asse neutro non taglia la figura.

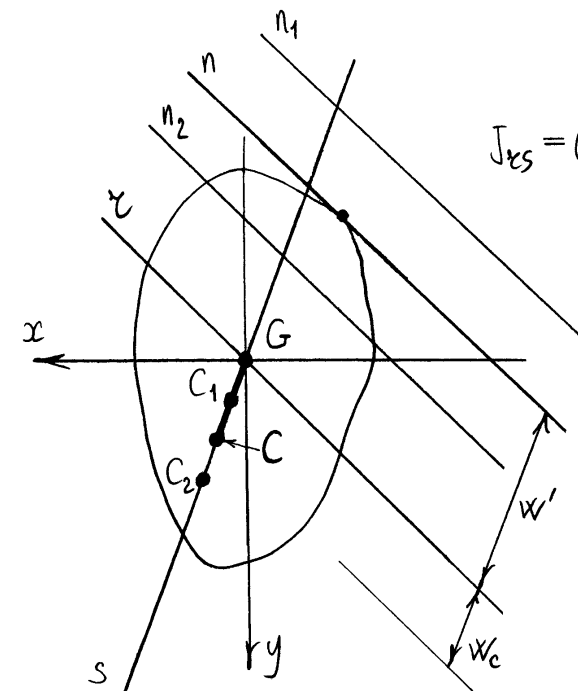
Ne consegue che se la forza normale eccentrica è di compressione ed applicata in un punto del nocciolo centrale di inerzia allora la sezione è tutta compressa (viceversa, se la forza normale è di trazione, allora la sezione è tutta tesa).

La conoscenza del nocciolo centrale di inerzia è importante nel caso di materiali che hanno scarsa resistenza a trazione. Infatti, se il dimensionamento di una struttura è eseguito in modo tale da far cadere il centro di sollecitazione (detto centro di pressione nel caso di strutture compresse) all'interno del nocciolo centrale di inerzia, allora si ha la certezza che non si sviluppano sollecitazioni di trazione.

Contorno del nocciolo quale luogo di punti

Il contorno del nocciolo è costituito dai centri relativi alle rette che toccano la figura senza tagliarla (rette radenti).

Infatti, sia n una retta radente e sia r la parallela a n per il baricentro G . Detta s la retta coniugata



di π allora il centro relativo C di n si trova su s dalla parte opposta di n rispetto al baricentro. Se la retta n viene allontanata dalla figura il punto C percorre il segmento CG e quindi tale segmento appartiene al nocciolo poichè se n si allontana dalla figura allora non la taglia. Viceversa, se n si muove verso il baricentro, tagliando quindi la figura, C si muove su s allontanandosi dal baricentro generando un tratto di s che non appartiene al nocciolo. Quindi il punto C è sul contorno del nocciolo, come volevasi dimostrare.

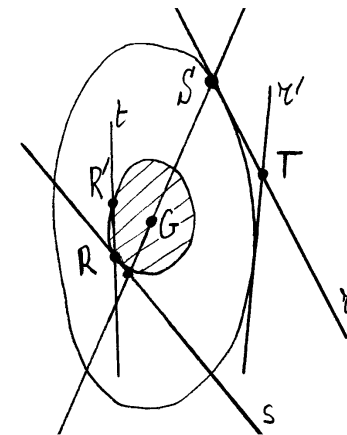
La lunghezza w_c del segmento CG è detta raggio di nocciolo. Se w' è la distanza, nella direzione dell'asse di sollecitazione s , della retta radente n dal baricentro, risulta:

$$w_c = \frac{J_z^2}{w'}$$

Contorno del nocciolo quale inviluppo di rette

Il nocciolo centrale di inerzia rappresenta anche l'inviluppo delle antipolari dei punti dell'inviluppo delle rette radenti la figura, ovvero se S è un punto dell'inviluppo delle rette radenti la figura allora la sua antipolare s è tangente al nocciolo.

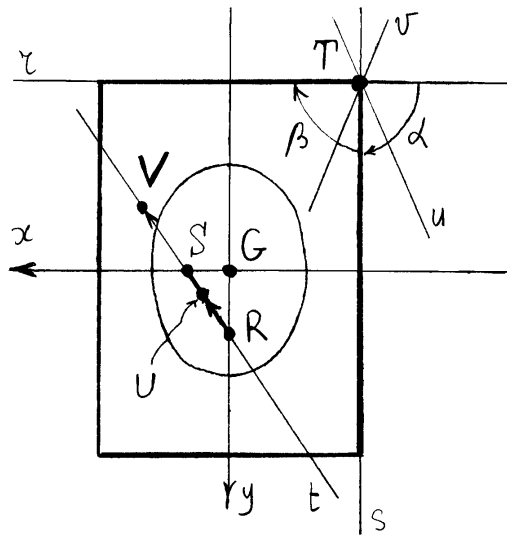
Infatti sia π una retta per S radente la figura e sia R il suo antipolo. Si prenda una seconda retta radente π' e siano T la sua intersezione con π e R' il suo antipolo. Per costruzione, R e R' stanno sul contorno del nocciolo e la loro congiungente t , per



reciprocità, è l'antipolare del punto T . Si faccia tendere τ' a τ . Allora T tende ad S e quindi la retta t tende all'antipolare s di S . Ma poiché risulta anche che R' tende ad R , la retta t tende alla tangente al nocciolo in R , come volevasi dimostrare.

Corrispondenza tra vertici e segmenti

Si supponga che sul contorno della figura di cui si vuole determinare il nocciolo centrale di inerzia vi sia un vertice T e siano r e s le due tangenti in corrispondenza del vertice. Con riferimento alla figura seguente, che



senza perdita di generalità rappresenta un rettangolo, siano R e S i centri

relativi delle rette r e s rispettivamente. Nel caso del rettangolo di figura i due centri relativi precedenti sono posti rispettivamente sugli assi y e x rispettivamente, ma ciò è inessenziale.

I punti R ed S individuano, per reciprocità, la retta t coniugata del vertice T . Sempre per reciprocità, ogni retta contenente il vertice T ha antipolo che giace su t . Muovendo allora con continuità una retta v all'interno dell'angolo α individuato dalle rette per T che non tagliano la figura a partire dalla retta τ , il punto U centro relativo alla retta u si muove, a partire dal punto R , in direzione del punto S . Tale movimento è continuo poiché il baricentro appartiene all'involuppo delle rette radenti e quindi una retta v per T che non taglia la figura non conterrà mai il baricentro.

Si tenga conto che l'unica discontinuità si ha quando la retta passa per il baricentro, poiché in tal caso la distanza della retta dal baricentro si annulla e quindi la distanza del suo antipolo dal baricentro diventa infinita.

Una retta v che invece si muove all'interno dell'angolo β contenente il baricentro ha centro relativo v che si muove, a partire da S' fino a tendere all'infinito quando la retta tende a divenire baricentrica, poiché in tal caso la distanza di v dal baricentro tende a zero. Superato il baricentro, il punto v compare dall'altra parte della retta t e tende al punto R al tendere di v alla retta τ .

Se ne conclude che il segmento RS' appartiene al contorno del nocciolo.

Si è quindi ottenuto il risultato generale che ogni volta che l'involuppo delle rette radenti presenta un vertice, a tale vertice corrisponde un segmento sul nocciolo. Poiché vale anche il risultato reciproco, e cioè che a un segmento sul contorno della figura corrisponde un vertice sul contorno del nocciolo, come può facilmente verificarsi, ne consegue che a una figura poligonale corrisponde un nocciolo centrale di inerzia poligonale.

Sezione rettangolare

Si consideri un rettangolo di base b e di altezza h . Poiché risulta:

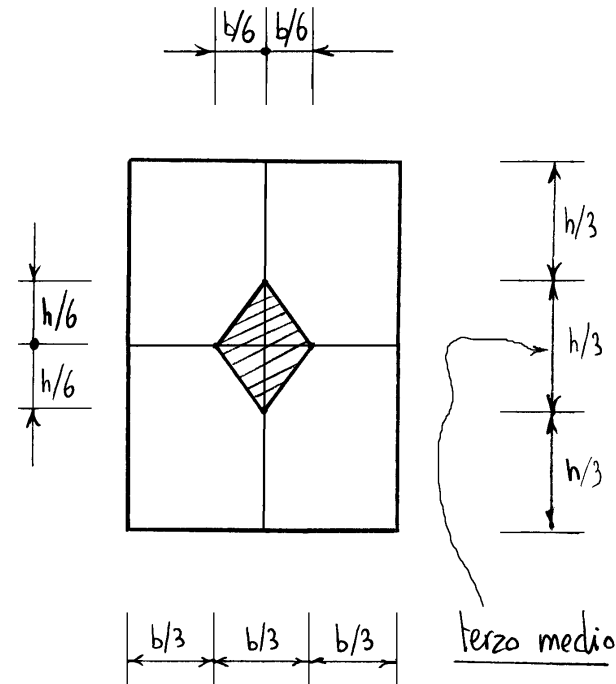
$$J_x = \frac{bh^3}{12}, \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \quad A = bh,$$

i raggi di inerzia principali valgono:

$$l_x = \frac{h}{\sqrt{12}}, \quad l_y = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

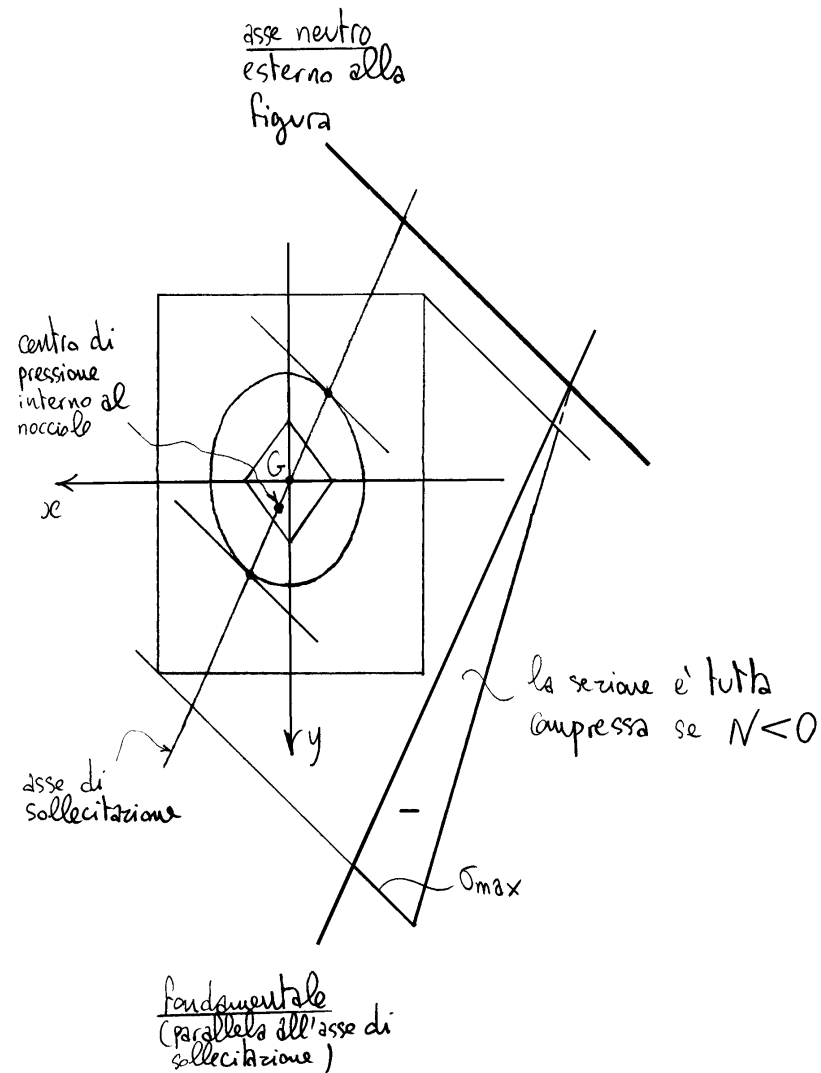
Alle rette τ ed s che contengono due lati

Per via della doppia simmetria, il nocciolo centrale di inerzia del rettangolo e' un rombo.



Come detto, se il centro di pressione appartiene al nocciolo allora tutta la sezione risulta compressa come indicato nella figura seguente.

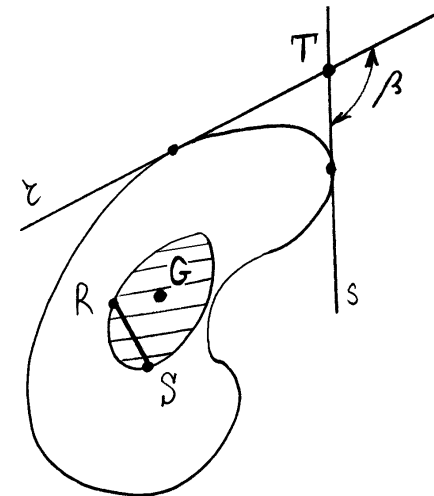
$$\begin{cases} y_R = -\ell_x^2 / (-\frac{h}{2}) = \frac{h}{6} , \\ x_S = -\ell_y^2 / (-\frac{b}{2}) = \frac{b}{6} . \end{cases}$$



Convessità del nocciolo centrale di inerzia

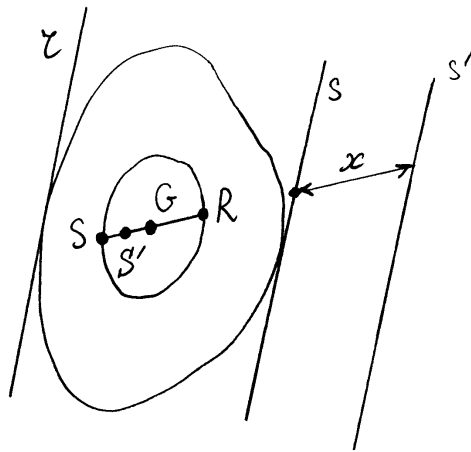
Un'ulteriore proprietà del nocciolo centrale di inerzia è che esso rappresenta una figura convessa. Ricordiamo che una figura è convessa se, dati due punti R ed S sul suo contorno, il segmento RS è tutto interno alla figura.

Siano allora R ed S due punti sul contorno del nocciolo centrale di inerzia e siano τ ed s le rispettive antipolari radenti la figura. Sia poi T il punto intersezione di τ e s . Le rette per T che non tagliano la figura definiscono l'angolo β che non contiene il



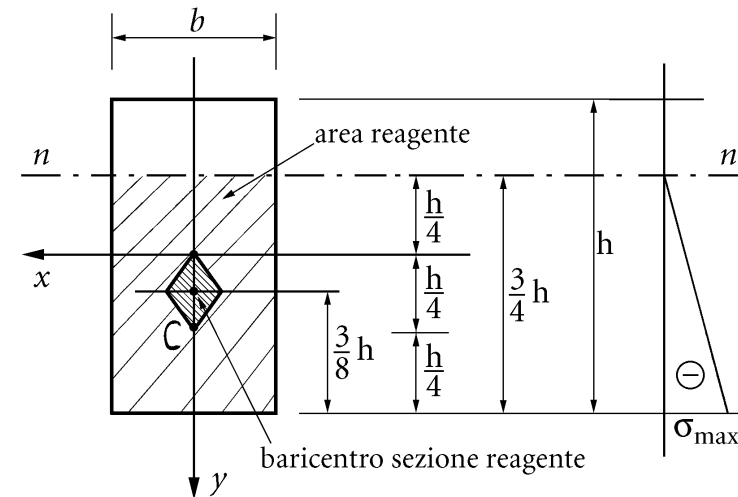
baricentro, essendo questo interno all'involuppo delle rette radenti. Le rette dell'angolo β generano il segmento RS , che quindi è interno al nocciolo, come volevati dimostrare. Nel caso particolare in cui il segmento RS contiene il baricentro, le due rette r e s sono parallele, e tra le rette parallele ad r ed s che non tagliano la figura c'è anche la retta impropria, di centro relativo il baricentro:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} s' \rightarrow \text{retta impropria} \\ s' \rightarrow G \end{cases}.$$



Sezione non reagente a trazione

Se la sezione di una trave, di materiale non reagente a trazione, è soggetta ad una forza normale eccentrica di compressione, con centro di pressione non appartenente al nocciolo centrale di inerzia, la sezione si parzializza, dividendosi in una parte che non reagisce ed in una parte solo compressa.



L'asse che separa le due parti deve soddisfare l'equazione $\sigma_z = 0$ e quindi rappresenta l'asse neutro. Tale asse deve dunque essere l'antipolare del punto C, nella corrispondenza individuata dalla sola area reagente. Per tale area, l'asse neutro rappresenta una retta radente e dunque C deve appartenere al contorno del nocciolo centrale di inerzia della sola area reagente.

Per esempio, se, data una sezione rettangolare, il centro di pressione giace sull'asse y alla distanza $h/4$ dal lato più vicino, allora $h/4$ deve uguagliare la terza parte dell'altezza totale della sezione reagente che risulta dunque essere $\frac{3}{4}h$.

Le caratteristiche della sezione reagente sono:

$$\begin{cases} A^* = \frac{3}{4}bh \\ J_x^* = \frac{1}{12}b\left(\frac{3}{4}h\right)^3 = \frac{9}{4 \times 64}bh^3 \end{cases},$$

ed inoltre il momento (rispetto al baricentro della sezione reagente) vale:

$$M_x^* = -\frac{1}{8}Nh,$$

dove N è la forza di compressione ($N > 0$).
La tensione $\sigma_{\max}$ vale dunque:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{A^*} + \frac{M_x^*}{J_x^*} y^{**}.$$

dove:

$$y^{**} = \frac{3}{8}h,$$

è la distanza del baricentro (della sezione reagente) dal lembo compresso. Risulta quindi:

$$\sigma_{\max} = -\frac{4}{3} \frac{N}{bh} - \frac{4 \times 64}{9 \times 8} \frac{3}{8} \frac{N}{bh} = -\frac{8}{3} \frac{N}{bh},$$

Se la sezione fosse reagente anche a trazione risulterebbe invece:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{bh} - \frac{N \frac{h}{4}}{\frac{1}{12} bh^3} \frac{h}{2} = -\frac{5}{2} \frac{N}{bh}.$$

Si poteva più velocemente valutare la tensione massima facendo riferimento alla formula monovaria:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{S_n^*} s'',$$

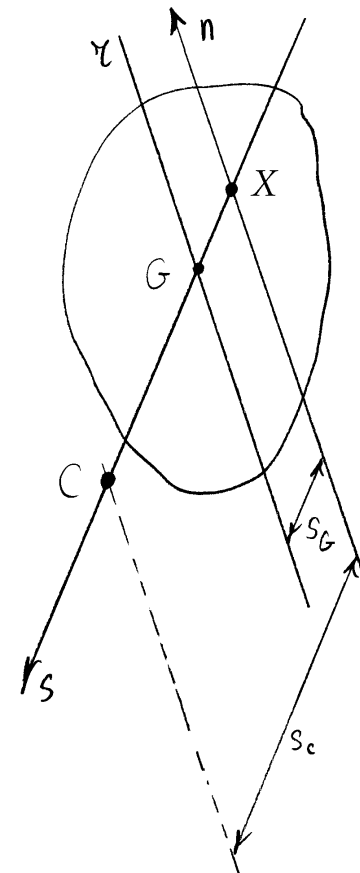
dove:

$$S_n = (b \frac{3}{4} h) (\frac{1}{2} \frac{3}{4} h) = \frac{9}{32} bh^2,$$

$$s'' = \frac{3}{4} h.$$

4.5.8 Sistema di masse-momenti statici

Si consideri la sezione retta della trave soggetta a sforzo normale eccentrico e siano n ed s l'asse neutro e l'asse di sollecitazione, rispettivamente.



Preso come riferimento il sistema Xns , e dette s_G ed s_c le coordinate del baricentro e del centro di pressione in tale sistema, la relazione tra la posizione della retta n e del suo centro relativo C risulta:

$$s_G (s_c - s_G) = \rho_x^2,$$

dove x è la retta parallela ad n per G .
Si ottiene:

$$s_G s_c = \rho_x^2 + s_G^2 = \rho_n^2,$$

avendo tenuto conto delle formule di trasposizione relative ai raggi di inerzia. Moltiplicando per la massa totale della sezione retta (l'area, nel caso omogeneo) si ottiene:

$$M s_G s_c = J_n,$$

da cui:

$$S_n s_c = J_n,$$

dove S_n rappresenta il momento statico rispetto all'asse neutro.

Si consideri ora in luogo del sistema di masse originario, di distribuzione di massa μ ($\mu \equiv E$, dove E è il modulo di Young, nel caso della teoria delle travi), il sistema di masse momenti-statici che si ottiene moltiplicando le masse unitarie μ per le loro distanze s dall'asse neutro. Se si calcolano i momenti statici $S_n^{(n)}$ e $S_s^{(n)}$ di tale sistema di masse rispetto agli assi neutro e di sollecitazione rispettivamente, si ottiene:

$$S_n^{(n)} = \int_A (\mu s) s dA = J_n,$$

$$S_s^{(n)} = \int_A (\mu s) n dA = J_{ns}.$$

Poiché $J_{ns} = 0$, il baricentro $G^{(n)}$ di tale sistema di masse – momenti statici, detto centro relativo della retta n , appartiene all'asse di sollecitazione s . Inoltre, la massa totale $M^{(n)}$ del nuovo sistema di masse risulta:

$$M^{(n)} = \int_A (\mu s) dA = S_n.$$

Quindi, la relazione tra C ed n si scrive:

$$M^{(n)} s_c = S_n^{(n)},$$

e tale relazione mostra che il centro di sollecitazione C coincide con il centro relativo della retta n , cioè con il baricentro del sistema di masse – momenti statici (relativi all'asse neutro).

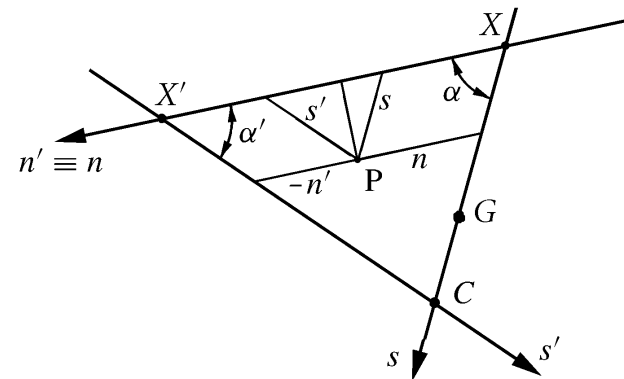
Le masse – momenti statici sono distribuite sulla figura originaria.

Se la retta n è radente la figura le masse – momenti statici hanno tutte lo stesso segno e ne consegue che il centro relativo C , quale loro baricentro,

deve essere interno all'involuppo delle rette radenti.

Questo significa che il contorno del nocciolo centrale di inerzia, e quindi tutto il nocciolo, è interno all'involuppo delle rette radenti.

Inoltre, se n è una retta non baricentrica allora le rette coniugate della retta n passano per l'antipolo C di n , e viceversa se una retta s' passa per l'antipolo C di n allora s' è coniugata di n . In altre parole il fascio di rette di sostegno l'antipolo C di n individua tutte e solo le rette coniugate di n .



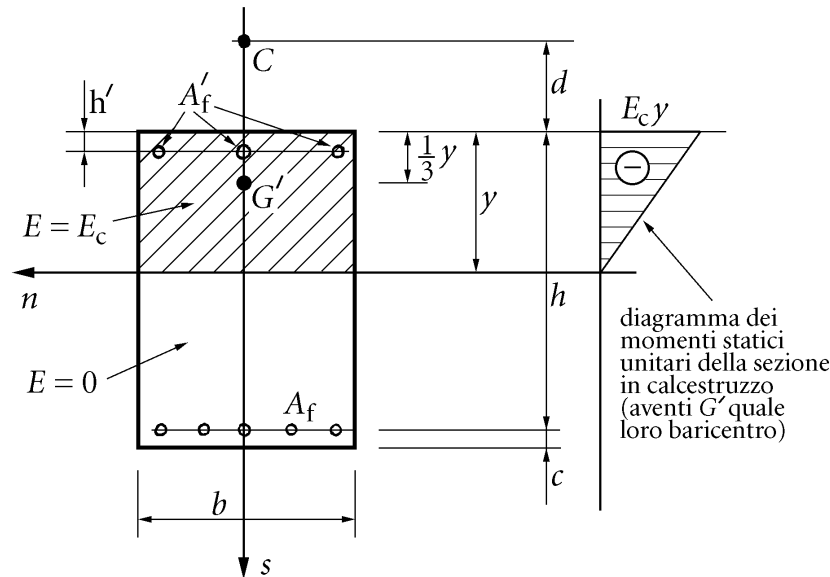
Infatti sia s' una retta per C . Il generico punto P ha coordinate (n, s) nel sistema Xns e (n', s') nel sistema $X'n's'$ (con $n' \equiv n$), come indicato in figura. Risulta $s' = s \sin \alpha / \sin \alpha'$ e quindi:

$$J_{n's'} = \int_A E n' s' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \int_A (Es) n' dA = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} S_{s'}^{(n)} = 0, \quad (4.87)$$

poiché il momento statico $S_{s'}^{(n)}$ rispetto all'asse s' del sistema di masse momenti statici relativi all'asse n è nullo dato che la retta s' è baricentrica di tale sistema di masse.

Sezione rettangolare in cemento armato a doppia armatura

Se il centro di pressione è esterno al nocciolo centrale di inerzia dell'intera sezione omogeneizzata (ottenuta moltiplicando per $n = E_a/E_c$ le aree di acciaio), la sezione di calcestruzzo risulta



parzializzata dall'asse neutro. Sia y la distanza dell'asse neutro dal lembo del calcestruzzo compresso, posto dalla parte del centro di pressione.

Allora risulta che la massa totale dei momenti statici rispetto a n dell'area di calcestruzzo reagente vale:

$$-\frac{1}{2}b(E_c y)y,$$

mentre la distanza del baricentro dalle masse momenti statici dell'area di calcestruzzo reagente dal centro di sollecitazione risulta:

$$\frac{1}{3}y + d.$$

Imponendo la condizione che C sia baricentrico del sistema di masse-momenti statici (relativi all'asse neutro stesso), si ottiene:

$$\left\{-\frac{1}{2}b(E_c y)y\right\}\left(\frac{1}{3}y + d\right) + E_a A_f (h-y)(h+d) - E_a A'_f (y-h')(h'+d) = 0.$$

Ne risulta la seguente equazione di terzo grado:

$$\frac{b}{6}y^3 + \frac{bd}{2}y^2 + n\{A_f(h+d) + A'_f(h'+d)\}y - n\{A_f h(h+d) + A'_f h'(h'+d)\} = 0.$$

Tale equazione ha una sola variazione di segno e questo implica che ammette una sola radice reale.

Nota y , e' nota la sezione reagente e può essere calcolato il momento statico rispetto all'asse neutro dell'area reagente, omogeneizzata all'area di calcestruzzo:

$$S_n = -\frac{by^2}{2} + nA_f(h-y) - nA'_f(y-h'),$$

senz'altro negativo nel caso in esame poichè il baricentro della sezione reagente si deve trovare tra C e n.

La tensione massima nel calcestruzzo compresso risulta:

$$\sigma_c = -\frac{N}{S_n} y,$$

La tensione nell'acciaio teso risulta:

$$\sigma_a = n \frac{N}{S_n} (h-y),$$

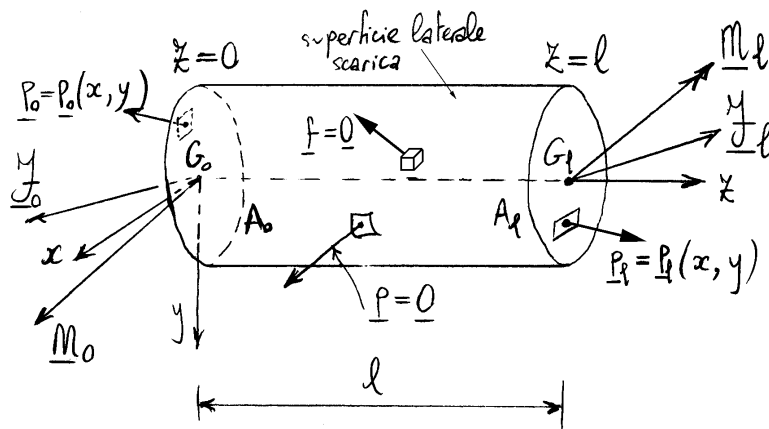
ed infine la tensione nell'acciaio compresso risulta:

$$\sigma'_a = -n \frac{N}{S_n} (y-h').$$

Si noti che non è possibile risolvere il caso della forza normale eccentrica per una sezione in cemento armato sovrapponendo gli effetti di una forza normale centrata con quello di una (o due) flessioni rette, poichè nei diversi casi le sezioni reagenti sono diverse.

MODELLO DI SAINT-VENANT

Quale modello semplificato di trave nell'ambito della meccanica dei solidi elastici lineari isotropi (*teoria matematica dell'elasticità*) si studierà un corpo cilindrico di sezione generica non vincolato e caricato solo nelle due sezioni di estremità. Un corpo cilindrico è un caso particolare di trave ad asse rettilineo ed a sezione costante. Anche se caricato solo alle estremità è comunque possibile assoggettarlo a forze esterne in grado di generare tutte e sei le componenti di sollecitazione. La linea d'asse della trave viene



scelta coincidente con il baricentro, mentre gli assi x e y sono scelti coin-

cidenti con gli assi principali di inerzia. Questo significa che i momenti statici S_x e S_y , così come il momento centrifugo J_{xy} , sono nulli.

Poiché la trave non è vincolata occorre imporre le condizioni di equilibrio globale. L'equilibrio delle forze richiede:

$$\int_{A_0} \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_\ell} \mathbf{p}_\ell dA = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

da cui:

$$\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_\ell = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

dove $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_\ell$ sono le risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. L'equilibrio dei momenti richiede invece:

$$\int_{A_0} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_0 dA + \int_{A_\ell} (\mathbf{P} - \mathbf{G}_0) \times \mathbf{p}_\ell dA = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Tenendo conto che su A_ℓ risulta:

$$\mathbf{P} - \mathbf{G}_0 = (\mathbf{P} - \mathbf{G}_\ell) + (\mathbf{G}_\ell - \mathbf{G}_0). \quad (5.4)$$

si ha infine:

$$\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_\ell + (\mathbf{G}_\ell - \mathbf{G}_0) \times \mathcal{F}_\ell = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

dove $\mathcal{M}_0$ e $\mathcal{M}_\ell$ sono i momenti risultanti globali sulla sezione di prima e, rispettivamente, di seconda estremità. Ne risulta che la risultante $\mathcal{F}_0$

e il momento risultante $\mathcal{M}_0$ agenti sulla base di prima estremità dipendono dalla risultante $\mathcal{F}_\ell$ e dal momento risultante $\mathcal{M}_\ell$ agenti sulla base di seconda estremità:

$$\mathcal{F}_0 = -\mathcal{F}_\ell, \quad (5.6a)$$

$$\mathcal{M}_0 = -\mathcal{M}_\ell - (G_\ell - G_0) \times \mathcal{F}_\ell. \quad (5.6b)$$

5.1 Caratteristiche della sollecitazione

Siano $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$ e $\mathcal{F}_z$ le componenti della risultante $\mathcal{F}_\ell$ agente sulla sezione di seconda estremità e, analogamente, $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$ e $\mathcal{M}_z$ le componenti del momento risultante $\mathcal{M}_\ell$. L'equilibrio del generico tronco di trave compreso tra la sezione retta generica e la sezione di seconda estremità conduce ai seguenti valori delle caratteristiche della sollecitazione:

$$N = \mathcal{F}_z, \quad (5.7a)$$

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x - \mathcal{F}_y (\ell - z), \quad (5.7b)$$

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y + \mathcal{F}_x (\ell - z), \quad (5.7c)$$

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_z, \quad (5.7d)$$

$$T_x = \mathcal{F}_x, \quad (5.7e)$$

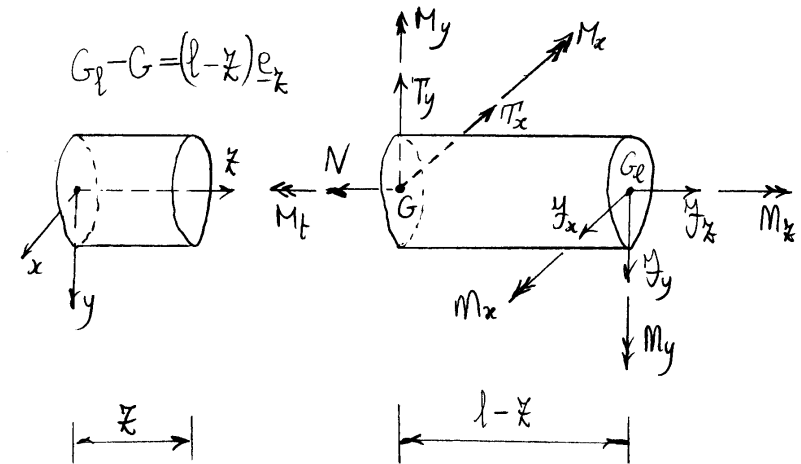
$$T_y = \mathcal{F}_y. \quad (5.7f)$$

Si noti che lo sforzo normale e le componenti di taglio sono costanti lungo l'asse della trave e che tali valori uguagliano le corrispondenti componenti F_z , F_x e F_y della forza risultante agente sulla base di seconda estremità. Analogamente, il momento torcente è costante lungo l'asse della trave e tale valore uguaglia la corrispondente componente $\mathcal{M}_z$ del momento risultante agente sulla base di seconda estremità. Le uniche caratteristiche della sollecitazione in generale variabili (linearmente) lungo l'asse della trave sono dunque le componenti del momento flettente, componenti che per i risultati precedenti possono porsi nella forma:

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x - T_y (\ell - z), \quad (5.8a)$$

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_y + T_x (\ell - z). \quad (5.8b)$$

Ne risulta che occorre tenere distinte dalle caratteristiche della sollecitazione le sole componenti $\mathcal{M}_x$ e $\mathcal{M}_y$ del momento risultante $\mathcal{M}_\ell$ agente sulla base di seconda estremità.



5.2 Principio e ipotesi di Saint-Venant

Il problema così impostato si presenta di difficile soluzione se non si pongano limiti alla distribuzione dei carichi nelle due sezioni di estremità. Scorre, a tale proposito, il principio di Saint-Venant. Tale principio afferma che due diverse distribuzioni di forze sulle sezioni di estremità aventi uguali risultante

e momento risultante provocano effetti sensibilmente differenti solo in prossimità delle sezioni di estremità. Può essere allora possibile scegliere, fra le diverse soluzioni corrispondenti a distribuzioni di forze sulle due basi aventi uguali risultante e momento risultante, una soluzione particolarmente semplice.

Precisamente, si cercano quelle soluzioni che soddisfanno le seguenti condizioni restrittive sul tensor degli sforzi (ipotesi di Saint-Venant):

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0,$$

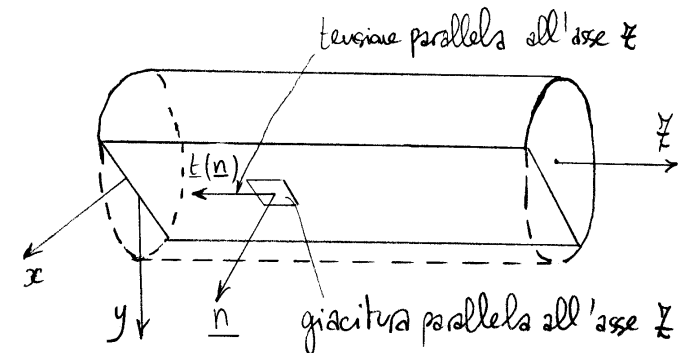
ovverossia:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Tale richiesta è giustificata innanzitutto dal fatto che le componenti della terza colonna del tensor degli sforzi devono essere in generale diverse dallo zero per poter generare delle caratteristiche della sollecitazione generiche sulle sezioni rette (di normale z). Se poi le altre componenti sono nulle il problema delle tensioni tangenziali viene drasticamente semplifica-

to dal fatto che queste (come si vedrà nel seguito) diventano indipendenti dalla coordinata z sulla linea d'asse. Si noti anche che la (5.9) equivale fisicamente a richiedere che le fibre della trave, stese parallelamente all'asse z , interagiscano tra loro con un vettore di tensione di direzione z . Infatti se $\underline{n}$, di componenti $(n_x, n_y, 0)$, è la normale di un elemento di area parallelo all'asse z , allora:

$$\{\underline{\sigma} \underline{n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix}.$$



È chiaro che a priori non è detto che tra le soluzioni “equivalenti” nel senso del principio di Saint-Venant ce ne sia una avente la forma (5.9), ciò che giustifica la denominazione di ipotesi data a tale condizione.

5.3 Problema di Saint-Venant

Possiamo, a questo punto, enunciare il problema di Saint-Venant:

"Dato un corpo cilindrico B caricato solo alle estremità, determinare un campo di tensioni $\underline{\sigma}$, di deformazioni $\underline{\varepsilon}$ e di spostamenti $\underline{u}$ tali che siano soddisfatte le seguenti equazioni nel volume B :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{0} & \text{(equazione indefinita di equilibrio)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + \operatorname{grad} \underline{u}^T) & \text{(congruenza)} \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{E} \{ (1+\nu) \underline{\sigma} - \nu (\operatorname{tr} \underline{\sigma}) \underline{I} \} & \text{(legame costitutivo)} \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 & \text{(ipotesi di Saint-Venant)} \end{array} \right.$$

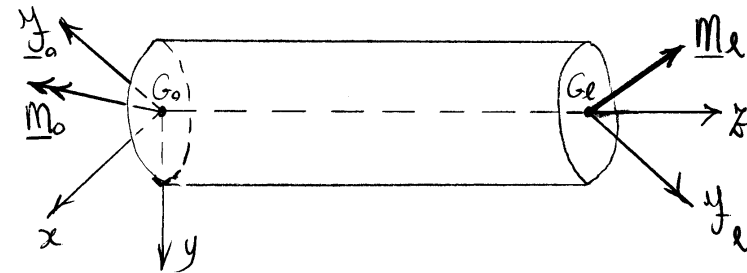
le seguenti condizioni al contorno locali sulla superficie laterale:

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0},$$

e le seguenti condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi:

$$\underline{F} = \int_A \underline{\sigma} \underline{e}_z dA, \quad \underline{M} = \int_A (\underline{P} - \underline{G}) \times (\underline{\sigma} \underline{e}_z) dA,$$

dove $\underline{F}$ e $\underline{M}$ sono le caratteristiche della sollecitazione. Si noti che tali condizioni scritte per le due basi del cilindro equivalgono alle condizioni globali di equilibrio al contorno sulle stesse basi. D'altronde le condi-



zioni globali di equilibrio al contorno sulle basi del cilindro insieme alle equazioni indefinite di equilibrio impongono la validità delle condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette delle travi.

Nel seguito si esprimeranno in componenti le varie equazioni del problema, sempre nell'ipotesi che l'asse z coincida con l'asse della trave e l'origine con il baricentro di una sezione di estremità.

Equazioni indefinite di equilibrio ($\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Legame costitutivo ($\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_z$):

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \right\},$$

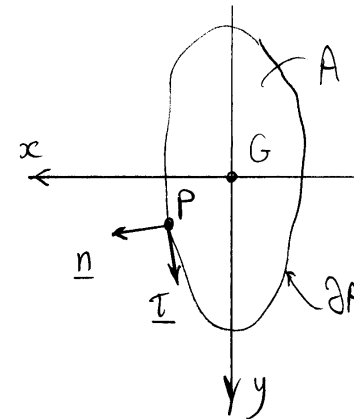
e quindi:

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu \sigma_z & 0 & (1+\nu) \tau_{xz} \\ 0 & -\nu \sigma_z & (1+\nu) \tau_{yz} \\ (1+\nu) \tau_{xz} & (1+\nu) \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Equilibrio sulla superficie laterale

$$\{\underline{\sigma} \underline{n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0} \Rightarrow \boxed{\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0}$$



normale $\underline{n}$ alla superficie laterale:

$$\{\underline{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La tensione tangenziale totale $\underline{\tau}$ in un punto P appartenente al contorno ∂A di una generica sezione retta deve essere tangente al contorno della sezione.

Equivalenza statica nelle sezioni rette

La tensione σe_z ha le seguenti componenti:

$$\{\sigma e_z\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_x \end{Bmatrix}.$$

Il momento della tensione σe_z rispetto al baricentro risulta:

$$(P-G) \times \sigma e_z = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x & y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_x \end{vmatrix},$$

e quindi si hanno le componenti:

$$\{(P-G) \times \sigma e_z\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x y \\ -\sigma_x x \\ \tau_{yz} x - \tau_{xz} y \end{Bmatrix}.$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \int_{A_\ell} \sigma_x dA = N \\ \int_{A_\ell} \sigma_x y dA = M_x - T_y (\ell - z) ; \\ \int_{A_\ell} \sigma_x x dA = -M_y - T_x (\ell - z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA = M_t \\ \int_A \tau_{xz} dA = T_x \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \end{cases}.$$

5.4 Estensione del problema di Saint-Venant

Sotto l'ipotesi di Saint-Venant ($\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0$) l'energia complementare elastica per unità di volume assume l'aspetto:

$$\begin{aligned}\Psi_v &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G}.\end{aligned}$$

L'energia complementare elastica per unità di linea si ottiene integrando nell'area la Ψ_v :

$$\Psi_\ell = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA.$$

Per via delle (5.7), le forze esterne applicate al cilindro di Saint-Venant dipendono linearmente dalle caratteristiche della sollecitazione:

$$\mathcal{F}_z = N, \quad (5.10a)$$

$$\mathcal{M}_x = M_x + T_y (\ell - z), \quad (5.10b)$$

$$\mathcal{M}_y = M_y - T_x (\ell - z), \quad (5.10c)$$

$$\mathcal{M}_z = M_t, \quad (5.10d)$$

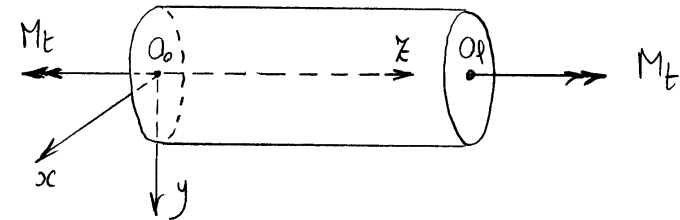
$$\mathcal{F}_x = T_x, \quad (5.10e)$$

$$\mathcal{F}_y = T_y. \quad (5.10f)$$

Ne consegue che le tensioni soluzioni del problema di Saint-Venant, e quindi l'energia complementare per unità di linea, sono funzioni delle caratteristiche della sollecitazione. È quindi possibile estendere la soluzione del problema di Saint-Venant al caso della trave generica, in generale sia ad asse curvo che a sezione retta variabile e inoltre caricata sulla superficie laterale e nel volume, estendendo al caso generico l'energia complementare per unità di linea ottenuta nel caso particolare del problema di Saint-Venant. Tale estensione è equivalente a ritenere che, almeno approssimativamente, l'energia elastica di deformazione per unità di linea dipenda dalla geometria della trave e dai carichi applicati solo attraverso il valore delle caratteristiche della sollecitazione. Si ricordi che dalla energia elastica di deformazione per unità di linea si ottengono le equazioni costitutive via differenziazione, per cui avere l'una è equivalente ad avere le altre.

5.5 Problema della torsione

Si ha sollecitazione di torsione quando il cilindro di Saint-Venant è soggetto alle due estremità ad una coppia torcente M_t . Poiché il momento tor-



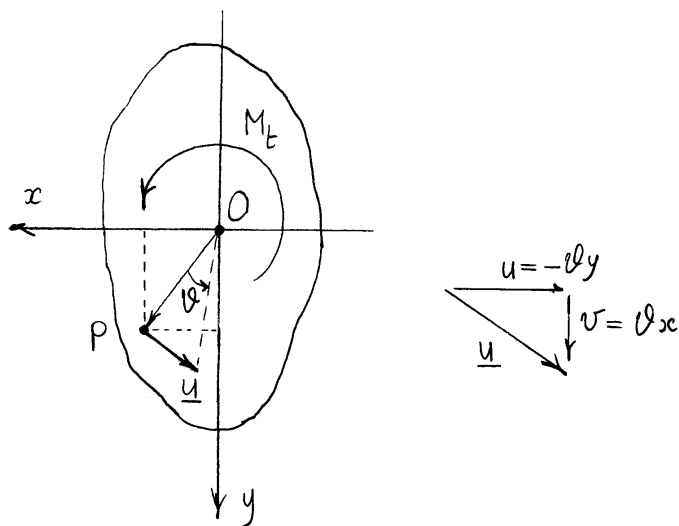
cente dipende solo dalla tensione tangenziale è lecito ipotizzare che non vi siano tensioni normali agenti su una qualunque sezione retta del cilindro.

5.5.1 Funzione di ingobbamento

Per l'ipotesi fatta sulle tensioni risultano nulle le dilatazioni delle linee appartenenti alla sezione retta. Dato che la condizione $\tau_{xy} = 0$ impone $\gamma_{xy} = 0$, sono nulli anche gli scorrimenti di tali linee. Questo significa che non vi è deformazione della sezione nel proprio piano. Tuttavia ciò non esclude un ingobbamento della sezione al di fuori del proprio piano.

Si assuma allora che la sezione retta generica, quindi dipendente dalla coordinata z , subisca una rotazione rigida nel proprio piano più una componente di spostamento nella direzione ortogonale alla sezione retta variabile da punto a punto, componente che in generale provocherà un ingobbamento della stessa sezione. Quindi, se la componente di spostamento ortogonale alla sezione non risulterà nulla a meno di una trasformazione rigida la sezione non si conserverà piana.

Tenuto conto che in tale problema la risultante agente sulla base di seconda estremità è nulla, il momento torcente non dipende dal polo prescelto per la sua valutazione. Si assume allora quale asse z della trave un asse generico che individuerà il punto O nella generica sezione, il centro O_0 degli assi di riferimento nella sezione di prima estremità e il punto O_ℓ nella sezione di seconda estremità. Si ipotizza inoltre che la rotazione torsionale della generica sezione nel proprio piano abbia quale polo il punto O e un'ampiezza ϑ in generale funzione di z .



$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = w(x, y).$$

La componente di spostamento w è dunque indipendente da z . Le componenti di spostamento risultano:

$$u = -\vartheta y,$$

$$v = \vartheta x,$$

$$w = w(x, y).$$

Le uniche componenti di deformazione non nulle sono (come deve essere) gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} :

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = -\vartheta y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \vartheta x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}.$$

Poichè, come detto, tutte le tensioni normali sono nulle per ipotesi, deve essere nulla anche la dilatazione ε_z delle fibre parallele a z e quindi:

dove :

$$\Theta = \frac{d\vartheta}{dz}.$$

Le corrispondenti tensioni tangenziali risultano:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = G \left(-\Theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = G \left(\Theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases}.$$

Poichè tali tensioni devono essere indipendenti da z deve essere :

$$\Theta = \text{cost.}$$

Quindi la rotazione ϑ può porsi nella forma:

$$\vartheta = \Theta z,$$

a meno di inessenziali rotazioni e traslazioni globali.

La costanza con z di Θ permette poi di scrivere:

$$w = \Theta w(x, y),$$

dove la funzione $w(x, y)$ viene detta funzione di ingobbamento. Il campo degli spostamenti diventa quindi:

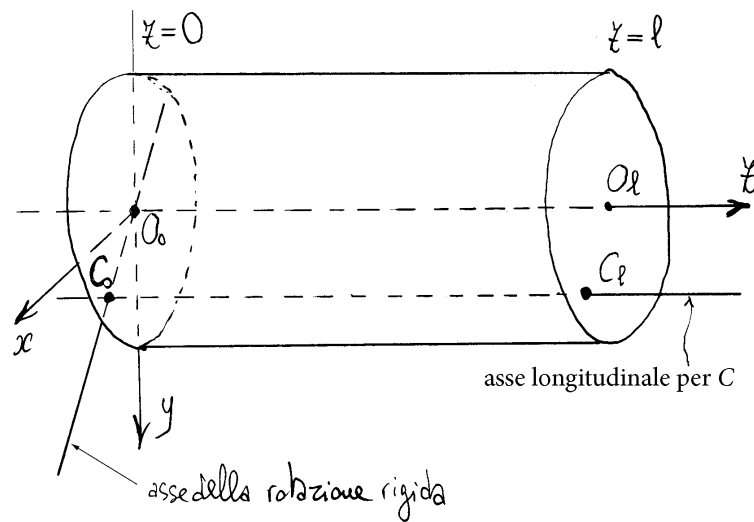
$$u = -\Theta y z,$$

$$v = \Theta x z,$$

$$w = \Theta w(x, y).$$

Si noti che a causa della rotazione attorno al punto O la generica linea longitudinale passante per un punto C si inclina di un angolo $\Theta |C - O|$ nella direzione ortogonale al vettore posizione $C - O$. Risulta quindi possibile raddrizzare tale linea longitudinale, rendendola in tal modo centro della rotazione torsionale, aggiungendo al campo degli spostamenti precedenti una rotazione di asse passante per il punto O della sezione di prima estremità caratterizzata dal vettore rotazione:

$$\varphi = \Theta (C - O). \quad (5.11)$$



Si ottiene il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_c \\ 0 & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \Theta \begin{Bmatrix} -y z \\ x z \\ w \end{Bmatrix}$$

e cioè:

$$u = -\Theta(y - y_c)z,$$

$$v = \Theta(x - x_c)z,$$

$$w = \Theta \omega_c(x, y).$$

dove:

$$\omega_c = \omega - y_c x + x_c y,$$

è la funzione di ingobbamento relativa al centro C .

Utilizzando, come visto senza perdita di generalità, il campo di spostamenti relativo alla scelta del centro O quale centro di rotazione delle sezioni rette, si ottengono allora i seguenti campi di deformazione e di tensione:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{yz} = \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_{xz} = G \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = G \Theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) \end{cases},$$

oppure, in forma vettoriale:

$$\underline{\gamma} = \Theta \left\{ \text{grad } w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{p} - \underline{G}) \right\},$$

$$\underline{\tau} = G \Theta \left\{ \text{grad } w + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (\underline{p} - \underline{G}) \right\},$$

dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in direzione antioraria.

La terza equazione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \text{div } \underline{\tau} = 0,$$

dato che $\sigma_z = 0$. Quindi:

$$G\Theta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = G\Theta \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = 0 ,$$

ovverossia :

$$\nabla^2 w = \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) = 0 .$$

Alla funzione di ingobbamento è dunque richiesto di soddisfare l'equazione di Laplace. Le condizioni al contorno sulla superficie laterale richiedono invece:

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n} = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 ,$$

quindi deve risultare:

$$G\Theta \left(\operatorname{grad} w \cdot \underline{n} + \left[\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(p-O) \right] \cdot \underline{n} \right) = 0 ,$$

e in definitiva:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \left[\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T(p-O) \right] \cdot \underline{n} = y n_x - x n_y .$$

In conclusione, la funzione w deve soddisfare il seguente problema di Neumann (dipendente solo

dalla forma geometrica della sezione retta):

$$\begin{cases} \nabla^2 w = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial w}{\partial n} = y n_x - x n_y & \text{su } \partial A \end{cases} .$$

La soluzione del problema di Neumann esiste ed è unica (a meno di una inesistente costante arbitraria) se è soddisfatta la condizione:

$$\int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0 .$$

Verifichiamo che tale condizione è soddisfatta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{\partial w}{\partial n} ds &= \int_{\partial A} (y n_x - x n_y) ds \stackrel{\text{(formula di Green)}}{=} \\ &= \int_A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) dA = 0 . \end{aligned}$$

La relazione tra funzione di ingobbamento w relativa al baricentro e quella w_c relativa al generico punto C permette poi di affermare che w_c è soluzione del seguente problema di Neumann:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_c}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{dw_c}{dn} = (y - y_c) n_x - (x - x_c) n_y \end{cases} .$$

Inoltre, dato che la sezione circolare è l'unica nella quale il modello costitutivo locale alla Eulero-Bernoulli, la cui cinematica dipende dalle trasformazioni rigide delle sezioni rette, conduce a delle tensioni tangenziali soddisfacenti le condizioni al contorno, ci si può aspettare che questo sia l'unico caso in cui la funzione di ingobbamento si annulli, cioè che risulti $w = 0$, naturalmente a meno di una costante additiva. Infatti nel caso, e solo nel caso, di sezione circolare, assumendo il centro del cerchio quale punto di riferimento O , risulta:

$$\left(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P - O) \right) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Nella condizione al contorno il termine non omogeneo di conseguenza si annulla, le condizioni al contorno diventano omogenee e il problema di Neumann ammette di conseguenza la soluzione nulla, come volevasi dimostrare.

5.5.2 Legame costitutivo torsionale

A questo punto resta solo da imporre la condizione globale di equilibrio sulle basi:

$$\int_A (\tau_{yx} x - \tau_{xy} y) dA = M_t .$$

Si ottiene:

$$G \Theta \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right\} dA = M_t .$$

Definendo il fattore torsionale di rigidità:

$$\begin{aligned} J_t &= \int_A \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right) y \right\} dA \\ &= \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} x - \frac{\partial w}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dA , \end{aligned}$$

risulta:

$$\Theta = \frac{M_t}{G J_t} .$$

Nel caso di sezione circolare in cui, come visto, $w = 0$, risulta:

$$J_t = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_0 ,$$

dove J_0 è il momento di inerzia polare rispetto al centro del cerchio O .

La soluzione del problema della torsione (via funzione di ingobbamento) risulta quindi:

$$\begin{cases} u = -\frac{M_t}{GJ_t} z y \\ v = \frac{M_t}{GJ_t} z x \\ w = \frac{M_t}{GJ_t} \omega(x, y) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \end{cases},$$

oppure:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } \omega + \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P-O) \right\}.$$

Si noti che la funzione di ingobbamento ω e il fattore di rigidità torsionale dipendono solo dalla forma geometrica della sezione retta.

Energia complementare per unità di linea:

$$\begin{aligned} \psi_\ell &= \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA = \\ &= \frac{M_t^2}{2GJ_t^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA \\ &= \frac{M_t^2}{2GJ_t^2} \left\{ \int_A \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) y \right] dA \right. \\ &\quad \left. + \int_A \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] dA \right\}. \end{aligned}$$

Poichè risulta:

$$\begin{aligned} &\int_A \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \right] dA \\ &= \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega x \right) \right\} dA \\ &= \int_{\partial A} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y - y n_x + x n_y \right) dA = 0, \end{aligned}$$

l'energia complementare assume l'aspetto:

$$\Psi_t = \frac{M_t^2}{2GJ_t}.$$

Derivando l'energia complementare rispetto a M_t si ottiene il legame costitutivo torsionale (2.21) nella forma:

$$M_t = GJ_t \theta. \quad (5.12)$$

Estendendo la soluzione di Saint-Venant, che contempla solo il caso omogeneo, la rigidezza torsionale viene quindi a coincidere con il prodotto GJ_t tra il modulo di elasticità tangenziale e il fattore torsionale di rigidezza (indicato nel presente contesto con lo stesso simbolo usato a suo tempo per la rigidezza torsionale).

5.5.3 Funzione delle tensioni

La terza condizione indefinita di equilibrio richiede:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (5.13)$$

Una qualunque funzione scalare $F(x, y)$ tale che:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (5.14)$$

o, equivalentemente:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F, \quad (5.15)$$

ove al solito $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in senso antiorario, rende automaticamente soddisfatta l'equazione indefinita di equilibrio. Una funzione F cosiffatta è detta *funzione delle tensioni*.

Dal confronto con la soluzione in termini di funzione di ingobbamento si ottiene:

$$\text{grad } \omega = \frac{J_t}{M_t} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P - O) = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \left\{ \frac{J_t}{M_t} \text{grad } F + (P - O) \right\}, \quad (5.16)$$

oppure, in componenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial y} + y \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial F}{\partial x} - x \end{cases}.$$

Derivando la prima rispetto ad y e la seconda rispetto ad x ed uguagliando si ottiene la condizione necessaria (e sufficiente se la sezione è monocollegata) di integrabilità nella funzione ω di ingobbamento (congruenza). Si ottiene:

$$\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 1 = -\frac{J_t}{M_t} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 1,$$

ovvero F deve soddisfare la seguente equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t}.$$

Per quel che riguarda la condizione al contorno:

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (5.17)$$

questa diventa:

$$(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \text{grad } F) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (5.18)$$

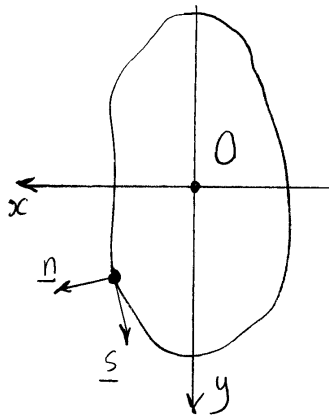
Applicando la definizione di tensore trasposto si ha poi:

$$\text{grad } F \cdot \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{n} = 0, \quad (5.19)$$

e poiché ruotando il versore normale al contorno della sezione retta di 90° in senso antiorario si ottiene il versore tangente $\mathbf{s}$ si ha infine:

$$\text{grad } F \cdot \mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial s} = 0. \quad (5.20)$$

Quindi F è costante sul contorno, e, poiché una costante non modifica lo stato tensionale, può essere annullata.



$$\underline{n} \cdot \underline{s} = 0$$

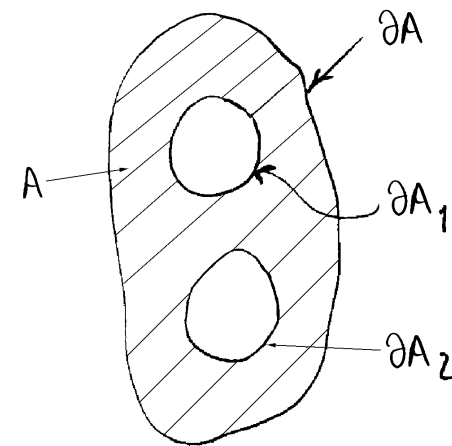
$$\{\underline{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

$$\{\underline{s}\} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \end{Bmatrix}$$

La funzione delle tensioni è dunque soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t} & \text{in } A \\ F = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Notiamo che se la sezione è pluriconnessa, si può porre $F=0$ sul contorno esterno, ma non sugli altri contorni, dove a questo punto è solo possibile dire che $F = \text{cost.}$



La condizione di integrabilità in una funzione ω di ingobbamento richiede che sia soddisfatta la condizione di circolazione sui contorni interni:

$$\int_{\partial A_i} \text{grad } \omega \cdot \mathbf{s} \, ds = 0, \quad (5.21)$$

dove l'indice i si riferisce all' i -esimo contorno interno.

Tenendo conto delle relazioni esistenti tra ω e F si ottiene infine:

$$\oint_{\partial A_i} \left\{ \frac{J_t}{M_t} \text{grad } F + (P - O) \right\} \cdot \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \mathbf{s} \, ds = 0.$$

Quindi ogni contorno interno introduce una incognita (il valore della F sul contorno) ed una equazione.

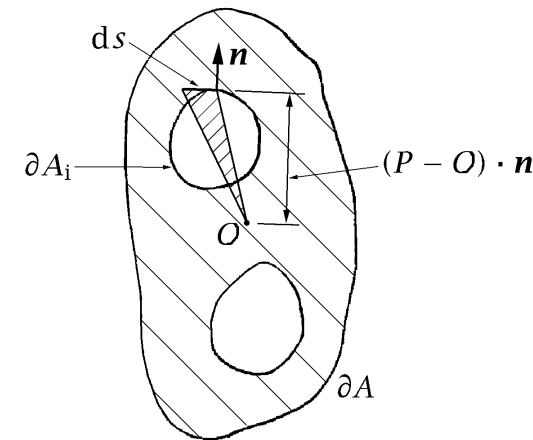
Con n circuiti interni si può procedere risolvendo il problema di Dirichlet in funzione dei valori F_i incogniti sui contorni interni, dopodiché le n condizioni di circolazione diventano n equazioni nelle n incognite F_i .

Per determinare il fattore torsionale di rigidezza J_t per il mezzo della funzione delle tensioni F , si imponga la condizione di equivalenza statica:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) \, dA \\ &= \int_A \left(-\frac{\partial F}{\partial x}x - \frac{\partial F}{\partial y}y \right) dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_A \left\{ 2F - \left[\frac{\partial(Fx)}{\partial x} + \frac{\partial(Fy)}{\partial y} \right] \right\} dA \\ &= \int_A \left\{ 2F - \text{div}[F(P - O)] \right\} dA \\ &= 2 \int_A F \, dA - \int_{\partial A} F(P - O) \cdot \mathbf{n} \, ds. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nel caso generale di una sezione pluriconnessa, tenendo conto che sul con-



torno esterno ∂A si è posto $F = 0$ e che sui contorni interni ∂A_i risulta $F = F_i = \text{cost}$, si ottiene:

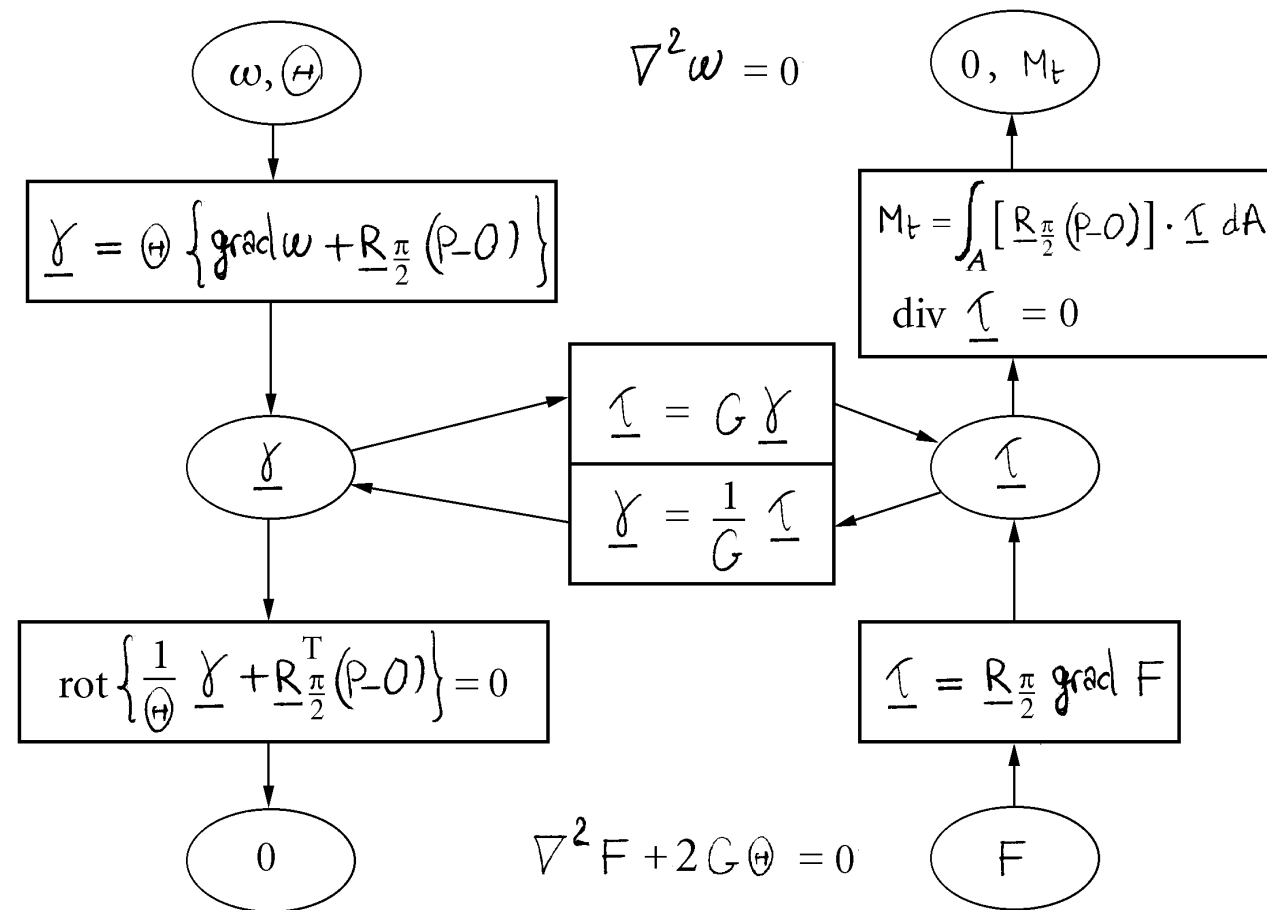
$$M_t = 2 \int_A F \, dA - \sum_i F_i \oint_{\partial A_i} (P - O) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (5.23)$$

Dato che:

$$\oint_{\partial A_i} F_i (P - O) \cdot \mathbf{n} \, ds = 2A_i, \quad (5.24)$$

dove A_i è l'area racchiusa dal contorno interno ∂A_i , ovvero sia l'area dell' i -esimo foro, si ottiene infine:

$$M_t = 2 \left(\int_A F \, dA - \sum_i F_i A_i \right). \quad (5.25)$$



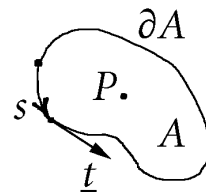
$$\text{rot } \underline{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\text{div } \underline{\tau} = \text{rot} \left(\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \underline{\tau} \right)$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \text{grad } F = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}(\underline{p}-\underline{0}) = \begin{Bmatrix} -y \\ x \end{Bmatrix}$$

Campo vettoriale
 $\underline{v}$ piano
 Area piana A



Circolazione di $\underline{v}$ sul contorno ∂A di A : $c(A) = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot \underline{t} \, ds$

Rotore di $\underline{v}$ (circolazione per unità di area): $\text{rot } \underline{v} = \lim_{A \rightarrow P} \frac{c(A)}{A}$

Nel caso di sezione monoconnessa la condizione diventa:

$$M_t = 2 \int_A F \, dA. \quad (5.26)$$

La soluzione in F del problema di Dirichlet è data in termini di M_t che è noto e di J_t che è incognito. La condizione (5.26), oppure (5.25) se la sezione è pluriconnessa, permette di determinare il fattore di rigidezza torsionale J_t .

Verifichiamo infine che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione $\underline{T} = \underline{0}$.

Inoltre, da $\underline{\tau} = \underline{R}^T \text{grad } F$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \int_A \underline{R}^T \text{grad } F \, dA = \underline{R}^T \int_A \text{grad } F \, dA = \\ &= \underline{R}^T \left(\int_{\partial A} F \, \underline{n} \, ds + \sum_i \int_{\partial A_i} F \, \underline{n} \, ds \right) \\ &= \underline{R}^T \sum_i F_i \int_{\partial A_i} 1 \, \underline{n} \, ds \\ &= \underline{R}^T \sum_i F_i \int_A \text{grad } 1 \, dA = \underline{0}, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

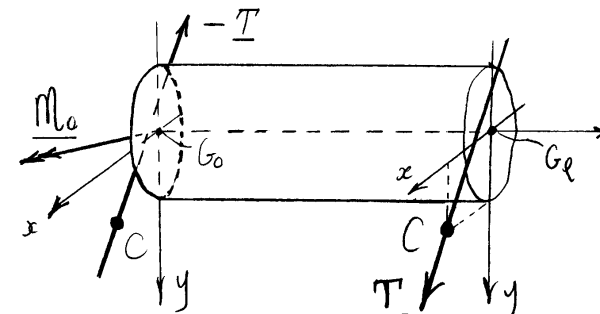
5.6 Centro di taglio

Nel seguito si determinerà il *centro di taglio* quale centro che renda ortogonali energeticamente il momento torcente M_t e le componenti di taglio T_x e T_y e a tale scopo si imporrà innanzitutto, nell'ambito del problema di Saint-Venant e nel modo più semplice possibile, un problema che preveda l'applicazione di un taglio generico. Poiché il centro di taglio disaccoppia l'effetto della torsione e del taglio, l'energia complementare del problema complessivo, momento torcente più taglio passante per il centro di taglio, non deve contenere termini mutui di torsione e taglio. Si sfrutterà quindi tale condizione per determinare la posizione del centro di taglio.

5.6.1 Problema di flessione, taglio e torsione

Si ha sollecitazione di flessione, taglio e torsione se la sezione di estremità $x=l$ è soggetta ad un taglio $\underline{T}$ generico, non necessariamente passante per il baricentro.

Sulla base $x=l$ sono dunque presenti le due componenti T_x e T_y della forza di taglio e il

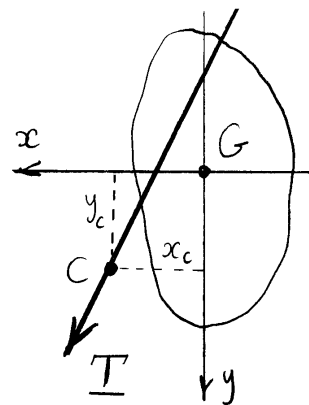


momento torcente M_t dovuto all'eccentricità della forza di taglio rispetto al baricentro. Se $C \equiv (x_c, y_c)$ è un punto appartenente alla retta d'azione del taglio il momento torcente risulta:

$$M_t = T_y x_c - T_x y_c.$$

Inoltre, per l'equilibrio alla rotazione del cilindro, sulla base $z = 0$ è presente un momento esterno $\underline{M}_0$ di espressione:

$$\underline{M}_0 = -(G_L - G_0) \times \underline{T},$$



e di componenti:

$$\begin{cases} M_x^o = T_y l \\ M_y^o = -T_x l \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{componenti dell'azione} \\ \text{globale } \underline{M}_0 \text{ agente sulla prima} \\ \text{sezione di estremità} \end{array} \right)$$

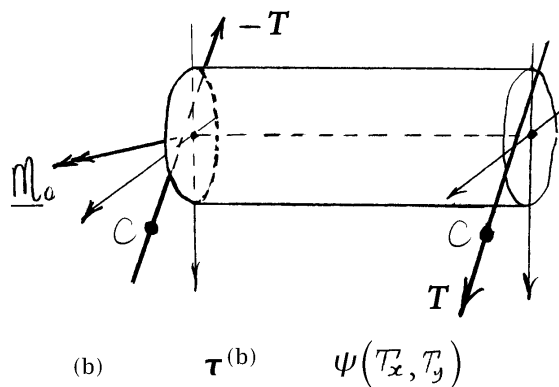
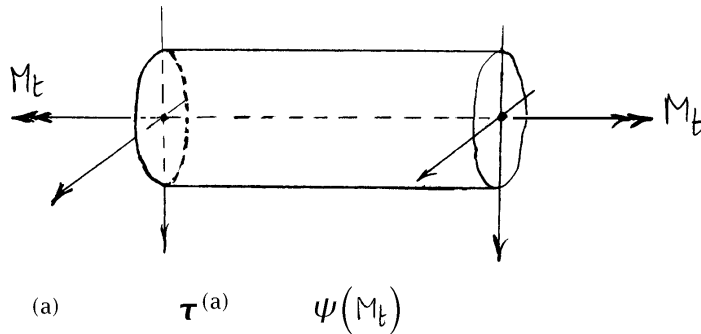
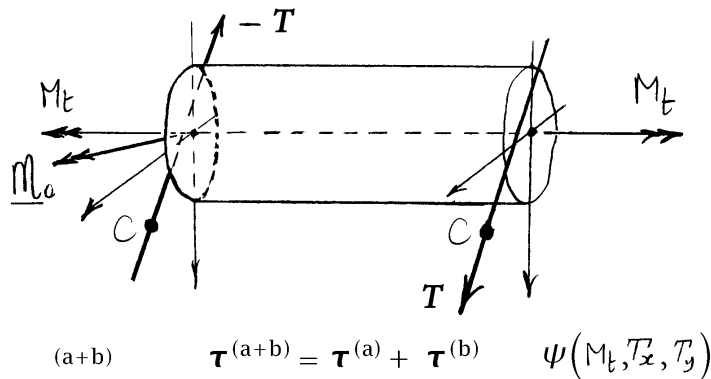
Inoltre la caratteristica della sollecitazione momento flettente ha componenti:

$$\begin{cases} M_x(z) = -T_y (l - z) \\ M_y(z) = T_x (l - z) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{caratteristiche} \\ \text{della sollecitazione} \end{array} \right)$$

5.6.2 Energia complementare mutua

Come detto, si determinerà il centro di taglio C quale punto per il quale occorre far passare la sollecitazione di taglio $\underline{T}$ affinché i due problemi della torsione e della flessione, taglio e torsione siano ortogonali energeticamente. Si considerino allora i due problemi (a) della torsione e (b) di flessione taglio e torsione e siano $\tau^{(a)}$ e $\tau^{(b)}$ le tensioni tangenziali associate ai problemi (a) e (b) rispettivamente. Per la sovrapposizione degli effetti al problema (a)+(b), somma dei due problemi precedenti corrisponderanno le tensioni somma e l'energia complementare ψ per unità di linea dovuta alle sole tensioni tangenziali vale quindi:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a+b)} \cdot \tau^{(a+b)} dA \\ &= \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(a)} dA + \frac{1}{2G} \int_A \tau^{(b)} \cdot \tau^{(b)} dA \\ &\quad + \frac{1}{G} \int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(b)} dA \end{aligned} \quad (5.27)$$



Il problema della determinazione del centro di taglio richiede allora di annullare il termine mutuo dell'energia:

$$\int_A \tau^{(a)} \cdot \tau^{(b)} dA = 0. \quad (5.28)$$

La tensione normale nel problema di flessione, taglio e torsione vale:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(b)} &= \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \\ &= - \frac{T_y(l-z)}{J_x} y - \frac{T_x(l-z)}{J_y} x. \end{aligned}$$

Le $\tau^{(b)}$ sono costanti con z e devono soddisfare la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(b)}}{\partial y} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x,$$

ovverossia:

$$\text{div } \tau^{(b)} = - \frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x.$$

Le $\tau^{(b)}$ devono inoltre soddisfare la condizione al contorno:

$$\tau^{(b)} \cdot n = 0,$$

e alle condizioni globali di equilibrio sulle sezioni rette:

$$\int_A \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = \mathbf{T},$$

$$\left\{ \int_A (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \right\} \cdot \mathbf{e}_z = T_y x_c - T_x y_c.$$

Le tensioni associate alla sollecitazione semplice di torsione valgono invece:

$$\boldsymbol{\tau}^{(a)} = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } w + \frac{R_{\pi}}{2} (P-G) \right\}.$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta dunque:

$$\frac{M_t}{J_t} \int_A \left\{ \text{grad } w + \frac{R_{\pi}}{2} (P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA = 0.$$

Poiché:

$$\text{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) = \text{grad } w \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} + w \text{div } \boldsymbol{\tau}^{(b)},$$

$$\frac{R_{\pi}}{2} (P-G) = \mathbf{e}_z \times (P-G),$$

come è facile verificare, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \text{grad } w + \frac{R_{\pi}}{2} (P-G) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(b)} dA \\ &= \int_A \left\{ \text{div} (w \boldsymbol{\tau}^{(b)}) - w \text{div } \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} dA \\ & \quad + \int_A \left\{ (P-G) \times \boldsymbol{\tau}^{(b)} \right\} \cdot \mathbf{e}_z dA \\ &= \int_{\partial A} w \boldsymbol{\tau}^{(b)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_A w \left\{ \frac{T_y}{J_x} y + \frac{T_x}{J_y} x \right\} dA \\ & \quad + T_y x_c - T_x y_c \\ &= \frac{T_x}{J_y} \int_A w x dA + \frac{T_y}{J_x} \int_A w y dA \\ & \quad + T_y x_c - T_x y_c \end{aligned}$$

L'equazione determinatrice del centro di taglio risulta infine:

$$\begin{aligned} & T_y \left(x_c + \frac{1}{J_x} \int_A w y dA \right) \\ & \quad - T_x \left(y_c - \frac{1}{J_y} \int_A w x dA \right) = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà delle componenti T_x e T_y si ottengono infine le coordinate del centro di taglio:

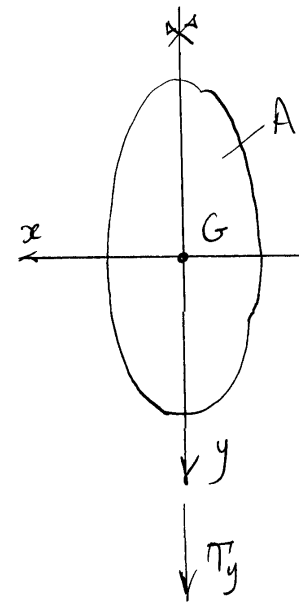
$$x_c = - \frac{1}{J_x} \int_A \omega y dA,$$

$$y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \omega x dA.$$

Si noti che tali coordinate dipendono solo dalla forma della sezione retta.

Verifichiamo che, nel caso di sezione dotata di un asse di simmetria il centro di taglio deve appartenere all'asse di simmetria. Infatti in tal caso il momento torcente risulta una sollecitazione emisimmetrica e quindi tali risultano sia le deformazioni che la funzione di ingobbamento.

Se l'asse di simmetria coincide con l'asse y la funzione ωy risulta emisimmetrica e dunque il suo integrale sull'area è nullo.



Oppure, si assoggetti la sezione a un taglio T_y passante per il baricentro

G. Tale sollecitazione è

simmetrica e dunque simmetriche risultano le tensioni tangenziali $\tau^{(b)}$. Invece le tensioni tangenziali $\tau^{(a)}$ dovute al momento torcente sono emisimmetriche. La funzione $\tau^{(b)} \cdot \tau^{(a)}$ che esprime il termine mutuo dell'energia complementare è dunque emisimmetrica e il suo integrale sull'area è nullo. Risulta quindi nullo il termine mutuo dell'energia complementare e dunque la retta y contiene il centro di taglio.

◇ ◇ ◇

Soluzione del problema di Saint-Venant.

Il tensore degli sforzi, soluzione del problema di Saint-Venant, può essere ottenuto integrando le equazioni di Beltrami:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\text{tr } \underline{\sigma}) = 0.$$

Le equazioni di Beltrami rappresentano le condizioni necessarie (e sufficienti nel caso di sezione nonoconnessa) per l'integrazione, in termini di spostamento, del tensore di deformazione ottenibile dal tensore degli sforzi via legge costitutivo.

Le equazioni di Beltrami, scritte per esteso tenendo conto delle ipotesi di Saint-Venant (cioè

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ e quindi $\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_z$) diventano:

$$i=j=x \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0,$$

$$i=j=y \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0,$$

$$i=j=z \Rightarrow (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0,$$

$$i=x, j=y \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$i=x, j=z \Rightarrow (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$i=y, j=z \Rightarrow (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0.$$

Utilizzando le prime due, la terza equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0.$$

Utilizzando la prima e la seconda equazione indefinita di equilibrio, la quinta e la sesta equazione di Beltrami divengono:

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0 ,$$

$$(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = 0 .$$

Le equazioni di Beltrami definenti la sola tensione normale sono:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_z \text{ lineare in } x, y \text{ e } z \text{ separatamente}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \text{nell'espressione di } \sigma_z \text{ non esistono termini misti in } x \text{ e } y$$

Integrale generale per la tensione normale:

$$\sigma_z = (b_1 z + a_1)x + (b_2 z + a_2)y + b_3 z + a_3 .$$

Le costanti di integrazione possono essere determinate imponendo le condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette:

$$\int_A \sigma_z dA = N ,$$

$$\int_A \sigma_z y dA = M_x - T_y(l-z) ,$$

$$\int_A \sigma_z x dA = -M_y - T_x(l-z) ,$$

Dalla prima condizione si ottiene:

$$(b_3 z + a_3) A = N ,$$

e quindi :

$$a_3 = \frac{N}{A} , \quad b_3 = 0 .$$

Dalla seconda condizione si ottiene poi:

$$(b_2 z + a_2) J_x = M_x - T_y(l-z) ,$$

per cui:

$$a_2 = \frac{M_x - T_y l}{J_x}, \quad b_2 = \frac{T_y}{J_x}.$$

Dalla terza condizione si ottiene infine:

$$(b_1 z + a_1) J_y = -M_y - T_x(l - z),$$

e quindi:

$$a_1 = -\frac{M_y + T_x l}{J_y}, \quad b_1 = \frac{T_x}{J_y}.$$

La tensione normale vale allora:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x - T_y(l - z)}{J_x} y - \frac{M_y + T_x(l - z)}{J_y} x.$$

L'espressione della tensione normale, scritta in funzione delle caratteristiche della sollecitazione, diventa dunque:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x.$$

Tenuto conto che il sistema di riferimento prescelto è quello baricentrico e principale di inerzia, la soluzione di Saint-Venant nella tensione normale è in perfetto accordo con la soluzione del modello di Eulero-Bernoulli specializzata al caso omogeneo. Per quel che riguarda il legame costitutivo assiale-flessionale, si calcoli l'energia complementare elastica per unità di linea associata alla tensione normale:

$$\begin{aligned} \Psi_l &= \frac{1}{2E} \int_A \sigma_z^2 dA \\ &= \frac{1}{2E} \int_A \left\{ \frac{N^2}{A^2} + \frac{M_x^2}{J_x^2} y^2 + \frac{M_y^2}{J_y^2} x^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{N}{A} \frac{M_x}{J_x} y - 2 \frac{N}{A} \frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} \frac{M_y}{J_y} xy \right\} dA. \end{aligned}$$

Tenendo conto che sono nulli i momenti statici rispetto ad assi baricentrici e il momento centrifugo rispetto agli assi principali, risulta:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A xy dA = 0,$$

e dunque:

$$\Psi_l = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EJ_x} + \frac{M_y^2}{EJ_y} \right).$$

Tale espressione coincide con quella ottenuta nel caso omogeneo nell'ambito

del modello di Eulero-Bernoulli e quindi anche riguardo al legame costitutivo vi è pieno accordo tra i due modelli.

Le equazioni di Beltrami definenti le tensioni tangenziali sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{equazioni} \\ \text{di Beltrami} \\ \\ \text{terza equazione} \\ \text{indefinita di equilibrio} \end{array}$$

Utilizzando la soluzione nella σ_z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{T_x}{J_y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\nu} \frac{T_y}{J_x} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x \end{array} \right.$$

Condizione al contorno sulla superficie laterale:

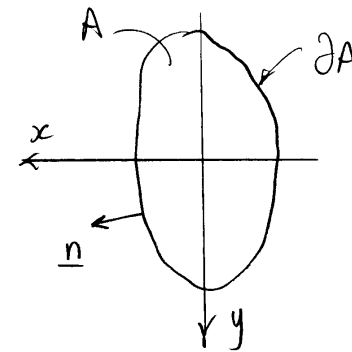
$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0$$

Condizioni di equivalenza statica nelle sezioni rette:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \tau_{xz} dA = T_x \\ \int_A \tau_{yz} dA = T_y \\ \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA = M_t \end{array} \right.$$

Ricordare che τ_{xz} e τ_{yz} sono indipendenti da z .

Per la costanza con z di τ_{xz} e τ_{yz} si ha dunque a che fare con un problema piano definito sulla sezione normale della trave.



Notare che nelle equazioni definenti τ_{xz} e τ_{yz} compaiono solo le caratteristiche della sollecitazione T_x , T_y e M_t . L'energia complementare associata alle tensioni tangenziali:

$$\psi_t = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA,$$

è dunque indipendente da N , M_x e M_y e quindi i due gruppi di caratteristiche della sollecitazione sono ortogonali energeticamente.

Quindi il modello di Saint-Venant è pienamente in linea con la richiesta che i legami costitutivi assiale-flessionale e torcente-tagliante siano indipendenti tra loro.

Derivando la terza equazione indefinita di equilibrio prima rispetto a x e poi rispetto a y si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} = -\frac{T_x}{J_y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{T_y}{J_x} \end{cases},$$

e cioè:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = -\frac{T_x}{J_y} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} = -\frac{T_y}{J_x} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} \end{cases},$$

Sostituendo nelle due equazioni di Beltrami si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T_x}{J_y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{T_y}{J_x} \end{cases}.$$

Integrando nella differenza $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}$

e ponendo:

$$\bar{v} = \frac{v}{1+v},$$

si ottiene:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \bar{v} \left(\frac{T_y}{J_x} x - \frac{T_x}{J_y} y \right) + c,$$

dove c è una costante di integrazione.

Ci siamo dunque ridotti ad un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \bar{v} \left(\frac{T_y}{J_x} x - \frac{T_x}{J_y} y \right) + c, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{T_y}{J_x} y - \frac{T_x}{J_y} x \end{cases},$$

definite su A , con la condizione al contorno su ∂A :

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0.$$

Per risolvere il sistema poniamo la soluzione nella forma:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}^0 + \bar{\tau}_{yz} \end{cases},$$

dove $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{yz}$ rappresentano un integrale particolare mentre τ_{xz}^0 e τ_{yz}^0 sono soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases},$$

con la condizione al contorno:

$$(\tau_{xz}^0 + \bar{\tau}_{xz}) n_x + (\tau_{yz}^0 + \bar{\tau}_{yz}) n_y = 0.$$

Per ricercare un integrale particolare notiamo che la prima equazione è soddisfatta se $\bar{\tau}_{yz}$ contiene il termine $\frac{1}{2} \bar{v} \frac{T_y}{J_x} x^2$ e il termine $\frac{1}{2} c x$ e se $\bar{\tau}_{xz}$ contiene il termine $\frac{1}{2} \bar{v} \frac{T_x}{J_y} y^2$ e il termine $-\frac{1}{2} c y$. Tutti questi termini non danno contributi alla seconda equazione che risulta pertanto soddisfatta se a $\bar{\tau}_{yz}$ si aggiunge $-\frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} y^2$ e se a τ_{xz}

si aggiunge $-\frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} x^2$. In definitiva si è ottenuto il seguente integrale particolare:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{xz} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} (x^2 - \bar{\nu} y^2) + c y \right\} \\ \bar{\tau}_{yz} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{T_y}{J_x} (y^2 - \bar{\nu} x^2) - c x \right\} \end{cases}$$

L'equazione omogenea:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 0$$

è condizione necessaria (e sufficiente se la sezione è monconnessa) per l'esistenza di una funzione scalare φ tale che:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

La seconda equazione omogenea diventa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } A,$$

mentre l'equazione al contorno diviene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = -\bar{\tau}_{xz} n_x - \bar{\tau}_{yz} n_y \quad \text{su } \partial A.$$

Ne risulta quindi il seguente problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\bar{\tau}_{xz} n_x - \bar{\tau}_{yz} n_y \end{cases}$$

La soluzione esiste ed è unica, a meno di una costante additiva, se e solo se:

$$\int_{\partial A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0,$$

relazione senz'altro soddisfatta:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds &= - \int_{\partial A} (\bar{\tau}_{xz} n_x + \bar{\tau}_{yz} n_y) ds = \\ &= - \int_A \left(\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} \right) dA = \\ &= \int_A \left(\frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y \right) dA = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori di $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{yz}$:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} (x^2 - \bar{y}^2) n_x + \frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} (y^2 - \bar{x}^2) n_y \\ \quad + \frac{1}{2} c (y n_x - x n_y) & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Se φ_x , φ_y e φ_t sono tali che:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_x = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial n} = (x^2 - \bar{y}^2) n_x & \text{su } \partial A \left(\int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_x}{\partial n} ds = \int_A 2x dA = 0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_y = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} = (y^2 - \bar{x}^2) n_y & \text{su } \partial A \left(\int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_y}{\partial n} ds = \int_A 2y dA = 0 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_t = 0 & \text{in } A \\ \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} = y n_x - x n_y & \text{su } \partial A \left(\int_{\partial A} \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} ds = 0 \right) \end{cases}$$

si ottiene:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{T_x}{J_y} \varphi_x + \frac{1}{2} \frac{T_y}{J_x} \varphi_y + \frac{1}{2} c \varphi_t$$

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{\tau}_{xz} \\ \tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{\tau}_{yz} \end{cases}$$

e cioè:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{y}^2) \right] + \frac{T_y}{J_x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + c \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \right\} \\ \tau_{yz} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{T_x}{J_y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{T_y}{J_x} \left[\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{x}^2) \right] + c \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \right\} \end{cases}$$

Risultò:

$$\begin{aligned} \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA &= \\ &= \frac{c}{2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) y \right\} dA + \end{aligned}$$

$$-T_x \frac{1}{2J_y} \int_A \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{r} y^2) \right] y - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} x \right\} dA +$$

$$+ T_y \frac{1}{2J_x} \int_A \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{r} x^2) \right] x - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} y \right\} dA$$

Dato che φ_t coincide con la funzione ingobbamento ω , il fattore torsionale di rigidezza J_t vale:

$$J_t = \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) x - \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) y \right\} dA.$$

Posto allora:

$$\begin{cases} x_s = \frac{1}{2J_x} \int_A \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{r} x^2) \right] x - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} y \right\} dA \\ y_s = \frac{1}{2J_y} \int_A \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{r} y^2) \right] y - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} x \right\} dA \end{cases}$$

deve risultare (condizione globale di equilibrio):

$$\frac{C}{2} J_t - T_x y_s + T_y x_s = M_t$$

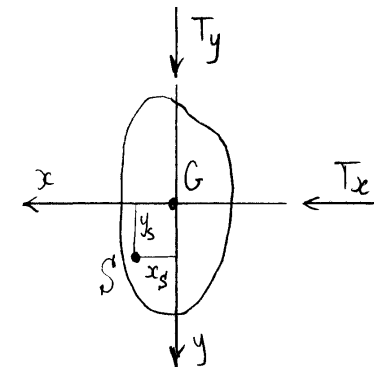
e cioè:

$$\frac{C}{2} = \frac{M_t + T_x y_s - T_y x_s}{J_t} = \frac{M_s}{J_t}$$

dove:

$$M_s = M_t + T_x y_s - T_y x_s$$

è il momento torcente valutato rispetto al punto S di coordinate x_s ed y_s (punto che per $r \neq 0$ non coincide con il centro di taglio, come si vedrà più avanti).



Le tensioni tangenziali valgono quindi:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{T_x}{2J_y} \left\{ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{r} y^2) \right\} + \frac{T_y}{2J_x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \\ \quad + \frac{M_s}{J_t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} = \frac{T_x}{2J_y} \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{T_y}{2J_x} \left\{ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{r} x^2) \right\} + \\ \quad + \frac{M_s}{J_t} \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \end{cases}$$

Verifichiamo che le tensioni $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ soddisfano la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$

Risulta:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \frac{T_x}{2J_y} \left(\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - 2x \right) + \frac{T_y}{2J_x} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2} + \frac{M_s}{J_t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{T_x}{2J_y} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial y^2} + \frac{T_y}{2J_x} \left(\frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2} - 2y \right) + \frac{M_s}{J_t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y$$

Quindi, tenendo conto che $\nabla^2 \varphi_x = \nabla^2 \varphi_y = \nabla^2 \varphi_t = 0$

l'equazione indefinita di equilibrio risulta identicamente soddisfatta.

Moltiplicandola per y e integrando sull'area della generica sezione retta si ottiene:

$$\int_A \left\{ \frac{\partial(\tau_{xz} y)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz} y)}{\partial y} - \tau_{yz} + \frac{\partial(\sigma_z y)}{\partial z} \right\} = 0$$

e quindi:

$$\int_A (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y) y dA - \int_A \tau_{yz} dA + \frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y dA = 0.$$

Tenendo conto della condizione al contorno sulla superficie laterale:

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0,$$

della relazione:

$$\frac{d}{dz} \int_A \sigma_z y dA = \frac{dM_z}{dz} = \frac{d}{dz} \{ M_z^l - T_y (l - z) \} = T_y,$$

si ottiene infine l'identità:

$$\int_A \tau_{yz} dA = T_y.$$

Procedendo in modo analogo (moltiplicando per x la condizione indefinita di equilibrio e integrando) si ottiene poi la verifica della condizione:

$$\int_A \tau_{xz} dA = T_x.$$

◇ ◇ ◇

5.7 Legame costitutivo tagliante

Nel caso di materiale omogeneo, che comunque è l'unico contemplato nel problema di Saint-Venant, è prassi comune quella di porre il tensore di rigidezza tagliante nella forma:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{GA} \mathbf{X}^{-1}, \quad (5.29)$$

dove A è l'area della sezione retta e $\mathbf{X}$ è detto *tensore dei fattori di taglio*. Si noti che le componenti del tensore $\mathbf{X}$, dette *fattori di taglio*, sono dei numeri puri. Il legame costitutivo tagliante, in termini del tensore dei fattori di taglio, si scrive:

$$\mathbf{T} = G \mathbf{A} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y}^C, \quad \mathbf{y}^C = \frac{1}{GA} \mathbf{X} \mathbf{T}, \quad (5.30)$$

dove lo scorrimento $\mathbf{y}^C$ è valutato rispetto alla fibra longitudinale per il centro di taglio. L'energia elastica di deformazione e quella complementare corrispondenti alla sola parte torcente e tagliante e supponendo il materiale omogeneo, si scriverà quindi:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ G J_t \theta^2 + G A \mathbf{y}^C \cdot \mathbf{X}^{-1} \mathbf{y}^C \right\}, \quad (5.31a)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(M_t^C)^2}{G J_t} + \frac{1}{GA} \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} \mathbf{T} \right\}. \quad (5.31b)$$

Come ogni tensore doppio simmetrico, anche il tensore dei fattori di taglio ha in generale due direzioni principali, dette di *taglio*, ortogonali tra loro e che diagonalizzano la matrice delle componenti. Si noti che le direzioni principali del tensore $\mathbf{X}$ dei fattori di taglio coincidono con quelle del tensore $\mathbf{I}$ di rigidezza tagliante, già denominate a suo tempo direzioni principali di taglio. Un asse di simmetria, come già noto, contiene il baricentro e il centro di taglio ed è principale di inerzia. Inoltre risulta essere anche principale di taglio. Infatti un taglio diretto come l'asse di simmetria è simmetrico e non può quindi generare uno scorrimento nella direzione ortogonale all'asse di simmetria, essendo tale scorrimento emisimmetrico.

Data l'importanza del baricentro nel problema della flessione, dato che a differenza di questa la torsione è nulla nei problemi piani e dato inoltre che il problema del taglio è spesso di secondaria importanza, normalmente l'asse della trave viene fatta coincidere con l'asse dei baricentri e nella

sezione retta vengono spesso assunti quali assi di riferimento gli assi principali di inerzia. Se i calcoli che riguardano il taglio si eseguono rispetto alle direzioni principali di inerzia, che in generale non coincidono con quelle principali di taglio, la matrice delle componenti del tensore dei fattori di taglio sarà piena e il legame costitutivo inverso in forma algebrica risulterà:

$$y_x^C = \chi_x \frac{T_x}{GA} + \chi_{xy} \frac{T_y}{GA}, \quad (5.32a)$$

$$y_y^C = \chi_{xy} \frac{T_x}{GA} + \chi_y \frac{T_y}{GA}, \quad (5.32b)$$

dove gli scorrimenti y_x^C e y_y^C sono valutati rispetto alla fibra longitudinale per il centro di taglio.

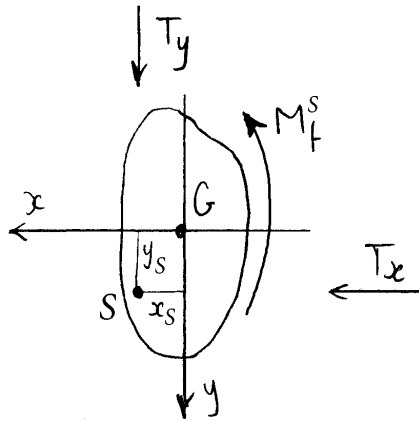
I valori dei fattori di taglio χ_x , χ_y e χ_{xy} dipendono dalla soluzione del problema di flessione, taglio e torsione. Nei casi in cui almeno approssimativamente si conoscono le tensioni tangenziali dovute ad un taglio passante per il centro di taglio, è possibile valutare i fattori di taglio valutando l'energia complementare (5.31b) associata alle date tensioni tangenziali, energia che per esteso si scrive:

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(M_t^C)^2}{G J_t} + \chi_x \frac{T_x^2}{GA} + \chi_y \frac{T_y^2}{GA} + 2 \chi_{xy} \frac{T_x T_y}{GA} \right\}. \quad (5.33)$$

◇ ◇ ◇

Fattori di taglio. Per valutare in generale i fattori di taglio si potrebbe valutare l'energia complementare associata alle tensioni tangenziali soluzioni di quel particolare problema di flessione, taglio e torsione in cui il taglio passa per il centro di taglio. Ma per il fatto che la soluzione nelle tensioni tangenziali definisce un polo privilegiato S rispetto al quale la soluzione stessa è più semplice, si preferisce valutare l'energia complementare del problema generale di polo S , il che conduce ad un legame costitutivo torsionale-tagliante pieno del tipo (2.31). Di conseguenza si utilizzeranno le (2.36) e (2.37) per determinare i fattori di taglio e le (2.34) per valutare il centro di taglio. Al legame costitutivo torsionale-tagliante del tipo (2.31) corrisponde la seguente forma dell'energia complementare per unità di linea, espressa rispetto al polo S :

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ C_t^t (M_t^S)^2 + 2 C_{zx}^t M_t^S T_x + 2 C_{zy}^t M_t^S T_y + C_x^t T_x^2 + C_y^t T_y^2 + 2 C_{xy}^t T_x T_y \right\}. \quad (5.34)$$



Inserendo la soluzione nelle tensioni tangenziali del problema generale nella espressione dell'energia complementare per unità di linea:

$$\psi = \frac{1}{2G} \int_A (\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) dA, \quad (5.35)$$

si ottengono i seguenti valori dei coefficienti che compaiono nella (5.34):

$$C_z^t = \frac{1}{GJ_t^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA \quad (5.36a)$$

$$C_{zx}^t = \frac{1}{2GJ_t J_y} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right) + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right\} dA. \quad (5.36b)$$

$$C_{zy}^t = \frac{1}{2GJ_t J_x} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right) \right\} dA. \quad (5.36c)$$

$$C_x^t = \frac{1}{4GJ_y^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right)^2 \right\} dA. \quad (5.36d)$$

$$C_y^t = \frac{1}{4GJ_x^2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right)^2 \right\} dA. \quad (5.36e)$$

$$C_{xy}^t = \frac{1}{4GJ_x J_y} \int_A \left\{ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right) \right\} dA.$$

$$+ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right) \Big\} dA. \quad (5.36f)$$

Si nota innanzitutto che, come già verificato nell'ambito del problema della torsione, vale la relazione:

$$\int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA = J_t. \quad (5.37)$$

Si ha quindi conferma del fatto, già assodato, che la rigidezza torsionale, inversa della C_z^t , vale GJ_t :

$$C_z^t = \frac{1}{GJ_t} \quad (5.38)$$

Tenuto poi conto che le coordinate del centro di taglio fornite dalle (2.34) riguardano il sistema di assi centrato sul polo iniziale, che nel caso presente coincide con S, ne consegue che nel sistema centrato sul baricentro forniranno le differenze delle coordinate tra il centro di taglio C e il polo S:

$$\begin{aligned} x_C - x_S &= -\frac{C_{zy}^t}{C_z^t} \\ &= -\frac{1}{2J_x} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right) \right\} dA, \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\begin{aligned} y_C - y_S &= \frac{C_{zx}^t}{C_z^t} \\ &= \frac{1}{2J_y} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} - y \right) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right) + \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right\} dA. \end{aligned} \quad (5.39b)$$

D'altronde utilizzando le coordinate del centro di taglio, già determinate, e le coordinate di S si ottiene:

$$x_C - x_S = \frac{1}{2J_x} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - 2\varphi_t \right) y - \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right) x \right\} dA, \quad (5.40a)$$

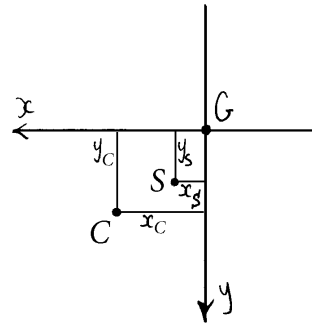
$$y_C - y_S = \frac{1}{2J_y} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + 2\varphi_t \right) x - \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right) y \right\} dA, \quad (5.40b)$$

e poiché valgono le relazioni:

$$2 \int_A \varphi_t y dA = \int_A \left\{ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - (y^2 - \bar{v}x^2) \right) \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \right\} dA, \quad (5.41a)$$

$$2 \int_A \varphi_t x dA = \int_A \left\{ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - (x^2 - \bar{v}y^2) \right) \frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \right\} dA, \quad (5.41b)$$

si ha conferma della validità delle (5.39).



$$\chi_{xy} = GA \left(C_{xy}^t - \frac{(C_{zy}^t)^2}{C_z^t} \right) = GA \left(C_{xy}^t + C_z^t (x_C - x_S)(y_C - y_S) \right). \quad (5.43c)$$

◇ ◇ ◇

Dimostrazione della (5.41a). Nel seguito si dimostra la (5.41a) e in modo analogo può poi dimostrarsi la (5.41b). Integrando per parti, portando uno dei due termini che si ottiene sul contorno e infine utilizzando le condizioni sul contorno e nell'area di φ_y , si ottiene successivamente:

$$\begin{aligned} 2 \int_A \varphi_t y \, dA &= \int_{\partial A} \varphi_t y^2 n_y \, ds - \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} y^2 \, dA \\ &= \int_{\partial A} \varphi_t (y^2 - \bar{v} x^2) n_y \, ds + \bar{v} \int_{\partial A} \varphi_t x^2 n_y \, ds - \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} y^2 \, dA \\ &= \int_{\partial A} \varphi_t \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} n_y \right) ds + \bar{v} \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} x^2 \, dA - \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} y^2 \, dA \\ &= \int_A \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x} \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) dA + \bar{v} \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} x^2 \, dA - \int_A \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} y^2 \, dA \end{aligned} \quad (5.42)$$

e ne consegue immediatamente la (5.41a), come volevasi dimostrare. ■

Con quanto precede e ricordando le (2.36) e (2.37) si ottengono infine i fattori di taglio:

$$\chi_x = GA \left(C_x^t - \frac{(C_{zx}^t)^2}{C_z^t} \right) = GA \left(C_x^t - C_z^t (y_C - y_S)^2 \right), \quad (5.43a)$$

$$\chi_y = GA \left(C_y^t - \frac{(C_{zy}^t)^2}{C_z^t} \right) = GA \left(C_y^t + C_z^t (x_C - x_S)^2 \right), \quad (5.43b)$$

DISTRIBUZIONE DELLA TENSIONE TANGENZIALE

Si studieranno ora le distribuzioni sulle sezioni rette delle componenti della tensione tangenziale conseguenti ai vari tipi di sollecitazioni semplici che possono trovarsi ad agire sulle stesse sezioni rette, limitatamente a quelle che generano una tensione tangenziale. La distribuzione della tensione tangenziale τ_z , oppure delle sue due componenti τ_{xz} e τ_{yz} , è determinata dalla soluzione generale del problema di Saint-Venant o, equivalentemente, dalle soluzioni del problema della torsione e di quel particolare problema di torsione, taglio e flessione avente il taglio passante per il centro di taglio. Si ricorda che tale distribuzione è “esatta” se la trave soddisfa le condizioni del problema. Poiché queste soluzioni dipendono dalla integrazione della equazione di Laplace con opportune condizioni al contorno, integrazione quasi mai eseguibile in forma chiusa, non solo non è possibile uno studio esauriente come nel caso della tensione normale, ma anche lo studio di un singolo caso può presentare notevoli difficoltà. Per tale motivo si preferisce, quando possibile, utilizzare dei metodi approssimati. Tenendo poi conto del fatto che il taglio, per via delle equazioni indefinite di equilibrio, si presenta quasi sempre in associazione col momento flettente a cui corrispondono dei valori di tensione prevalenti rispetto a quelli dovuti al taglio stesso, a volte è sufficiente che i metodi approssimati forniscano delle indicazioni di massima sui valori delle tensioni tangenziali dovute al taglio.

Nel seguito ci si limiterà allo studio di alcuni casi tecnicamente importanti. Per quel che riguarda la distribuzioni della tensione tangenziale conseguente ad un dato momento torcente, non è possibile prescindere dalla

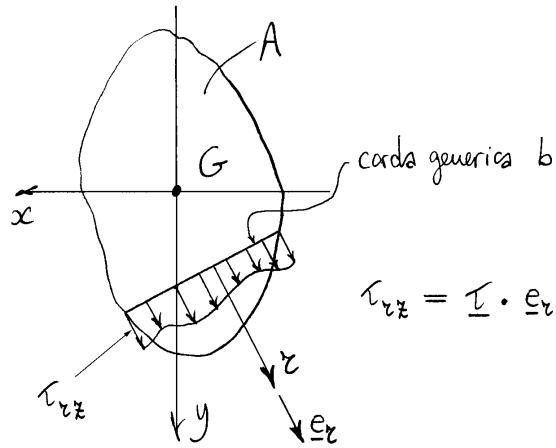
soluzione del problema della torsione, indispensabile tra l'altro per la determinazione generale del centro di taglio. I casi particolari di torsione che si svilupperanno nel seguito saranno quindi basati sulla soluzione, eventualmente approssimata, del problema della torsione. Per quel che riguarda invece la distribuzione della tensione tangenziale conseguente ad una data forza di taglio, non ci si baserà sulla soluzione generale del problema, ma piuttosto sul fatto che una semplice equazione di equilibrio, nota col nome di *formula di Jourawski*, associata alla soluzione (4.1) nelle tensioni normali, sarà in grado di fornire, nel cilindro di Saint-Venant, la tensione tangenziale media lungo una corda qualunque della sezione retta, anche se solo per quel che riguarda la componente della tensione in direzione ortogonale alla corda stessa.

6.1 Formula di Jourawski

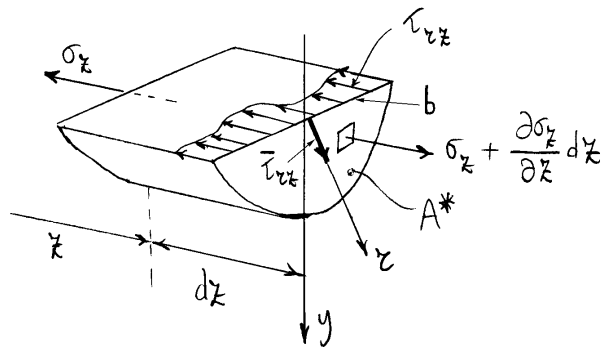
Allo scopo di ottenere la formula di Jourawski, si consideri una generica corda b (di lunghezza b) e sia $\bar{\tau}_{rz}$ la tensione tangenziale media su tale corda, relativamente alla componente nella direzione r ortogonale alla corda:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_b \tau_{rz} db. \quad (6.1)$$

Nella (6.1) τ_{rz} è la componente ortogonale alla corda della tensione tangenziale puntuale. Si consideri poi l'equilibrio alla traslazione in direzione



dell'asse del cilindro di una sua porzione che si ottiene sezionando un elemento dz di cilindro (intorno della generica sezione di coordinata z) con un piano longitudinale passante per la corda b . Delle due porzioni si sceglie quella avente la direzione r positiva entrante e che nel seguito sarà indicata con A^* . Le componenti in direzione dell'asse z delle forze che



agiscono sulla porzione di trave così individuata sono:

$-\sigma_z$, sulla porzione A^* della sezione di coordinata z ;

$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$, sulla porzione A^* della sezione di coordinata $z + dz$;

$-\tau_{rz}$, sulla sezione longitudinale, avendo tenuto conto del teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali.

L'equilibrio si scrive pertanto:

$$-\int_{A^*} \sigma_z dA + \int_{A^*} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dA - \int_b (\tau_{rz} dz) db = 0, \quad (6.2)$$

e cioè:

$$\int_b \tau_{rz} db = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA. \quad (6.3)$$

In virtù della (6.1), la tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{rz}$ risulta pertanto:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{1}{b} \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA. \quad (6.4)$$

La relazione (6.4) e le relazioni (4.1) e (4.2) relative alla tensione normale rendono determinato il problema del calcolo della tensione tangenziale media $\bar{\tau}_{rz}$.

6.2 Criteri di snervamento

Nel caso che sulla sezione retta della trave sia presente anche la tensione tangenziale, non è possibile confrontarsi direttamente con la tensione di snervamento, definita nel caso di uno stato di tensione monoassiale. Introducendo la tensione ideale σ_i , ovvero la tensione monoassiale equivalente, dal punto di vista dello snervamento, al dato stato tensionale, la condizione di appartenenza al dominio elastico richiede, analogamente alle (4.5) e (4.6):

$$-\sigma_s^- \leq \sigma_i \leq \sigma_s^+. \quad (6.5)$$

Limitandosi al caso dei materiali metallici, ovvero dei materiali duttili, ed utilizzando il criterio di Huber-von Mises, nel caso in cui sia presente la sola tensione tangenziale si ha:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau, \quad (6.6)$$

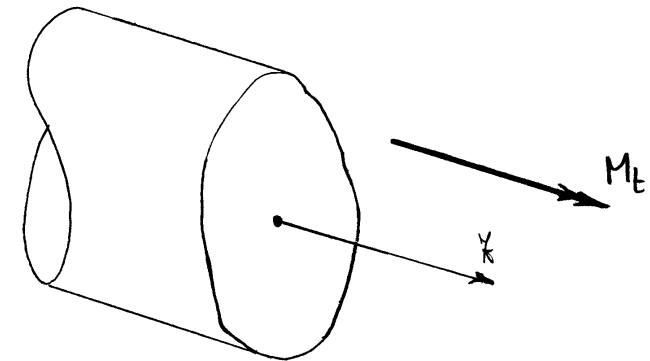
dove τ è il modulo della tensione tangenziale che agisce sulla sezione retta. Naturalmente la tensione tangenziale varia da punto a punto e quindi la verifica del raggiungimento della condizione di snervamento va eseguita nei punti maggiormente sollecitati. Se oltre al taglio e al momento torcente agiscono anche dei momenti flettenti e delle forze normali nella sezione è anche presente una tensione normale σ . In tal caso la tensione ideale, sempre utilizzando il criterio di Huber-von Mises, si calcola come segue:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Si noti che tale formula, come d'altronde la precedente, fornisce sempre un valore positivo, il che non è limitativo poiché i materiali metallici hanno uguale snervamento a trazione e compressione.

6.3 Torsione

Una sezione retta è soggetta a torsione se l'unica caratteristica della sollecitazione agente è un momento torcente, ovvero sia una coppia agente nel piano della sezione, con



asse momento ortogonale al piano della sezione. Nell'ambito del problema di Saint Venant si è ottenuta la soluzione generale del problema della torsione. Qui ci limiteremo a discutere la torsione per le sezioni circolari e per le sezioni sottili, aperte e chiuse.

6.3.1 La sezione circolare

Nel caso della sezione circolare la funzione di ingobbamento è nulla, conformemente a quanto già discusso.

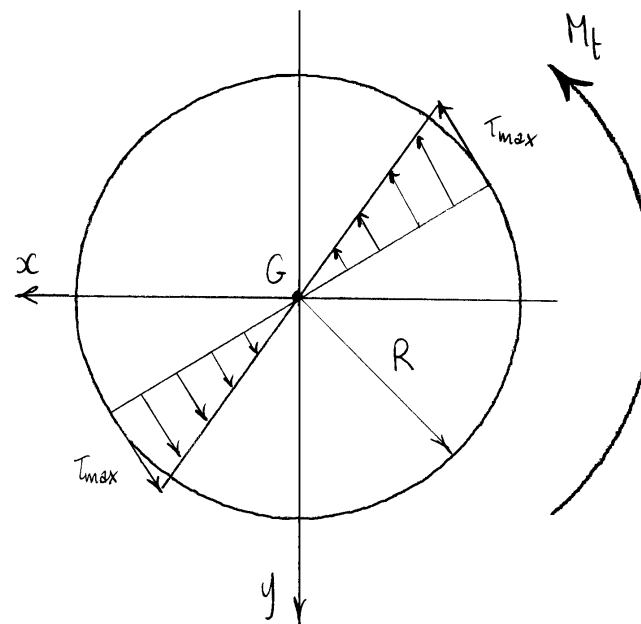
Quindi la tensione tangenziale risulta:

$$\underline{\tau} = \frac{M_t}{J_G} \frac{R\pi}{2} (P-G) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{M_t}{J_G} y \\ \tau_{yz} = \frac{M_t}{J_G} x \end{cases},$$

dove il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Con riferimento ad un diametro della sezione circolare, la tensione tangenziale risulta in ogni punto ortogonale al diametro mentre il suo modulo è proporzionale alla distanza dal baricentro. Il diagramma rappresentativo lungo un diametro è dunque lineare, e risulta lo stesso per ogni diametro.



Indicando ancora con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza dal baricentro, il modulo $\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$ della tensione tangenziale totale vale:

$$\tau = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r.$$

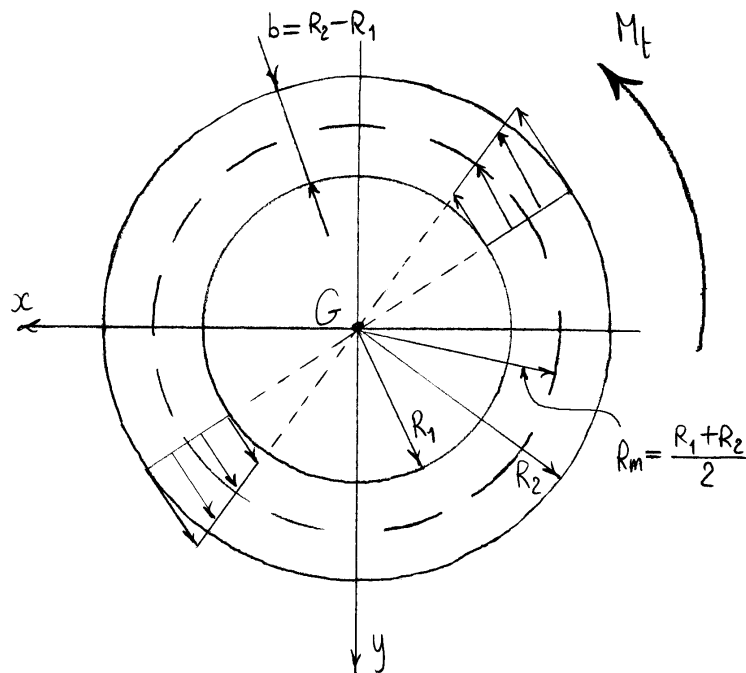
La tensione tangenziale massima è quella lungo il contorno dove $r = R$:

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}.$$

6.3.2 La sezione circolare cava

La soluzione precedente resta valida nel caso di sezione circolare cava, poiché le condizioni al contorno sono soddisfatte anche lungo il contorno interno. In tal caso risulta:

$$J_G = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \pi (R_2^2 + R_1^2) \frac{R_1 + R_2}{2} (R_2 - R_1),$$



$$\tau = \frac{2 M_t}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} r, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 M_t R_2}{\pi (R_2^4 - R_1^4)}, \quad (r = R_2).$$

Notiamo due inoltre risulta:

$$\frac{\tau(R_2) - \tau(R_1)}{\tau\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)} = \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)/2}.$$

La differenza $b = R_2 - R_1$ rappresenta lo spessore della sezione cava mentre $R_m = (R_1 + R_2)/2$ rappresenta il raggio della linea media della sezione cava.

Dunque, se:

$$\frac{b}{R_m} \ll 1,$$

allora la tensione tangenziale risulta praticamente

costante nello spessore (sezione circolare sottile chiusa).

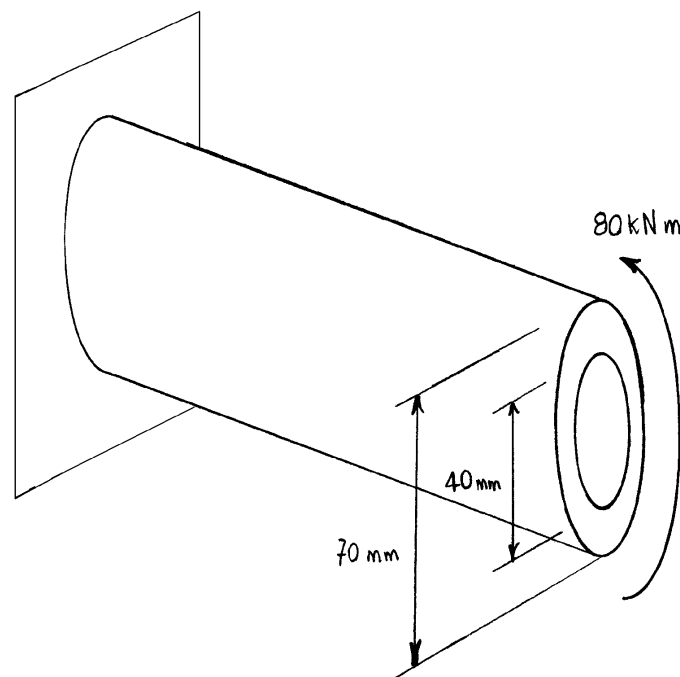
Sotto la validità di tale condizione risulta:

$$\begin{aligned} R_1^2 + R_2^2 &= \left(R_m - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R_m + \frac{b}{2}\right)^2 = \\ &= 2R_m^2 + \frac{b^2}{2} = 2R_m^2 \left(1 + \frac{b^2}{4R_m^2}\right) \approx 2R_m^2, \end{aligned}$$

e dunque:

$$J_G \approx 2\pi b R_m^3,$$

che rappresenta il momento polare di una circonferenza di raggio R_m con distribuzione di massa per unità di linea pari allo spessore b .



Il momento di inerzia polare vale:

$$J_G = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{70 \text{ mm}}{2}\right)^4 - \left(\frac{40 \text{ mm}}{2}\right)^4 \right\} = 3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4,$$

e quindi la tensione tangenziale massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{8 \times 10^7 \text{ N mm}}{3.369 \times 10^7 \text{ mm}^4} \frac{70 \text{ mm}}{2} = 83.10 \text{ N/mm}^2.$$

La tensione ideale massima vale:

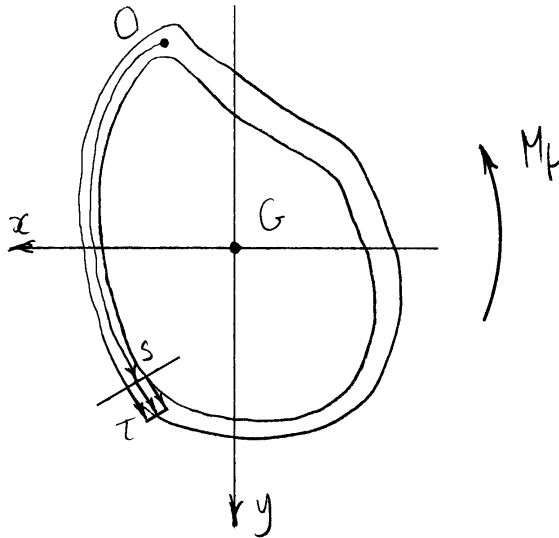
$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_{\max} = 143.94 \text{ N/mm}^2.$$

6.3.3 Mensola di sezione circolare cava

Si consideri la mensola in acciaio di sezione circolare cava illustrata in figura e soggetta ad una coppia torcente di 80 kN all'estremità libera.

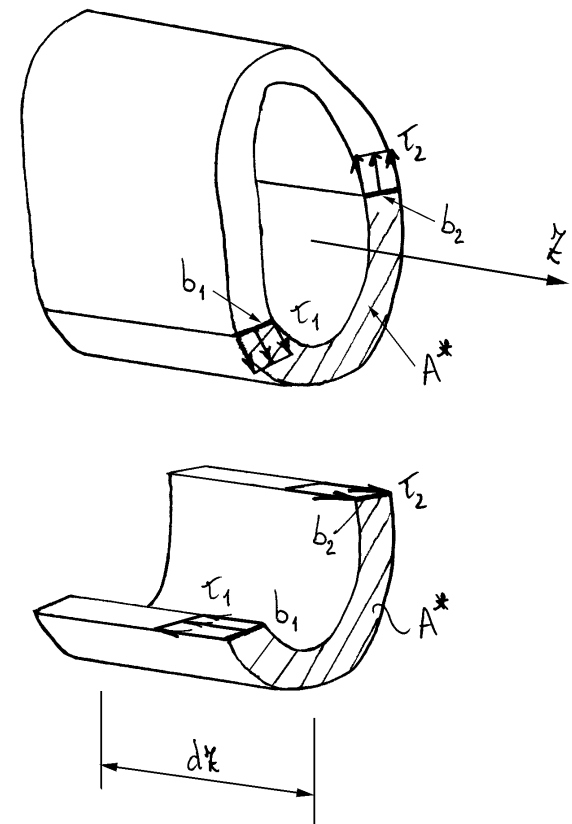
6.3.4 La torsione nelle travi di sezione sottile chiusa

Si consideri una sezione sottile chiusa biconnessa. Se lo spessore è co-



stante oppure “moderatamente” variabile si può assumere, senza grande errore, che le tensioni tangenziali lungo una corda siano parallele alla linea media. Infatti in tal caso il “flusso” delle tensioni sul contorno ha, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso. Inoltre ci si può aspettare, analogamente alla sezione circolare sottile, che le tensioni tangenziali si mantengano costanti lungo una corda generica.

Si separi ora un pezzo di cilindro di lunghezza $d\zeta$ (intorno della generica sezione retta) e si eseguano due ulteriori sezioni con due piani paralleli all'asse ζ (piani longitudinali) e passanti per due corde generiche



di coordinate curvilinee (sulla linea media della sezione sottile chiusa) rispettivamente s_1 e s_2 .

Siano poi τ_1 e τ_2 le tensioni tangenziali agenti lungo le corde di coordinate s_1 e s_2 rispettivamente. Il segmento di trave che così si ottiene è soggetto, sulle due sezioni longitudinali, ad una tensione tangenziale due per il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali vale τ_1 nella sezione corrispondente alla corda s_1 e τ_2 nella sezione corrispondente alla corda s_2 .

L'equilibrio alla traslazione lungo la direzione z del segmento di trave richiede allora:

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2 ,$$

e cioè:

$$\tau b = \text{cost} ,$$

lungo la linea media.

Questo risultato è in accordo con la formula di Jourawski, poiché se agisce il solo momento torcente allora il taglio è nullo e la tensione tangenziale media lungo le due corde deve essere nulla:

$$\frac{\tau_1 b_1 - \tau_2 b_2}{b_1 + b_2} = 0 .$$

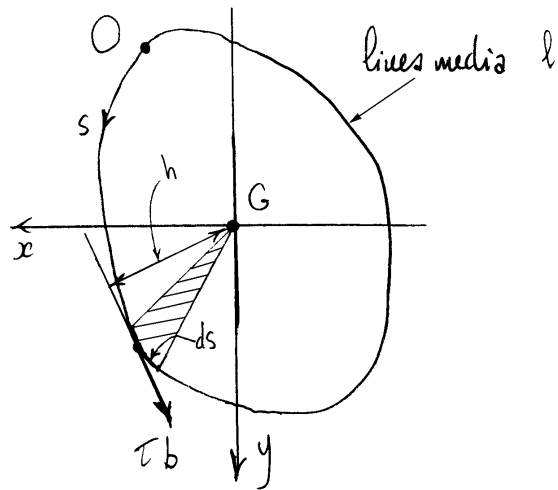
Si noti che la tensione τ_2 è uscente dall'area A^* e questo giustifica il segno negativo utilizzato.

L'equivalenza statica delle tensioni tangenziali con il momento torcente M_t applicato richiede poi:

$$M_t = \oint_l \tau b h ds = \tau b \oint_l h ds ,$$

poiché $\tau b = \text{cost}$. Si noti che, detta Ω l'area racchiusa dalla linea media l , risulta:

$$\Omega = \frac{1}{2} \oint_l h ds .$$



Si ottiene così la formula di Bredt :

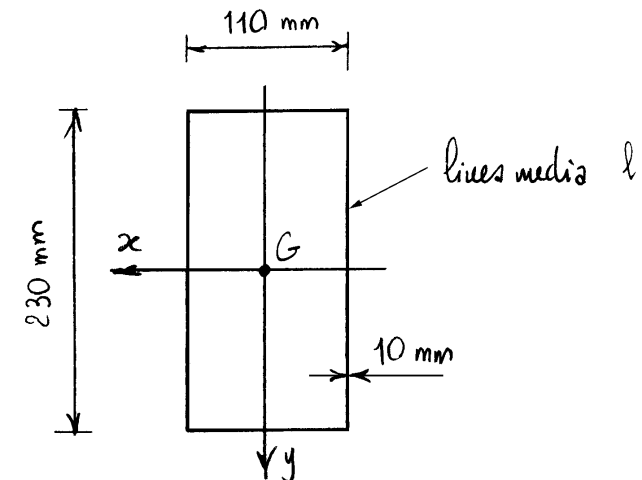
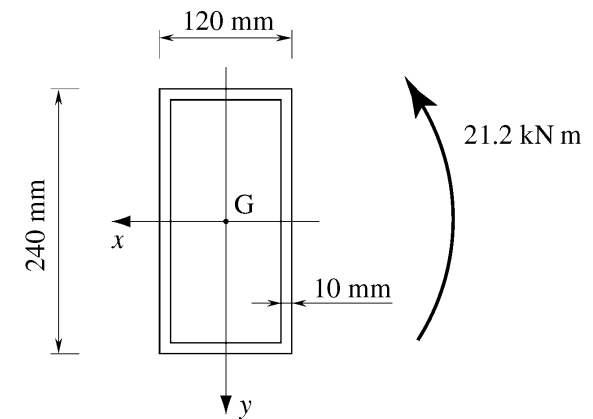
$$\tau = \frac{M_t}{2 \Omega b} .$$

La tensione tangenziale massima si raggiunge dunque quando lo spessore è minimo :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2 \Omega b_{min}} .$$

Sezione scatolare di forma rettangolare

Avale esempio si consideri la sezione scatolare di figura, soggetta ad un momento torcente positivo di 21.2 kN/m.

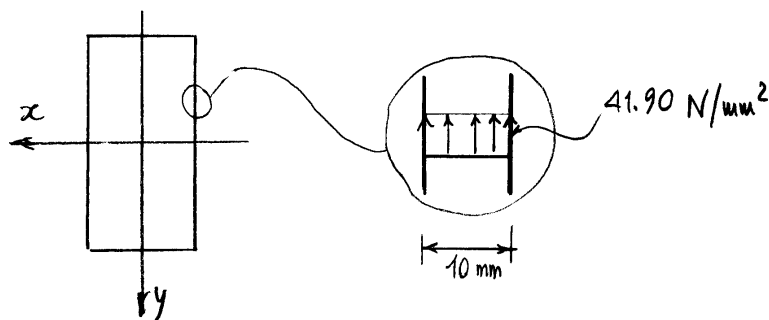


Estraendo la linea media, si ottiene il seguente valore dell'area racchiusa:

$$\Omega = 110 \text{ mm} \times 230 \text{ mm} = 25300 \text{ mm}^2.$$

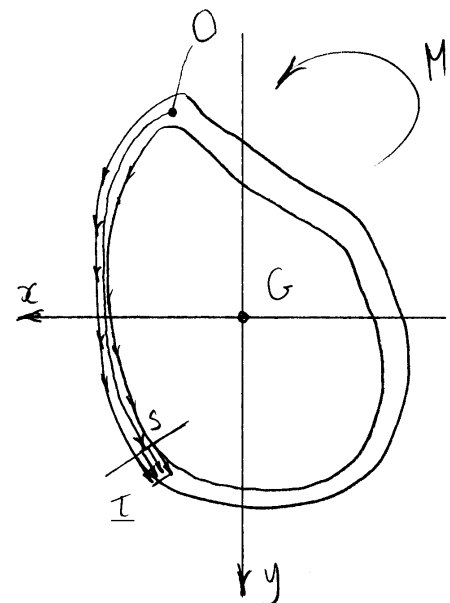
Poiché lo spessore è costante lungo tutta la linea media, la tensione tangenziale è pure costante e vale:

$$\tau = \frac{21.2 \times 10^6 \text{ N mm}}{2 \times 25300 \text{ mm}^2 \times 10 \text{ mm}} = 41.90 \text{ N/mm}^2.$$



Fattore torsionale di rigidezza

Si consideri una sezione sottile chiusa biconnessa e si ricordi che la tensione lungo una corda di spessore b è costante ed è fornita dalla formula di Bredt. Si ricordi inoltre la relazione tra tensione tangenziale e funzione



di ingobbamento:

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} \left\{ \text{grad } \omega + \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} (P - G) \right\} \quad (6.7)$$

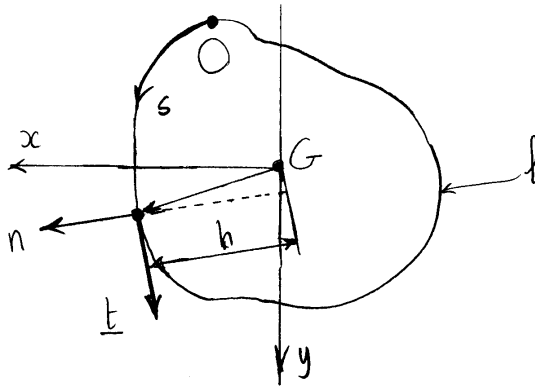
dove $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$ è il tensore rotazione di 90° in senso antiorario. Dalle tensioni tangenziali è quindi possibile risalire al gradiente della funzione di ingobbamento:

$$\text{grad } \omega = \frac{J_t}{M_t} \tau - \mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} (P - G). \quad (6.8)$$

Per poter integrare tale espressione nella funzione di ingobbamento ω la sua circuitazione lungo la linea media chiusa deve essere nulla:

$$\oint_{\ell} \text{grad } \omega \cdot \mathbf{t} \, ds = 0. \quad (6.9)$$

Questa espressione rappresenta quindi una condizione di congruenza.



Si ottiene:

$$\oint_l \underline{r} \cdot \underline{t} \, ds = \oint_l \frac{1}{b} \tau_{sx} b \, ds = \tau_{sx} b \oint_l \frac{ds}{b},$$

$$\begin{aligned} \oint_l \left\{ R_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\} \cdot \underline{t} \, ds &= \oint_l (P-G) \cdot \underline{n} \, ds \\ &= \oint_l h \, ds = 2\Omega. \end{aligned}$$

dove Ω è l'area racchiusa dalla linea media.

Dunque, la condizione:

$$\oint_l \underline{r} \cdot \underline{t} \, ds - \frac{M_t}{J_t} \oint_l \left\{ R_{\frac{\pi}{2}}(P-G) \right\} \cdot \underline{t} \, ds = 0,$$

impone:

$$\tau_{sx} b \oint_l \frac{ds}{b} - 2 \frac{M_t}{J_t} \Omega = 0,$$

e infine:

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_l \frac{ds}{b}}.$$

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere dalla uguaglianza (lavoro di deformazione):

$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b ds = \frac{M_t^2}{2G J_t},$$

tenendo conto che risulta:

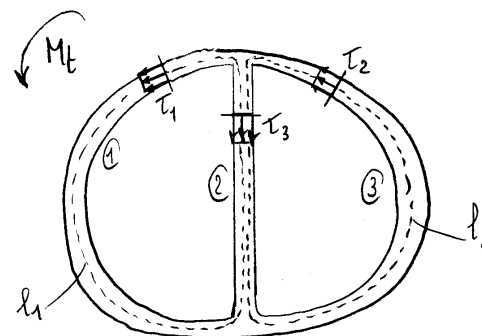
$$\oint_{\ell} \frac{\tau_{sx}^2}{2G} b ds = \frac{\tau_{sx}^2 b^2}{2G} \oint_{\ell} \frac{ds}{b} = \frac{M_t^2}{2G} \frac{\oint_{\ell} \frac{ds}{b}}{4 J^2}.$$

Verifichiamo che la soluzione ottenuta soddisfa la condizione di taglio nullo ($\underline{T} = \underline{0}$). Infatti:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \oint_{\ell} \underline{\tau} b ds = \oint_{\ell} \tau_{sx} b \underline{t} ds \\ &= \tau_{sx} b \oint_{\ell} \underline{t} ds = \tau_{sx} b \frac{R\pi}{2} \oint_{\ell} \underline{n} ds \\ &= \tau_{sx} b \frac{R\pi}{2} \int_{\Omega} \text{grad } 1 d\Omega = \underline{0}. \end{aligned}$$

La torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse

Analizziamo nel seguito, quale esempio facilmente generalizzabile, la sezione sottile chiusa triconnessa.



4 incognite : $\tau_1, \tau_2, \tau_3, J_t$,

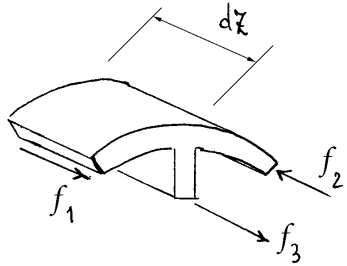
1 equazione di equilibrio di nodo,

1 equazione di equivalenza statica tra le τ e M_t ,

2 equazioni di circuitazione lungo le linee chiuse $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$.

I flussi delle tensioni tangenziali nei vari tratti valgono:

$$f_1 = \tau_1 b_1, \quad f_2 = \tau_2 b_2, \quad f_3 = \tau_3 b_3,$$



L'equazione di equilibrio del nodo alla traslazione nella direzione della linea d'asse richiede:

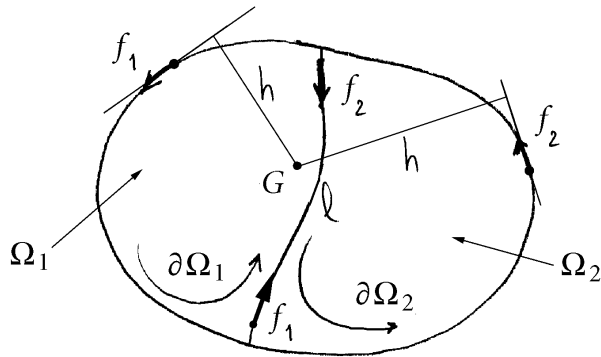
$$f_1 dz - f_2 dz + f_3 dz = 0 ,$$

e si ottiene:

$$f_3 = f_2 - f_1 .$$

L'equivalenza statica richiede:

$$M_t = \oint_{\partial\Omega_1} f_1 h ds_1 + \oint_{\partial\Omega_2} f_2 h ds_2 ,$$



e si ottiene:

$$M_t = 2 \Omega_1 f_1 + 2 \Omega_2 f_2 ,$$

dove Ω_1 e Ω_2 sono le aree racchiuse dalle linee medie $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ rispettivamente.

La circuitazione lungo la generica linea $\partial\Omega_i$ si scrive:

$$\oint_{\partial\Omega_i} \text{grad} w \cdot \underline{t} ds = 0 ,$$

e quindi:

$$\frac{\bar{J}_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_1} \frac{f_1}{b} ds - \int_l \frac{f_2}{b} ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_1} h ds = 0 ,$$

$$\frac{\bar{J}_t}{M_t} \left\{ \oint_{\partial\Omega_2} \frac{f_2}{b} ds - \int_l \frac{f_1}{b} ds \right\} - \oint_{\partial\Omega_2} h ds = 0 ,$$

e infine:

$$f_1 \oint_{\partial\Omega_1} \frac{ds}{b} - f_2 \int_l \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{\bar{J}_t} \oint_{\partial\Omega_1} h ds ,$$

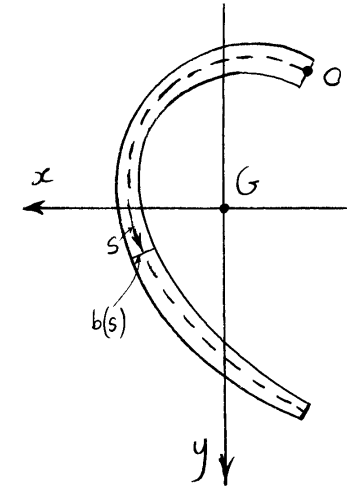
$$- f_1 \int_l \frac{ds}{b} + f_2 \oint_{\partial\Omega_2} \frac{ds}{b} = \frac{M_t}{\bar{J}_t} \oint_{\partial\Omega_2} h ds .$$

Verifichiamo infine che anche nel caso di sezione sottile biconnessa vale la condizione $\underline{T} = \underline{0}$:

$$\begin{aligned}\underline{T} &= \sum_i \oint_{\partial\Omega_i} f_i \underline{t} \, ds \\ &= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \oint_{\partial\Omega_i} \underline{n} \, ds \\ &= \sum_i f_i \frac{R_{\pi/2}}{2} \int_{\Omega_i} \text{grad } 1 \, d\Omega = \underline{0} .\end{aligned}$$

6.3.5 La torsione nelle travi di sezione sottile aperta

Si consideri una sezione sottile aperta generica. Come già per le sezioni sottili chiuse, le tensioni tangenziali lungo una corda possono assumersi parallele alla linea media per garantire che il “flusso” delle tensioni sul contorno abbia, almeno approssimativamente, la direzione del contorno stesso. Inoltre lungo una corda generica la tensione tangenziale media

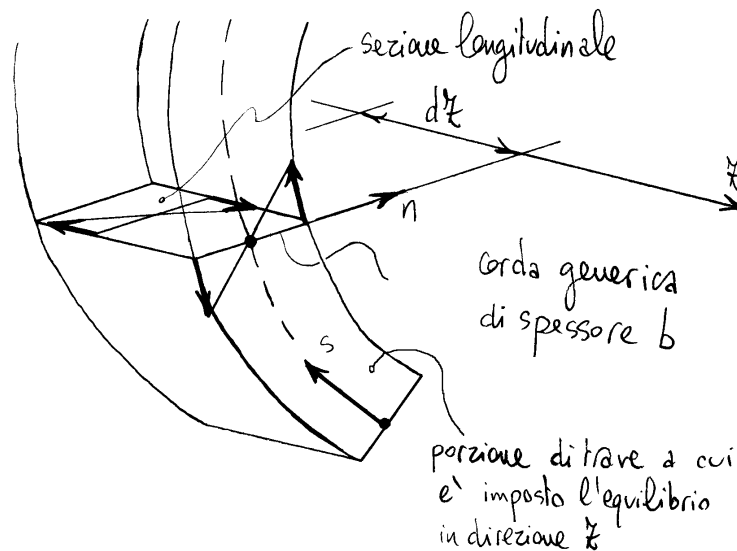


deve essere nulla in conseguenza della formula di Jourawski:

$$\frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \tau \, dn. \quad (6.10)$$

Riordiniamo che

tale formula è ottenuta facendo l'equilibrio alla trazione nella direzione dell'asse x di una porzione di trave ottenuta sezionando un cuneo di trave di larghezza dx con una sezione longitudinale passante per la corda considerata. Ne consegue che la tensione tangenziale deve cambiare di segno lungo la corda e, nell'ipotesi di un'andamento lineare, la tensione tangenziale lungo la corda deve essere emisimmetrica

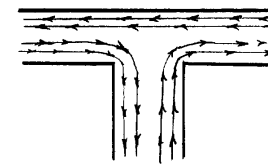


rispetto alla linea media.

Naturalmente, in prossimità dei bordi terminali della sezione oppure in corrispondenza di nodi della sezione o di brusche variazioni di spessore l'andamento delle tensioni tangenziali si discosterà anche notevolmente da quello illustrato. Ne consegue che la soluzione approssimata che andiamo ad illustrare ha validità solo ad una certa distanza da tali zone.



estremità



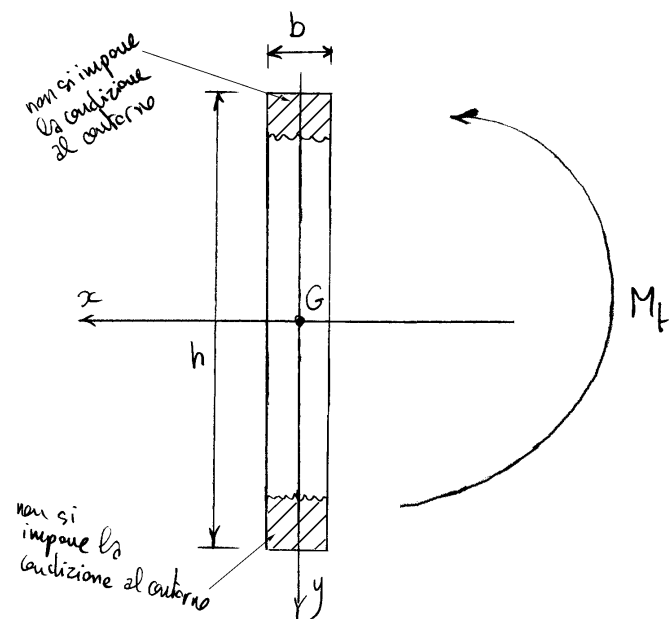
nodo



brusca variazione di spessore

La sezione rettangolare sottile

Prescindendo dall'aumento delle tensioni tangenziali nelle due zone di estremità, ci limitiamo a imporre le condizioni al contorno solo per i lati maggiori del rettangolo. Assunta



il riferimento Gxy principale di inerzia, con l'asse y avente la direzione dei lati maggiori, le equazioni di tali lati risultano:

$$x - \frac{b}{2} = 0 \quad \text{e} \quad x + \frac{b}{2} = 0,$$

essendo b lo spessore del rettangolo.

Procediamo con la funzione delle tensioni. La condizione al contorno:

$$F = 0,$$

è senz'altro soddisfatta sui lati maggiori se si pone:

$$\begin{aligned} F &= c \left(x - \frac{b}{2} \right) \left(x + \frac{b}{2} \right) \\ &= c \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right), \end{aligned}$$

dove c è una costante da determinarsi.

L'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 F = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

imporre allora la condizione:

$$2c = -2 \frac{M_t}{J_t},$$

condizione che impone il valore della costante c :

$$c = -\frac{M_t}{J_t}.$$

La funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

soddisfa quindi l'equazione di Poisson per la funzione delle tensioni e, tranne che nelle due estremità, le condizioni al contorno. Resta da soddisfare la condizione:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

condizione che si scrive:

$$-\frac{2M_t}{J_t} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right) h dx = M_t,$$

dove h è l'altezza del rettangolo.

Si è così ottenuta una equazione che permette di determinare il valore del fattore di rigidità torsionale J_t :

$$-\frac{2h}{J_t} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b^2 x}{4} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 1,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} h b^3.$$

La funzione delle tensioni diventa:

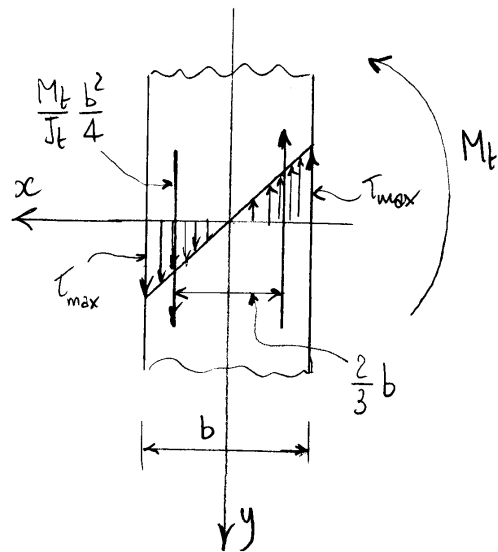
$$F = -\frac{3 M_t}{b^3 h} \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right),$$

e le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{yz} = \frac{2 M_t}{J_t} x = \frac{6 M_t}{b^3 h} x,$$

$$\tau_{xz} = 0.$$

La tensione tangenziale massima si ha in corrispondenza dei lati maggiori e vale:



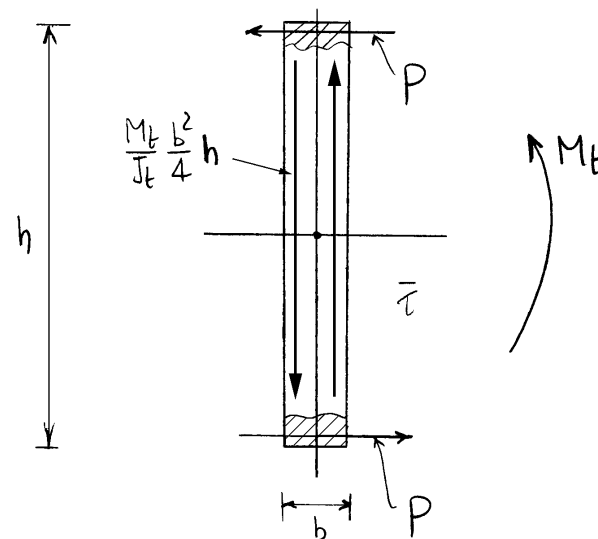
$$\tau_{max} = \left| \tau_{yz} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{M_t}{J_t} b = \frac{3M_t}{b^2 h}.$$

Il momento torcente totale generato dalle τ_{yz} vale:

$$\frac{M_t}{J_t} \frac{b^2}{4} \frac{2}{3} b h = \frac{3M_t}{b^3 h} \frac{b^3 h}{6} = \frac{M_t}{2}.$$

Quindi solo metà del momento torcente M_t è generato dalle τ_{yz} .

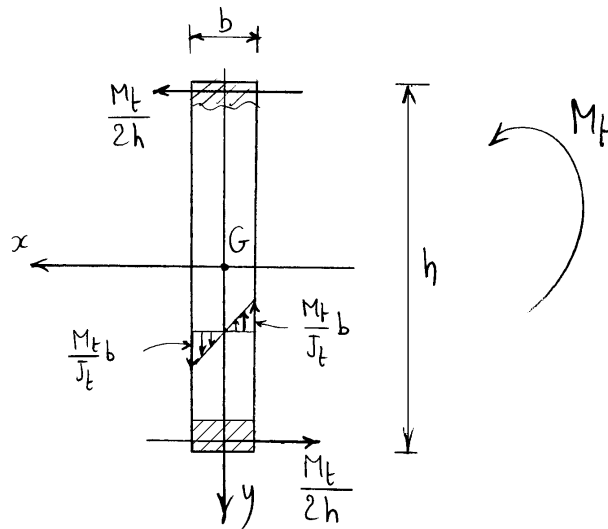
Si consideri ora che sulle due basi del rettangolo sottile le tensioni tangenziali si devono disporre parallelamente alle basi stesse affinché, sul contorno, tali tensioni siano tangenti al contorno stesso. Ne consegue che in prossimità delle due basi vengono generate due forze compressive P parallele alle basi stesse costituendo una coppia di braccio h , cioè pari all'altezza del rettangolo. Queste due forze sono "piccole" ma hanno un braccio "grande", in opposizione alle due forze parallele all'altezza del rettangolo aventi un "grande" mo-



dulo ma un piccolo "braccio". Non deve quindi stupire che la coppia Ph generi approssimativamente un momento uguale a $M_t/2$, cioè uguale al momento generato dalle tensioni tangenziali parallele all'altezza del rettangolo.

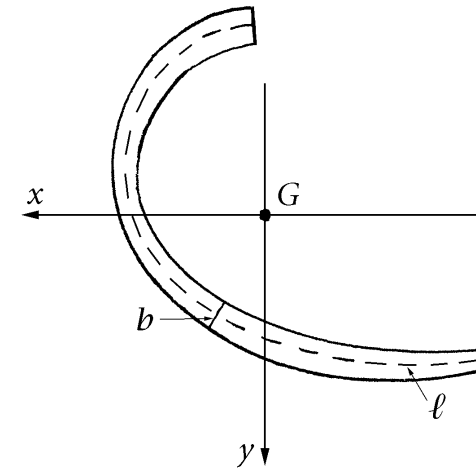
Tenendo conto di quanto detto deve dunque risultare:

$$P = \frac{M_t}{2h}.$$



La sezione sottile generica

Si consideri una trave di sezione sottile aperta di linea media ℓ in generale curva e di spessore b in generale variabile. Si assuma poi un'ascissa curvilinea s sulla linea media ℓ , espressa dalla distanza misurata sulla linea media da un punto preso come origine. È allora possibile individuare



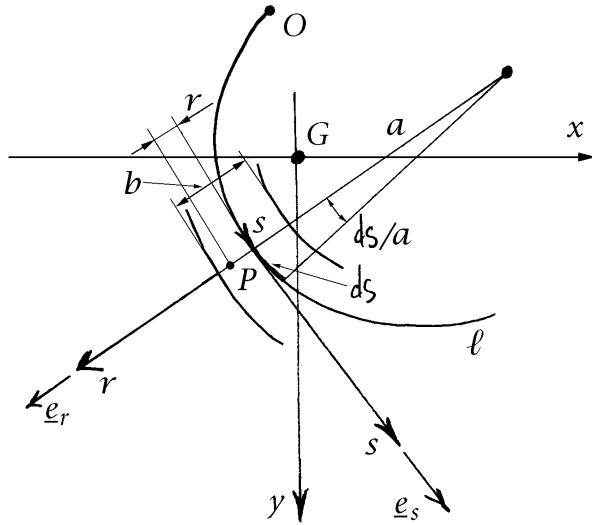
il punto generico P della sezione sottile per il tramite dell'ascissa s e della distanza r del punto dalla linea media, misurata nella direzione ortogonale alla linea media stessa. La funzione $P(r, s)$ rappresenta un sistema di coordinate generali. Le linee coordinate r di equazione $s = \text{cost}$ sono le rette ortogonali alla linea media, mentre quelle s di equazione $r = \text{cost}$ sono le linee parallele alla linea media.

Si supponga poi che il raggio di curvatura a della linea media della sezione sia grande rispetto allo spessore b :

$$\frac{b}{a} \ll 1. \quad (6.11)$$

Sotto tale ipotesi il laplaciano che compare nell'equazione di Poisson che regge il problema della funzione delle tensioni F si scrive in modo approssimato:

$$\nabla^2 F \approx \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}. \quad (6.12)$$



$$\tau_{rz} = \frac{\partial F}{\partial s} \approx 0, \quad (6.16)$$

dove nella τ_{rz} si sono trascurati i contributi della derivata dello spessore b per l'ipotesi di lenta variazione di questo lungo la linea media. Lungo una corda la tensione tangenziale assume il valore massimo in modulo sul contorno. Detto $\bar{\tau}$ tale valore, risulta:

$$\bar{\tau} = \left| \tau_{sz}(\pm \frac{b}{2}) \right| = \frac{M_t}{J_t} b. \quad (6.17)$$

L'equazione di Poisson diventa allora:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -2 \frac{M_t}{J_t}. \quad (6.13)$$

Si trascuri, come per la sezione rettangolare sottile, il soddisfacimento delle condizioni al contorno nelle estremità della sezione e in più negli eventuali nodi e si supponga che lo spessore b vari lentamente lungo la linea media della sezione. In tali ipotesi la funzione:

$$F = -\frac{M_t}{J_t} \left(r^2 - \frac{b^2}{4} \right), \quad (6.14)$$

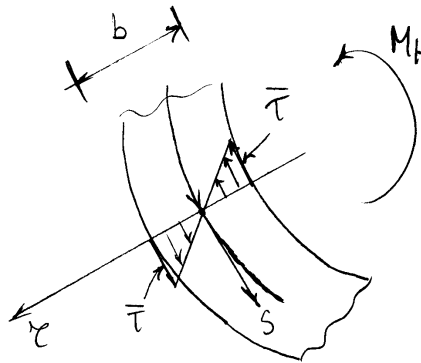
soddisfa, in modo approssimato, sia l'equazione di Poisson (1) che le condizioni al contorno $F(b/2) = 0$ e $F(-b/2) = 0$ e rappresenta dunque la soluzione, approssimata, del problema della torsione per le travi di sezione sottile aperta, naturalmente sotto le ipotesi dette.

Dato che localmente il sistema generale di coordinate origina approssimativamente una base di vettori ortonormali le tensioni tangenziali valgono:

$$\tau_{sz} = -\frac{\partial F}{\partial r} = 2 \frac{M_t}{J_t} r, \quad (6.15)$$

Dato che M_t e J_t non dipendono da s , la tensione tangenziale massima τ_s si ha in corrispondenza dello spessore massimo:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_t} b_{\max}.$$



Di nuovo, J_t si ottiene imponendo:

$$2 \int_A F dA = M_t,$$

cioè:

$$-2 \frac{M_t}{J_t} \int_l ds \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(z^2 - \frac{b^2}{4} \right) dz = M_t,$$

e quindi:

$$J_t = \frac{1}{3} \int_l b^3 ds.$$

Se $b = \text{cost}$, questa diventa (come nel caso della sezione rettangolare sottile):

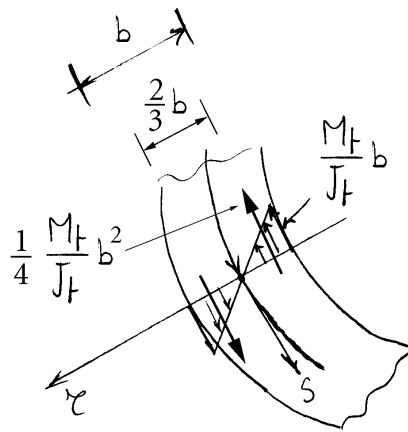
$$J_t = \frac{1}{3} b^3 l$$

dove l è la lunghezza complessiva della linea media.

Da ultimo, occorre notare che di nuovo le τ_{sz} riproducono solo la metà del momento torcente, se si trascura, nello spirito delle sezioni sottili, l'effetto curvatura:

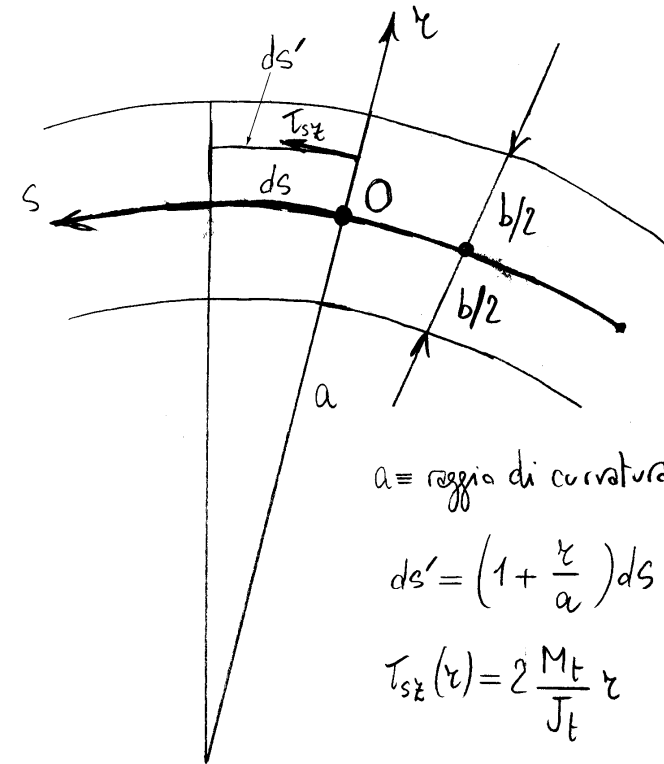
$$\int_l \frac{1}{6} \frac{M_t}{J_t} b^3 ds = \frac{1}{2} \frac{M_t}{J_t} \frac{1}{3} \int_l b^3 ds = \frac{M_t}{2}.$$

Tuttavia, tenendo conto dell'effetto curvatura, le tensioni tangenziali ridotte alla linea media



generano non solo delle coppie distribuite lungo la linea media, ma anche delle forze agenti la direzione della linea media. Questo perché le tensioni tangenziali dalla parte del centro di curvatura agiscono su aree più piccole rispetto a quelle agenti dalla parte opposta. Queste forze risultanti, anche se piccole, non sono trascurabili agli effetti del calcolo del momento torcente, per l'effetto amplificante della loro distanza dal polo di riduzione del momento torcente.

La risultante, per unità di linea media, delle tensioni agenti lungo una corda vale:



$$f = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sz} ds' dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} z \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz,$$

e infine:

$$f = \frac{M_t b^3}{6 J_t a}.$$

In modo analogo si ottiene il momento torcente risultante, per unità di linea, rispetto al polo O intersezione della corda con la linea media:

$$m_t = \frac{1}{ds} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{sx} x ds' d\tau$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} 2 \frac{M_t}{J_t} x^2 \left(1 + \frac{x}{a}\right) d\tau,$$

e infine:

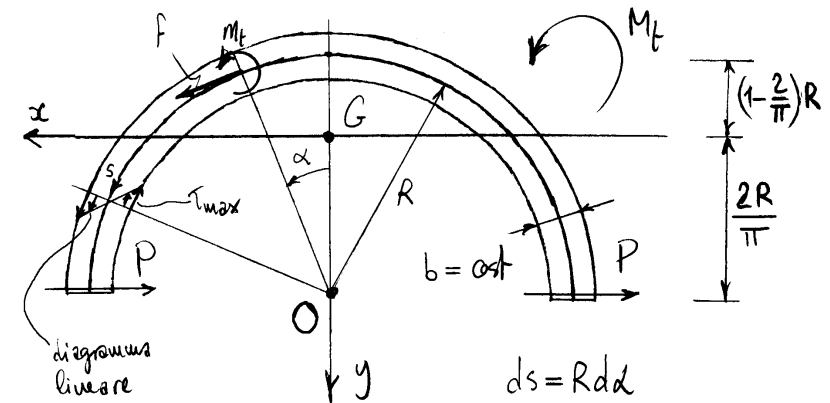
$$m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t}.$$

Ne risulta che m_t non risente dell'effetto curvatura.

Semicirconferenza sottile

Sia data una semicirconferenza sottile di raggio R e di spessore b costante. Il fattore torsionale di rigidezza e la tensione tangenziale sul contorno valgono:

$$J_t = \frac{1}{3} \pi R b^3, \quad \tau_{\max} = \frac{3 M_t}{\pi R b^2}.$$



Il raggio di curvatura è costante e vale R .

Le tensioni ridotte alla linea media danno origine alle forze e momenti seguenti:

$$F = \frac{M_t b^3}{6 J_t R}, \quad m_t = \frac{M_t b^3}{6 J_t}.$$

Il momento torcente dovuto alle tensioni tangenziali τ_{xs} , calcolato con polo di riduzione il centro O

della semicirconferenza, vale, tenendo conto della emisimmetria del problema:

$$\begin{aligned} M_t' &= 2 \int_0^{\pi/2} f R (R d\alpha) + 2 \int_0^{\pi/2} m_t (R d\alpha) \\ &= 2 f R^2 \frac{\pi}{2} + 2 m_t R \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} + \frac{M_t b^3 R \pi}{6 J_t} = M_t. \end{aligned}$$

La tensione tangenziale τ_{xz} genera quindi tutto il momento torcente (metà attraverso f e metà attraverso m_t). L'equilibrio alla traslazione orizzontale determina poi le forze P orizzontali generate dalle tensioni tangenziali τ_{xz} nelle due zone di estremità:

$$\int_0^{\pi/2} f G \alpha R d\alpha = P.$$

Si ottiene:

$$P = f R = \frac{M_t b^3}{6 J_t} = \frac{M_t}{2 \pi R}.$$

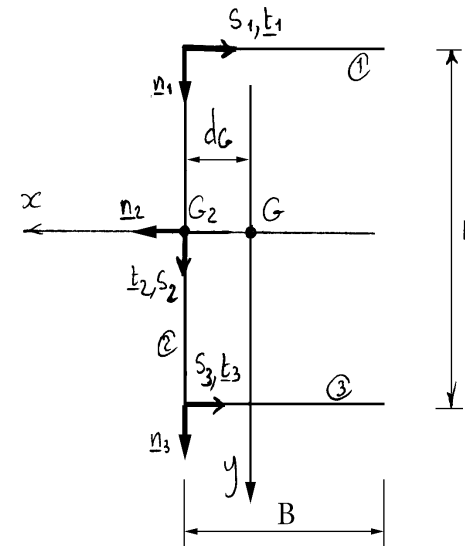
La sezione a C

Funzione di ingobbamento.

Sulla linea media dove $\tau = 0$:

$$\text{grad } w = - \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P - G) = \underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T (P - G),$$

dove $\underline{R}_{\frac{\pi}{2}} \equiv$ Rotazione di 90° in senso antiorario ($\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T = -\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}$).



1) tratto ①:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s_1} &= \text{grad } w \cdot \underline{t}_1 = - \underline{R}_{\frac{\pi}{2}} (P - G) \cdot \underline{t}_1 \\ &= -(P - G) \cdot (\underline{R}_{\frac{\pi}{2}}^T \underline{t}_1) = -(P - G) \cdot \underline{n}_1 = \frac{H}{2}. \end{aligned}$$

2) tratto ②:

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial s_2} = - (P-G) \cdot \underline{n}_2 = -d_G$$

3) tratto ③:

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial s_3} = - (P-G) \cdot \underline{n}_3 = -\frac{H}{2}$$

Integrando, si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{H}{2} s_1 + C_1 = \frac{H}{2} (s_1 + d_G) \\ \omega_2 = -d_G s_2 + C_2 \\ \omega_3 = -\frac{H}{2} s_3 + C_3 = -\frac{H}{2} (s_3 + d_G) \end{cases}$$

Poiché la sezione è simmetrica, la funzione di ingobbamento ω è emisimmetrica a meno di un moto rigido globale di traslazione nella direzione dell'asse della trave. Imponendo l'emisimmetria, deve risultare:

$$\omega_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0,$$

$$\omega_3(s) = -\omega_1(s) \quad \Rightarrow \quad C_3 = -C_1.$$

Imponendo infine la condizione di continuità in uno dei due spigoli della sezione si ottiene poi:

$$\omega_1(0) = \omega_2(-\frac{H}{2}) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{H}{2} d_G.$$

Centro di taglio.

Si ricordi che risulta:

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \omega y \, dA$$

Trascurando la variabilità di ω nello spessore e tenendo conto che:

$$y = \begin{cases} -\frac{H}{2} & \text{tratto ①} \\ s_2 & \text{tratto ②} \\ \frac{H}{2} & \text{tratto ③} \end{cases}$$

risulta:

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \left\{ -\int_0^B \frac{H}{2} (s_1 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_1 - \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} d_G s_2^2 \delta_2 \, ds_2 - \int_0^B \frac{H}{2} (s_3 + d_G) \frac{H}{2} \delta_1 \, ds_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{J_x} \left\{ \left(\frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) + \frac{d_G \delta_2 H^3}{12} + \left(\frac{\delta_1 B^2 H^2}{8} + \frac{d_G \delta_1 B H^2}{4} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{J_x} \left\{ \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G \left(\frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2} \right) \right\}.$$

Ricordando che:

$$J_x = \frac{\delta_2 H^3}{12} + \frac{\delta_1 B H^2}{2},$$

si ottiene infine:

$$x_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4} + d_G.$$

La distanza d_c del centro di taglio dalla linea media dell'anima vale quindi:

$$d_c = \frac{1}{J_x} \frac{\delta_1 B^2 H^2}{4}.$$

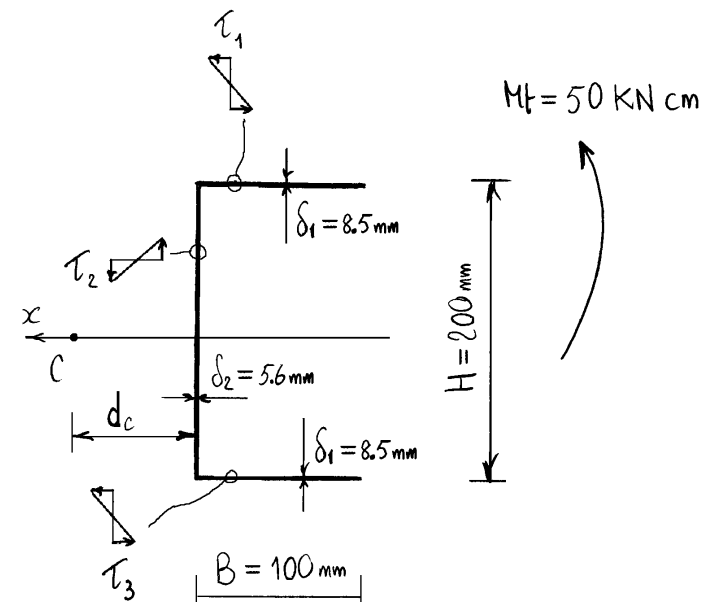
Esempio numerico.

Si consideri la sezione a C di figura, soggetta ad un momento torcente antiorario di 50 kN cm. Il fattore torsionale di rigidezza vale:

$$J_t = \frac{2}{3} \delta_1^3 B + \frac{1}{3} \delta_2^3 H = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4.$$

Il momento di inerzia rispetto all'asse x vale:

$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$



Lungo le ali la tensione tangenziale vale:

$$\begin{aligned}\tau_1 = \tau_3 &= \frac{M_t}{J_t} s_1 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 8.5 \text{ mm} = 80.72 \text{ N/mm}^2,\end{aligned}$$

mentre lungo l'anima risulta:

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \frac{M_t}{J_t} s_2 = \\ &= \frac{5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4} \times 5.6 \text{ mm} = 53.18 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}$$

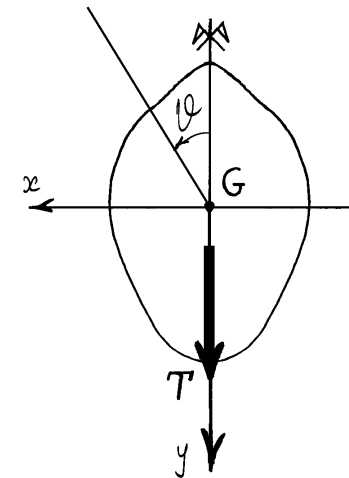
La posizione del centro di taglio risulta infine:

$$d_C = 41.00 \text{ mm}.$$

6.4 Taglio

6.4.1 Centro di taglio

Si ricordi che il centro di taglio della sezione retta è il punto che disaccoppia l'effetto del taglio e del momento torcente. Se il taglio passa per il centro di taglio allora l'angolo unitario di torsione è nullo e l'unica deformazione è uno scorrimento. Dualmente la rotazione torsionale dovuta al solo momento torcente deve avere polo coincidente col centro di taglio per far sì che sia nullo lo scorrimento tra la fibra longitudinale passante per il centro di taglio e la sezione retta. Un taglio passante per il centro di taglio non compie quindi lavoro per effetto della rotazione torsionale dovuta a un momento torcente e viceversa un momento torcente non compie lavoro per effetto dello scorrimento dovuto ad un taglio passante per il centro di taglio. Inoltre si ricordi che un asse di simmetria contiene il centro di taglio, poiché un taglio avente retta d'azione l'asse di simmetria è simmetrico mentre una rotazione torsionale è emisimmetrica e quindi tale taglio non può provocare una rotazione torsionale.



6.4.2 Formula di Jourawski

Formula di Jourawski binomia

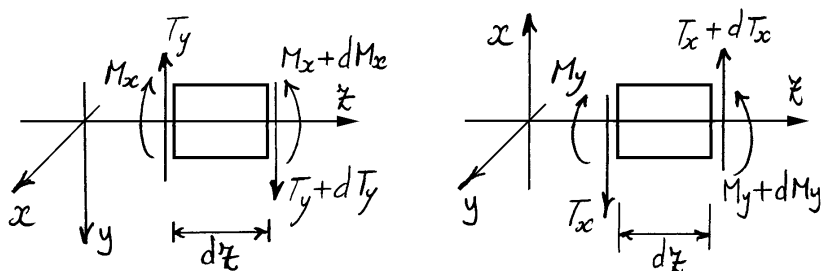
Derivando la formula trinomia della forza normale eccentrica sotto le ipotesi del cilindro di Saint-Venant, cioè di una trave ad asse rettilineo a sezione costante e caricata solo alle estremità, si ottiene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{dM_x}{dz} \frac{y}{J_x} - E \frac{dM_y}{dz} \frac{x}{J_y}, \quad (1)$$

poichè la forza normale, nel caso di trave caricata solo alle estremità, è costante.

Le equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione attorno agli assi x e y si scrivono:

$$\frac{dM_x}{dz} = T_y, \quad \frac{dM_y}{dz} = -T_x. \quad (2)$$



Si noti che anche T_x e T_y sono costanti e che quindi è costante anche il taglio complessivo T di cui T_x e T_y sono componenti.

La (1), con le (2), diviene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{T_y}{J_x} y + E \frac{T_x}{J_y} x. \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (7) del Capitolo 1, a pagina 4, si ottiene infine la formula di Jourawski binomia:

$$\tau_{rz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} + \frac{T_x S_y^*}{b J_y}, \quad (4)$$

dove:

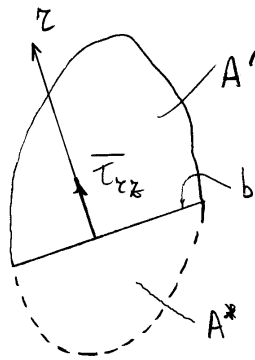
$$S_x^* = \int_{A^*} E y dA, \quad S_y^* = \int_{A^*} E x dA, \quad (5)$$

rappresentano i momenti statici rispetto agli assi x e y rispettivamente della porzione A^* della sezione retta. Si noti che gli assi x e y sono baricentrici per l'intera sezione retta ma non, in generale, per una sua porzione.

Si noti anche che se τ_{rz} è positiva vuol dire che

il suo verso è concorde con z , cioè vuol dire che $\overline{\tau_{xz}}$ è entrante nella porzione A^* della sezione retta.

Se invece della porzione A^* della sezione retta si fosse scelta la porzione complementare A'



si sarebbe pervenuti alla stessa formula, sotto la condizione di orientare z questa volta verso l'interno di A' , e tenendo conto che ora i momenti statici da considerare sono quelli della porzione A' :

$$S'_x = \int_{A'} E y dA, \quad S'_y = \int_{A'} E x dA.$$

Tenendo conto che:

$$S'_x + S_x^* = \int_A y dA = 0,$$

$$S'_y + S_y^* = \int_A x dA = 0,$$

si ottiene:

$$\begin{cases} S'_x = -S_x^* \\ S'_y = -S_y^* \end{cases}.$$

Se ne deduce che utilizzando la porzione A^* , oppure la sua complementare A' , il risultato, a meno del segno, non cambia. Il cambiamento del segno è giustificato dal fatto che se $\overline{\tau_{xz}}$ è entrante in A^* allora è positiva se z è entrante in A^* (come succede se si sceglie la porzione A^* dell'area) mentre è negativa se z è uscente da A^* (come succede se si sceglie la porzione A' complementare di A^*).

La formula di Jourawski non fornisce la

distribuzione puntuale delle tensioni tangenziali lungo la corda. Comunque, in tutti quei casi in cui si può ritenere che tale distribuzione sulla corda sia simmetrica e lo spessore della corda sia piccolo rispetto alle altre dimensioni della sezione, appare lecito confondere il valore puntuale della τ_{xz} con quello medio $\bar{\tau}_{xz}$.

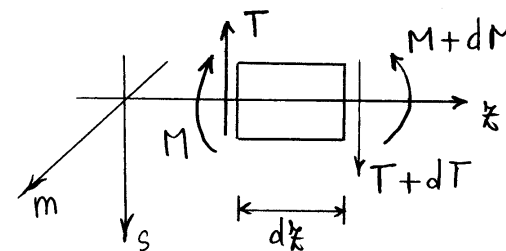
Inoltre, nel caso di travi snelle, le tensioni dovute al taglio sono più piccole di quelle dovute al momento flettente e pertanto la loro conoscenza puntuale non è sempre indispensabile da un punto di vista tecnico.

Formula di Jourawski monomia

Le ipotesi sono ancora quelle di trave ad asse rettilineo, a sezione costante e caricata solo alle estremità. Inoltre la trave viene considerata soggetta ad un taglio generico T costante. Se si considera poi l'asse s parallelo al taglio e passante per il baricentro, nel piano sz , per equilibrio, deve agire un momento flettente M , di cui s rappresenta l'asse di sollecitazione, tale che:

$$\frac{dM}{dz} = T. \quad (6.18)$$

L'asse n coniugato di s rappresenta l'asse neutro della flessione associata al taglio T , flessione dovuta al momento flettente M che agisce nel piano sz .

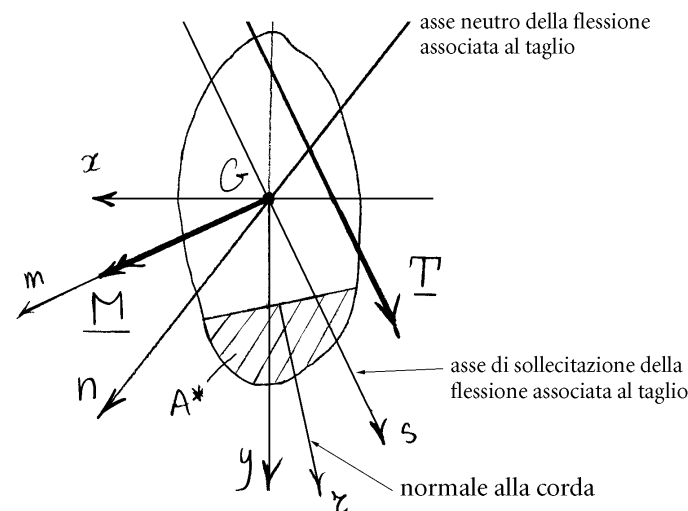


Questa è l'unica caratteristica della sollecitazione che varia con z e fornisce quindi tutta la variazione della σ_z con z . Poiché la tensione normale dovuta al momento flettente M vale:

$$\sigma_z = E \frac{M}{J_n} s, \quad (6.19)$$

si ottiene infine:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E \frac{dM}{dz} \frac{s}{J_n} = E \frac{T}{J_n} s. \quad (6.20)$$



Inserendo la (6.20) nella (6.4), alla pagina 200, si ottiene infine la formula di Jourawski monomia:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{TS_n^*}{bJ_n}, \quad (6.21)$$

dove:

$$S_n^* = \int_{A^*} Es \, dA, \quad (6.22)$$

è il momento statico, della parte A^* dell'area individuata dalla corda, rispetto all'asse neutro n della flessione associata al taglio, valutato con distanze in direzione dell'asse di sollecitazione s .

Sezione a doppio T

Data una sezione IPE270 soggetta ad un taglio di 30 kN si vuole calcolare la tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica. Con riferimento alla figura, il taglio T agisce secondo l'asse di simmetria y , che quindi coincide con l'asse di sollecitazione, mentre l'asse x coincide con l'asse neutro. Occorre quindi valutare il momento statico di mezza sezione rispetto all'asse x :

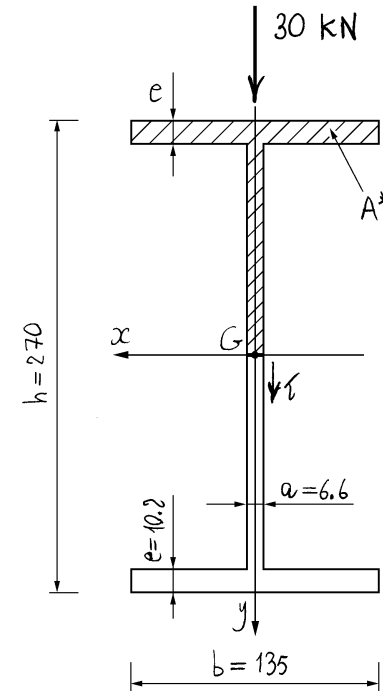
$$S_x^* = - \left\{ b e \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) + a \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2} \right) \right\}$$

$$= - \left\{ 13.5 \times 1.02 \times 12.99 + 0.66 \times \frac{(12.99)^2}{2} \right\} = -235 \text{ cm}^3.$$

La tensione tangenziale media lungo la corda baricentrica vale quindi:

$$\tau = \frac{\frac{F}{2} S_x^*}{a J_x} =$$

$$= - \frac{3 \times 10^4 \text{ N} \times 235 \times 10^3 \text{ mm}^3}{6.6 \text{ mm} \times 5.790 \times 10^7 \text{ mm}^4} = -18.45 \text{ N/mm}^2$$



IPE 270

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure sono in mm

Il segno negativo significa che la tensione tangenziale è uscente dall'area A^* prescelta.

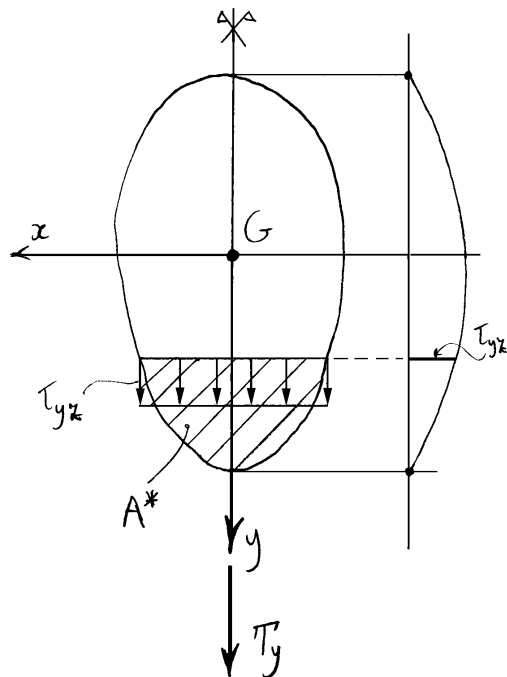
Poiché la sezione è simmetrica rispetto all'asse y la tensione tangenziale può ritenersi costante lungo la corda e la tensione tangenziale media rappresenta dunque la tensione puntuale.

In corrispondenza della corda baricentrica la tensione normale è nulla. Lungo tale corda si ottiene quindi la seguente tensione ideale:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau = 31.96 \text{ N/mm}^2.$$

6.4.3 Il taglio nelle sezioni compatte simmetriche

Si consideri una sezione compatta, simmetrica rispetto all'asse y e soggetta ad un taglio T_y avente y quale retta d'azione (dunque passante per il centro di taglio). Per la simmetria del problema, la distribuzione delle tensioni tangenziali τ_{yx} , sulla generica corda ortogonale all'asse



l'asse y di simmetria, deve essere simmetrica. Utilizzando la formula di Jourawski e confondendo il valore puntuale con quello medio si ottiene:

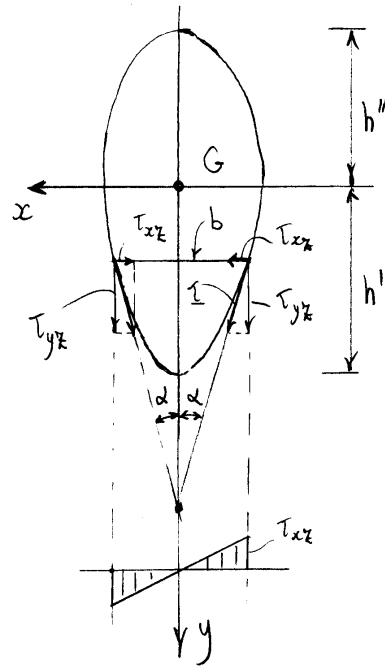
$$\tau_{y\bar{x}} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x},$$

dove al solito S_x^* rappresenta il momento statico di una delle due aree in cui la sezione viene divisa dalla corda.

Si consideri ora che in generale la componente τ_{yx} non è tangente al contorno. È dunque necessaria una componente $\tau_{x\bar{x}}$ che renda la tensione tangenziale totale tangente al contorno.

Se α è l'inclinazione della tangente al contorno rispetto all'asse y , deve risultare:

$$\begin{cases} \tau_{x\bar{x}} = \tau_{y\bar{x}} \operatorname{tg} \alpha & x = -\frac{b}{2} \\ \tau_{x\bar{x}} = -\tau_{y\bar{x}} \operatorname{tg} \alpha & x = +\frac{b}{2} \end{cases}.$$



Ipotizzando una variazione lineare di τ_{xz} lungo la corda deve risultare:

$$\tau_{xz} = c x \quad .$$

Poiché :

$$\tau_{xz}\left(-\frac{b}{2}\right) = -c \frac{b}{2} = \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha ,$$

si ha infine :

$$\tau_{xz} = -\frac{2x}{b} \tau_{yz} \operatorname{tg} \alpha .$$

Energia complementare per unità di linea:

$$\psi = \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} = \int_A \frac{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}{2G} dA .$$

Ne consegue:

$$\begin{aligned} \chi_y \frac{T_y^2}{2GA} &= \int_A \frac{\tau_{yz}^2}{2G} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \int_A \frac{T_y^2 S_x^{*2}}{2G b^2 J_x^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA \\ &= \frac{T_y^2}{2GA} \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA . \end{aligned}$$

Il fattore di taglio relativo all'asse y di simmetria vale quindi:

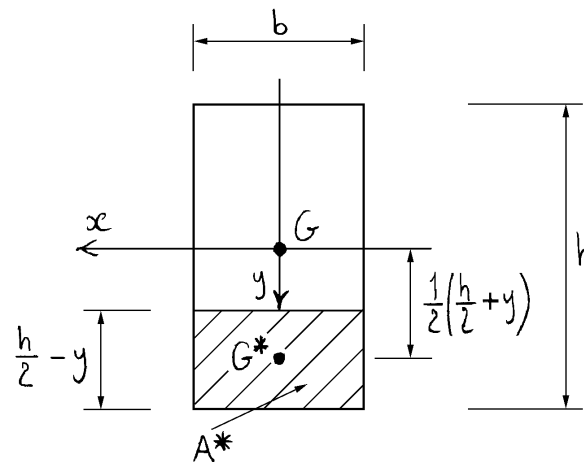
$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x^{*2}}{b^2} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dA = \\ &= \frac{A}{J_x^2} \int_{-h''}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b^2} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + \frac{4x^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{J_x} \int_{-h''}^{h'} \frac{S_x^{*2}}{b} \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha\right) dy.$$

6.4.4 Sezione rettangolare

Nel caso della sezione rettangolare il momento statico dell'area A^* individuata dalla corda di coordinata y vale:

$$S_x^* = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$



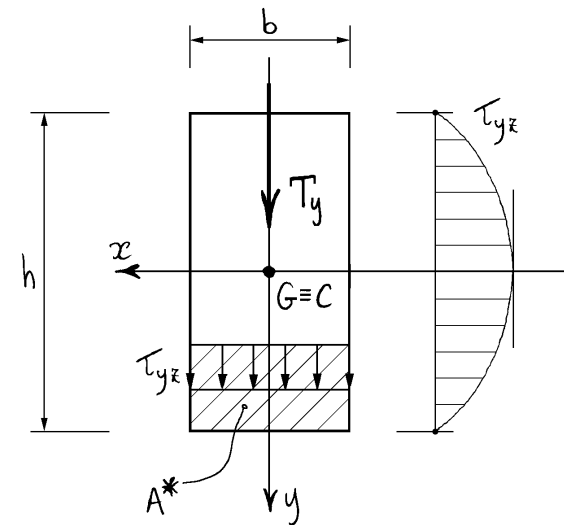
Poiché:

$$J_x = \frac{bh^3}{12},$$

ne risulta infine:

$$\tau_{zy} = \frac{6 T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Se si riportano i valori della τ_{yz} a partire da una retta parallela alla retta y nella direzione ortogonale a y si ottiene quindi un diagramma parabolico il cui asse coincide con l'asse x .



Si noti che la τ_{yz} è tangente al contorno e come tale soddisfa le condizioni al contorno. La componente τ_{xz} è dunque, in via approssimata, nulla ovunque.

La componente τ_{yz} rappresenta quindi tutta la tensione tangenziale. La massima tensione tangenziale la si ha pertanto in corrispondenza della corda baricentrica dove $y=0$:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh}.$$

Per quel che riguarda i fattori di taglio:

$$\begin{aligned} \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{S_x^*}{b} dy = (12)^2 \frac{1}{b^2 h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b^2}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 dy \\ &= \frac{36}{h^5} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4 \right) dy \\ &= \frac{36}{h^5} \left[\frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \\ &= 36 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right) = \frac{36}{240} (15 - 10 + 3). \end{aligned}$$

In definitiva:

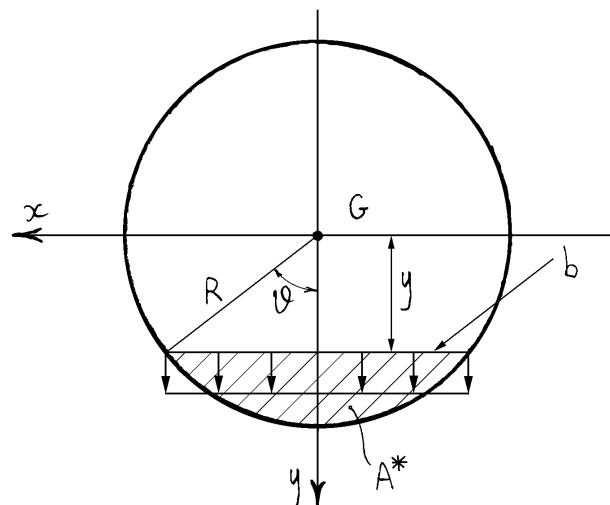
$$\chi_y = \frac{6}{5}.$$

Procedendo allo stesso modo si ricaverebbe anche $\chi_x = \frac{6}{5}$, però occorre tenere presente che la soluzione trovata per χ_y è sufficientemente buona se $b < h$, e quindi se $\chi_y = \frac{6}{5}$ è una soluzione sufficientemente buona, allora $\chi_x = \frac{6}{5}$ non è sufficientemente buona.

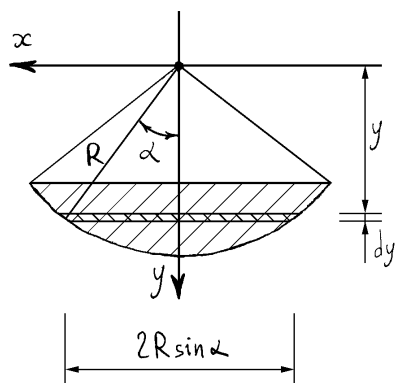
6.4.5 Sezione circolare

Si consideri ora una sezione circolare di raggio R . La corda generica è individuata dalla coordinata y . Detto ϑ l'angolo tra l'asse y e il raggio congiungente una delle due estremità della corda risulta:

$$y = R \cos \vartheta.$$



Per valutare il momento statico relativo all'asse x dell'area A^* individuata dalla corda, si consideri l'elemento d'area generico individuato dall'angolo α , di lunghezza



$2R \sin \alpha$ e di altezza dy . Poiché:

$$y = R \cos \alpha,$$

risulta:

$$dy = -R \sin \alpha d\alpha.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} S_x^* &= \int_{\vartheta}^0 (2R \sin \alpha dy) y = - \int_{\vartheta}^0 2R^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2R^3 \int_0^{\vartheta} \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta. \quad (1) \end{aligned}$$

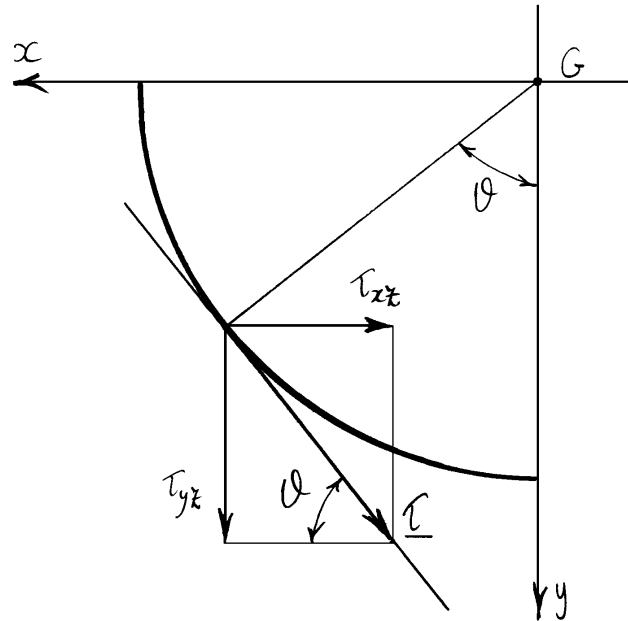
Tenuto conto che:

$$J_x = \frac{\pi}{4} R^4, \quad b = 2R \sin \vartheta,$$

si ha infine:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin^2 \vartheta.$$

Si consideri ora che in generale la componente τ_{yz} non è tangente al contorno. È dunque necessaria una componente τ_{xz} che renda la tensione tangenziale totale tangente al contorno.



Risulta quindi:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = -\frac{\tau_{yz}}{\tan \vartheta} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ |\tau| = \frac{|\tau_{yz}|}{\sin \vartheta} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta, \end{cases} \quad (2)$$

all'estremità della corda di coordinata $x = R \sin \vartheta$.

Nell'altra estremità la τ_{xz} ha lo stesso modulo e

segno opposto. Avendo ipotizzato una variazione lineare

di τ_{xz} lungo la corda si ha:

$$\tau_{xz} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^3} x \cos \vartheta.$$

Il valore massimo in modulo della tensione tangenziale lungo la corda lo si ha alle due estremità.

La tensione tangenziale massima sulla sezione la si ha dunque nei punti intersezione del contorno con l'asse x , individuati dall'angolo $\vartheta = \pi/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2}.$$

Si vuole ora verificare la formula (2) che fornisce il modulo $|\tau|$ della tensione tangenziale totale nel punto P del contorno individuato dall'angolo ϑ . A tal fine si consideri quale corda il diametro per P, ortogonale a τ . Per valutare τ è dunque sufficiente calcolare il momento statico dell'area A^* individuata da tale diametro. Tale area può essere divisa nelle tre parti indicate in figura. Della prima parte il momento statico è già stato calcolato ed è fornito dalla (1):

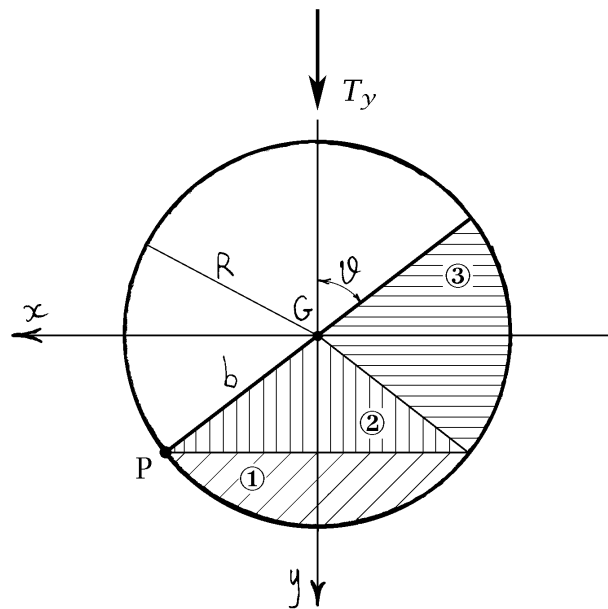
$$S_x^{1*} = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 \vartheta. \quad (6.23)$$

La seconda parte è un triangolo isoscele con vertice nel baricentro, di base $2R \sin \vartheta$ e di altezza $R \cos \vartheta$ per cui risulta, applicando il teorema di Varignon:

$$S_x^{2*} = \left(\frac{1}{2} (2R \sin \vartheta) (R \cos \vartheta) \right) \left(\frac{2}{3} R \cos \vartheta \right) = \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta \cos^2 \vartheta. \quad (6.24)$$

Infine il contributo della terza parte è nullo, essendo tale parte simmetrica rispetto all'asse x . Si ha quindi:

$$S_x^* = S_x^{1*} + S_x^{2*} = \frac{2}{3} R^3 \sin \vartheta, \quad (6.25)$$



Fattore di taglio:

$$\chi_y = \frac{\pi R^2}{\frac{\pi^2 R^8}{16}} \int_0^\pi \frac{\frac{4}{9} R^6 \sin^6 \vartheta}{2 R \sin \vartheta} \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta} \right) R \sin \vartheta d\vartheta$$

$$= \frac{16}{\pi R^6} \frac{2R^6}{9} \int_0^\pi \sin^6 \vartheta \left(1 + \frac{1}{3 \tan^2 \vartheta} \right) d\vartheta$$

Si ottiene:

$$\chi_y = \frac{32}{27} \cdot$$

e ne risulta infine, per la formula di Jourawski:

$$|\tau| = \frac{T_y S_x^*}{(2R) J_x} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \sin \vartheta, \quad (6.26)$$

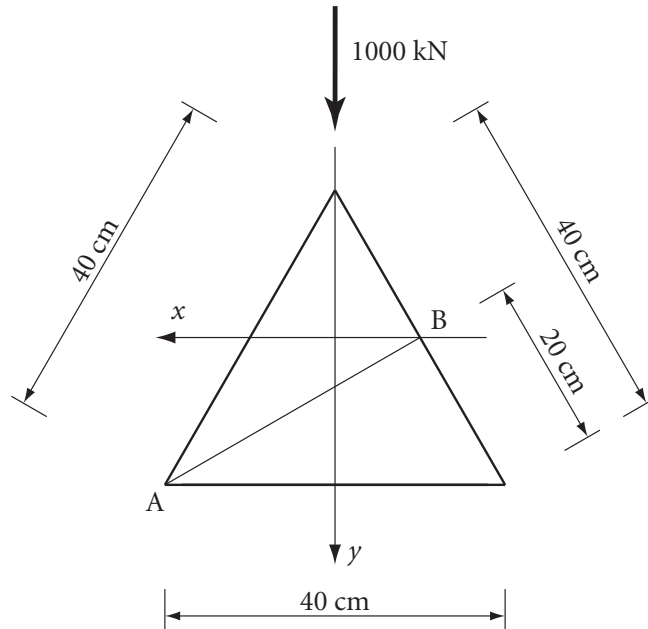
in accordo con la (2).

6.4.6 Sezione triangolare equilatera

Data la sezione triangolare equilatera di figura soggetta ad un taglio agente lungo una mediana:

1. disegnare gli assi di sollecitazione e neutro della flessione associata al taglio;
2. calcolare la tensione tangenziale nel punto B;
3. calcolare la tensione tangenziale media relativa alla corda AB;
4. dire di quale angolo, in gradi sessagesimali, è inclinata rispetto all'asse x la direzione della componente della tensione tangenziale della quale è richiesta la media nel punto precedente.

Nel seguito si indicheranno con B e H rispettivamente base e altezza del



triangolo equilatero:

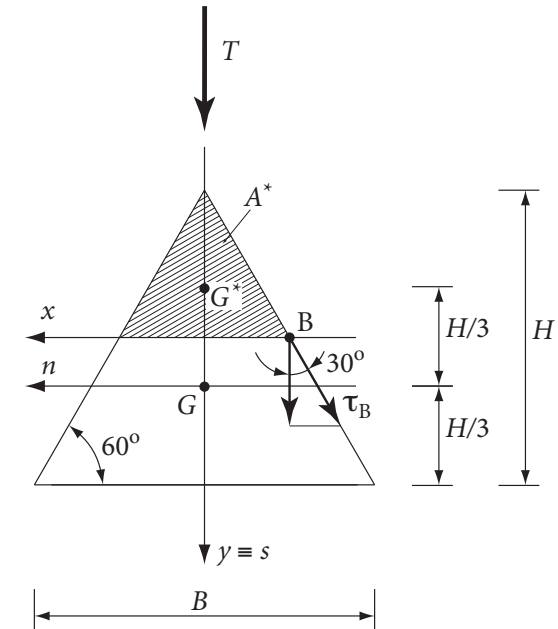
$$B = 40 \text{ cm}, \quad H = B \cos 30^\circ = 34.64 \text{ cm},$$

e con T il taglio che, con l'orientazione dell'asse y indicata in figura, risulta positivo:

$$T = 1000 \text{ kN}.$$

1. Le mediane del triangolo equilatero sono assi di simmetria retta. Quindi il baricentro G e il centro di taglio C coincidono entrambi con la loro intersezione. Inoltre, esistendo tre assi principali sia di inerzia che di taglio allora tutti gli assi sono sia principali di inerzia che principali di taglio. Essendo baricentrico, l'asse y , retta d'azione del taglio, coincide con l'asse di sollecitazione s della flessione associata al taglio, mentre l'asse neutro n è baricentrico e ortogonale all'asse di sollecitazione.

2. Essendo il taglio T simmetrico rispetto all'asse y ed essendo l'asse x ortogonale a y , lungo la corda individuata da x la componente della



tensione tangenziale ortogonale alla corda stessa viene approssimata dalla sua media. Nel punto B, posto sul contorno, la tensione tangenziale τ_B deve essere tangente al contorno stesso e deve quindi valere, ricordando la formula di Jourawski:

$$\tau_B = \frac{\bar{\tau}_{yz}}{\cos 30^\circ} = \frac{TS_n^*}{\frac{B}{2}J_n \cos 30^\circ},$$

e tenendo conto che la lunghezza della corda vale $\frac{B}{2}$. Avendo prescelto l'area superiore tra le due individuate dalla corda allo scopo di semplificare i calcoli, come indicato in figura, il suo momento statico è negativo e vale:

$$S_n^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} \frac{H}{2} \right) \left(\frac{H}{3} \right) = -\frac{BH^2}{24} = -2000.00 \text{ cm}^3.$$

Il momento di inerzia J_n del triangolo equilatero rispetto all'asse neutro si può invece calcolare come il doppio del contributo di uno dei due triangoli

rettangoli in cui la sezione è divisa dall'asse y :

$$J_n = 2 \left(\frac{\frac{B}{2} H^3}{36} \right) = \frac{BH^3}{36} = 46188.0 \text{ cm}^4.$$

Si ha quindi:

$$\tau_B = - \frac{(1000 \times 10^3) \times (2000.00 \times 10^3)}{200 \times (46188.0 \times 10^4) \cos 30^\circ} = -25.00 \text{ N/mm}^2.$$

Il segno negativo della tensione tangenziale è coerente con il fatto che la tensione stessa non può che essere uscente dall'area prescelta.

3. La corda AB non è ortogonale all'asse y di simmetria e la sua lunghezza è più grande di quella della corda individuata dall'asse x . Ne consegue che la media della componente della tensione tangenziale ortogonale alla corda AB fornisce un valore che potrebbe anche essere inaccettabile quale valore puntuale della componente stessa. Ciò non toglie che la formula di Jourawski è comunque in grado di fornire il valore medio $\bar{\tau}_{rz}$ della componente della tensione tangenziale nella direzione r ortogonale alla corda:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{TS_n^*}{HJ_n},$$

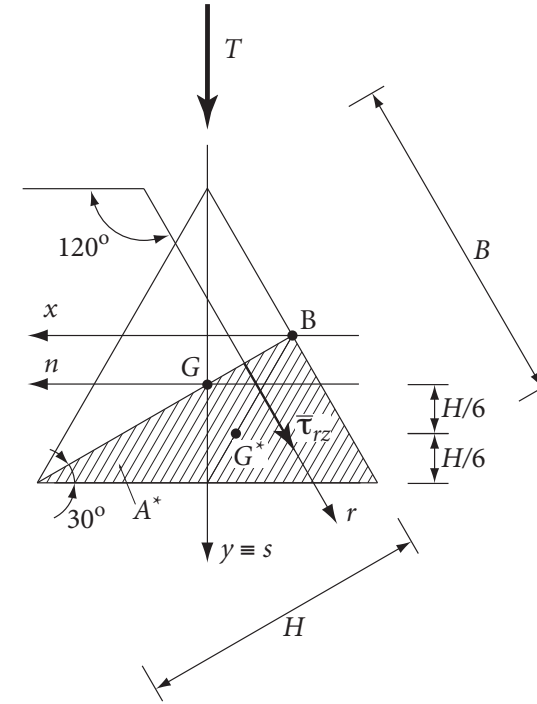
essendo H la lunghezza della corda AB e S_n^* il momento statico di una delle due aree individuate dalla corda stessa. Poiché per semplificare i calcoli si è prescelta l'area inferiore, come indicato in figura, il momento statico è positivo e vale:

$$S_n^* = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} H \right) \left(\frac{H}{6} \right) = \frac{BH^2}{24} = 2000.00 \text{ cm}^3,$$

e in modulo uguaglia quello valutato in precedenza e relativo alla corda individuata dall'asse x . Poiché $\frac{B}{2} \cos 30^\circ = \frac{H}{2}$ ne consegue che $\bar{\tau}_{rz}$ è esattamente la metà della tensione τ_B valutata in precedenza:

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{(1000 \times 10^3) \times (2000.00 \times 10^3)}{346.4 \times (46188.0 \times 10^4)} = 12.50 \text{ N/mm}^2.$$

Il segno positivo della tensione tangenziale è coerente con il fatto che la tensione stessa non può che essere entrante nell'area prescelta. Si noti che



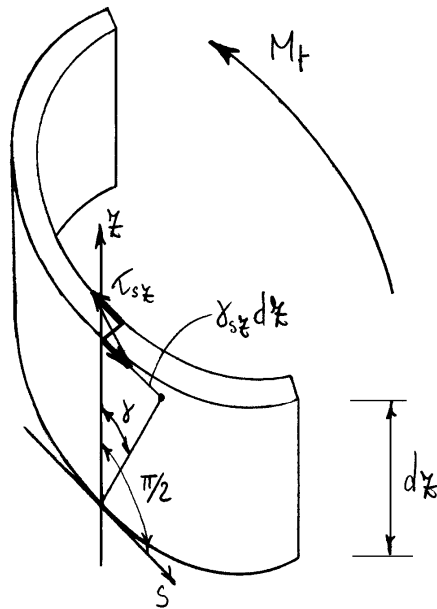
la direzione ortogonale alla corda AB è quella della tensione tangenziale totale in B, per cui se si utilizzasse il valor medio lungo tale corda quale valore puntuale si otterrebbe un valore di τ_B pari a 12.50 N/mm^2 , in netto contrasto con il valore di 25.00 N/mm^2 ottenuto in precedenza.

4. La direzione della componente della tensione tangenziale della quale è richiesta la media nel punto precedente, relativa alla corda AB, è quella ortogonale alla corda AB stessa. Con le convenzioni di figura l'angolo di cui è inclinata rispetto all'asse x tale direzione vale 120° .

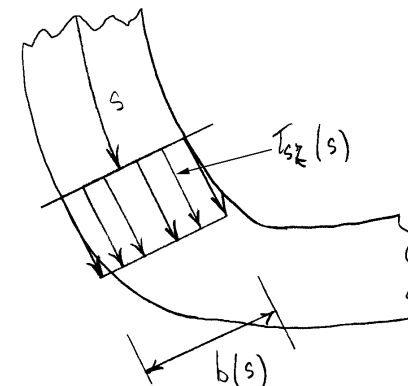
6.4.7 Il taglio nelle sezioni sottili aperte

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio C .

Si tenga conto che lo scorrimento associato alla tensione tangenziale τ_{sz} dovuta ad un momento torcente vale $\gamma_{sz} = \tau_{sz} / G$. I punti di una corda, relativamente ad una sezione vicina, subiscono gli spostamenti $\gamma_{sz} dz$, che, come le tensioni tangenziali, variano linearmente lungo la corda e sono



emisimmetrici rispetto alla linea media. Ne risulta che il lavoro mutuo delle tensioni tangenziali dovute al taglio T per gli scorrimenti γ_{sz} dovuti ad un momento torcente è nullo se le tensioni tangenziali dovute a T sono simmetriche lungo la corda. Inoltre, data la "piccolezza" dello spessore risulta accettabile supporre che la tensione tangenziale sia costante lungo la corda e quindi coincidente con il valore medio che può essere dedotto dalla formula di Jourawski, binomia:



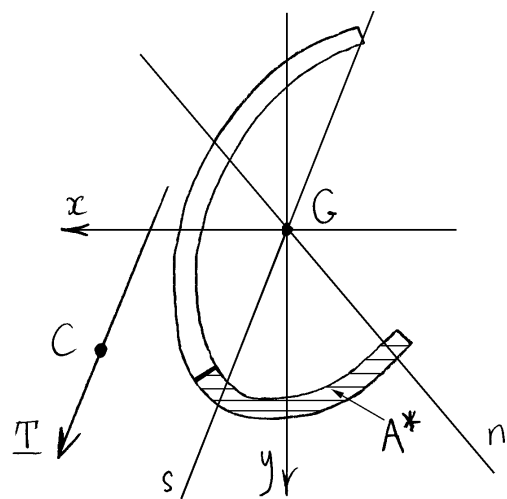
$$\tau_{sz} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x} + \frac{T_x S_y^*}{b J_y} ,$$

oppure monomia:

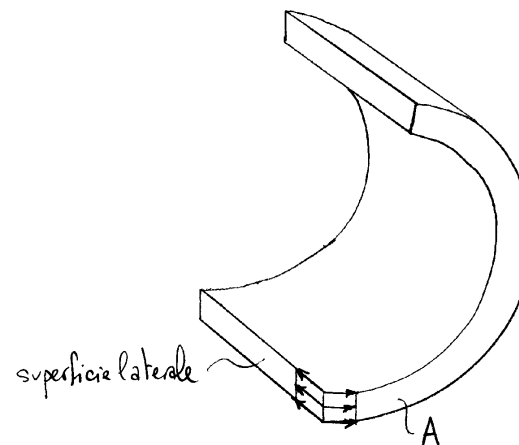
$$\tau_{sz} = \frac{T S_n^*}{b J_n} ,$$

dove al solito n è l'asse neutro della flessione associata al taglio $\underline{T}$.

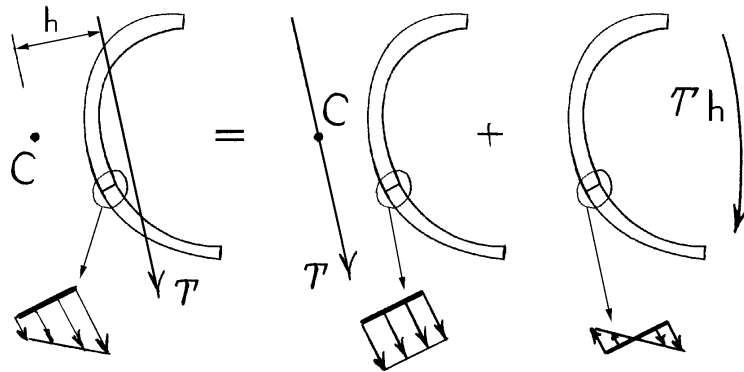
In una estremità libera la tensione tangenziale è nulla poiché l'area A^* è nulla oppure coincide con tutta la sezione e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Ciò è in accordo con il teorema di reciprocità delle ten-



sioni tangenziali. Infatti se le tensioni tangenziali non fossero nulle in una estremità libera allora per reciprocità dovrebbe essere presente una tensione tangenziale anche sulla superficie laterale della trave, come indicato in figura.



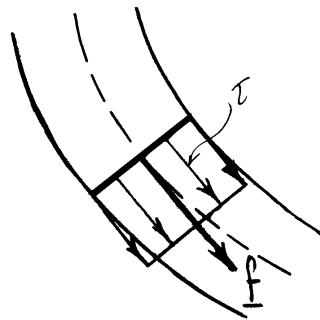
Si ribadisce che la tensione tangenziale può ritenersi costante, e quindi deducibile dalla formula di Jourawski se e solo se il taglio passa per il centro di taglio. In caso contrario la soluzione la si può ottenere per sovrapposizione delle soluzioni del taglio passante per il centro di taglio e del momento torcente rispetto al centro di taglio.



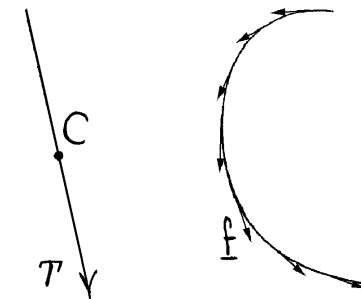
Se il taglio passa per il centro di taglio, la risultante $\underline{f}$ delle tensioni tangenziali agenti lungo una corda ha retta d'azione sulla linea media e vale:

$$\underline{f} = \frac{T S_n^*}{J_n}.$$

Le forze per unità di linea $\underline{f}$ sono note, via formula di Jourawski, indipendentemente dalla conoscenza della po-

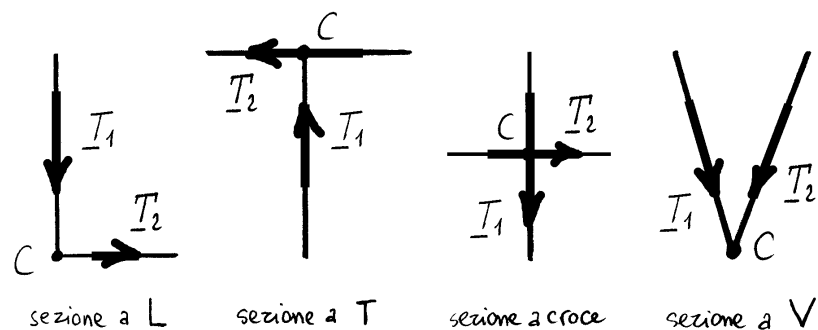


sizione del centro di taglio. Si consideri che la retta d'azione della risultante del sistema di forze $\underline{f}$ passa per il centro di taglio. Ne consegue che determinare tale retta d'azione equivale a determinare una retta che contiene il centro di taglio. Per determinare il centro di taglio è allora sufficiente determinare le rette d'azione delle risultanti di due distribuzioni di forze $\underline{f}$ corrispondenti a due tagli comunque inclinati tra loro.



In un eventuale tratto rettilineo, la distribuzione di forze $\underline{f}$ che gli compete ha risultante avente quale retta d'azione la linea media del tratto.

Ne consegue che se una sezione sottile è composta di due tratti rettilinei, il centro di taglio coincide con l'intersezione



delle linee medie dei due tratti. In fatti, qualunque sia il taglio passante per il centro di taglio, le due risultanti $\underline{T}_1$ e $\underline{T}_2$ corrispondenti ai due tratti, che hanno, come detto, rette d'azione coincidenti con le linee medie dei due tratti, si combinano in un'unica forza con retta d'azione passante per l'intersezione delle due rette d'azione.

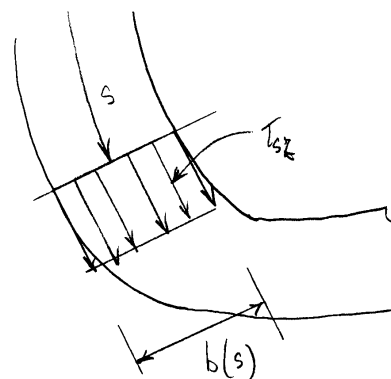
Fattori di taglio

Si faccia riferimento ad uno sforzo di taglio con retta d'azione passante per il centro di taglio.

La tensione tangenziale τ_{sz} è approssimativamente costante

lungo la corda e vale, come detto:

$$\tau_{sz} = \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} + \frac{\tau_y S_x^*}{b J_x}.$$



Energia di deformazione per unità di linea in forma complementare:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2G} \int_A \tau_{sz}^2 dA = \\ &= \frac{1}{2G} \int_l \tau_{sz}^2 b ds = \frac{1}{2G} \int_l \left(\frac{\tau_y S_x^*}{b J_x} + \frac{\tau_x S_y^*}{b J_y} \right)^2 b ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2GA} \left\{ \left(\frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds \right) T_y^2 + \left(\frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds \right) T_x^2 + 2 \left(\frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds \right) T_x T_y \right\}.$$

fattori di taglio:

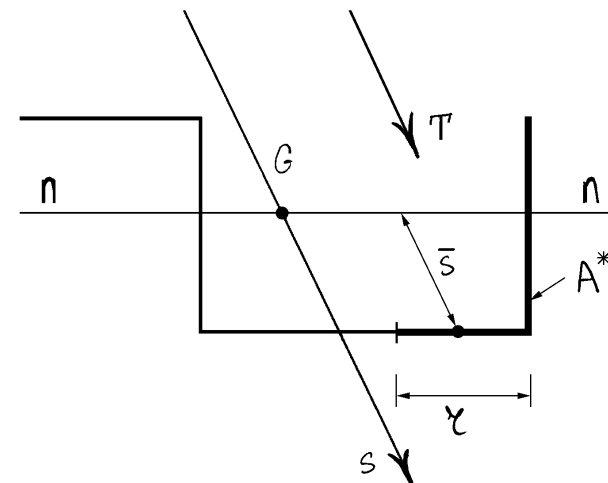
$$\begin{cases} \chi_y = \frac{A}{J_x^2} \int_l \frac{S_x^{*2}}{b} ds, \\ \chi_x = \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds, \\ \chi_{xy} = \frac{A}{J_x J_y} \int_l \frac{S_x^* S_y^*}{b} ds. \end{cases}$$

Diagramma qualitativo su tratti rettilinei a spessore costante

Si riportino i valori delle tensioni tangenziali perpendicolarmente alla linea media prendendo come riferimento la linea media stessa. Si viene così a disegnare una curva di cui si vuole determinare l'andamento nel caso in cui

la sezione sottile è composta di tratti rettilinei a spessore costante. Su tali tratti la variazione della tensione tangenziale, al variare della corda, dipende solo dalla variazione del momento statico S_n^* dell'area A^* individuata dalla stessa corda.

Si consideri innanzitutto il caso in cui il tratto rettilineo è parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio, asse neutro rispetto al quale vengono valutati i momenti statici. Si assuma la distanza x da una delle due estremità del tratto rettilineo per individuare la generica corda del tratto. L'area A^* individuata dalla corda

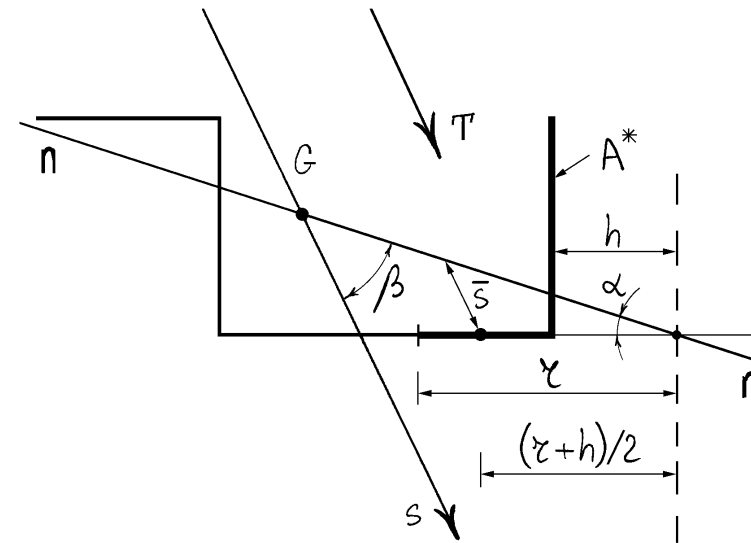


puo' scomporsi in due quote, $A(\tau)$ e $\bar{A}$, la prima delle quali, $A(\tau)$, coincide con la parte lunga τ del tratto rettilineo in questione mentre la seconda, $\bar{A}$, rappresenta la quota residua di A^* . Il momento statico dell'area A^* rispetto all'asse neutro vale dunque:

$$S_n^*(\tau) = b\tau\bar{s} + \bar{S}_n,$$

dove b è lo spessore del tratto, $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(\tau)$ dall'asse neutro e $\bar{S}_n$ è il momento statico dell'area $\bar{A}$. Poiché la distanza $\bar{s}$ è indipendente da τ , tale equazione risulta essere lineare in τ e ne risulta che il diagramma delle tensioni tangenziali lungo un tratto rettilineo a spessore costante è lineare.

Si consideri ora un tratto rettilineo non parallelo all'asse neutro della flessione associata al taglio. In tal caso, per individuare la generica corda del tratto, si assuma la distanza τ di questa dall'intersezione della linea me-



dia del tratto con l'asse neutro. Detta h la distanza di tale intersezione dalla prima estremità del tratto, si ottiene:

$$S_n'(\tau) = b(\tau - h)\bar{s} + \bar{S}_n,$$

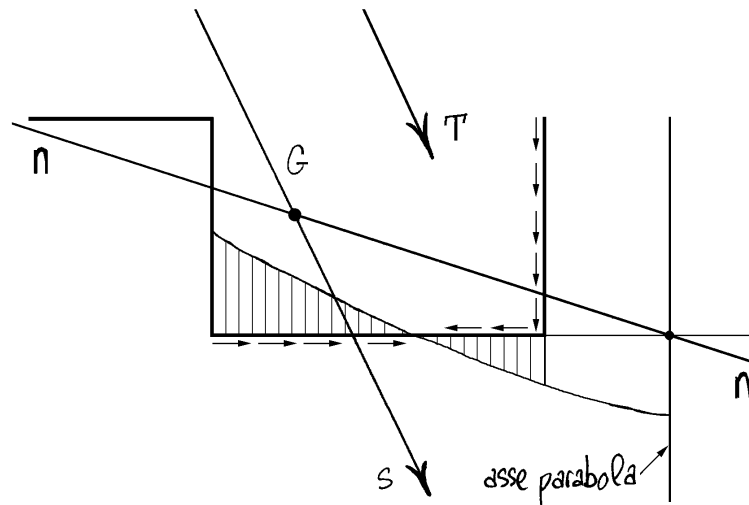
avendo ancora scomposto l'area A^* nelle due quote $A(\tau)$ e $\bar{A}$ e dove $\bar{s}$ è la distanza del baricentro dell'area $A(\tau)$ dall'asse neutro. Se α è l'angolo tra la linea media del tratto e l'asse neutro e β è l'angolo tra asse neutro e asse di sollecitazione, risulta:

$$\bar{s} \sin \beta = \frac{z+h}{2} \sin \alpha \Rightarrow \bar{s} = \frac{z+h}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Si ha quindi infine:

$$S_n(z) = \frac{b}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (z^2 - h^2) + \bar{S}_n.$$

Tale equazione è quadratica in z e quindi il diagramma delle tensioni normali è parabolico. Mancando nell'equazione della parabola il termine lineare in z , ne risulta che l'asse della parabola passa per il punto $z=0$, ovvero per l'intersezione della linea media del tratto con l'asse neutro. In corrispondenza di tale punto, se appartiene al tratto, si ha

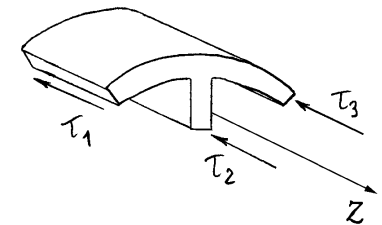
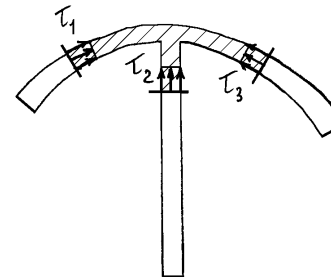


dunque un massimo relativo per la tensione tangenziale. Questo è in accordo col fatto che, attraversato tale punto, le aree successive hanno distanza dall'asse neutro di segno opposto e quindi il momento statico, in modulo, inizia a diminuire.

Equilibrio in un nodo triplo

Si consideri l'equilibrio alla Jouravski di un nodo in cui convergono tre tratti (nodo triplo). Seguendo le convenzioni illustrate in figura e tenendo conto che al limite l'area tende a zero e che quindi la presenza di eventuali tensioni normali non influenza l'equilibrio del nodo si ottiene:

$$-\tau_1 b_1 dz - \tau_2 b_2 dz - \tau_3 b_3 dz = 0,$$



e quindi:

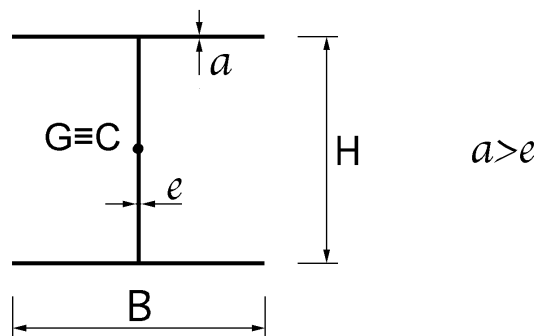
$$\tau_1 b_1 + \tau_2 b_2 + \tau_3 b_3 = 0.$$

Ci si riferisce alla risultante τb lungo una corda generica chiamandola "flusso" delle tensioni tangenziali attraverso la corda. Ne risulta che il flusso globale in ingresso in un nodo triplo è nullo.

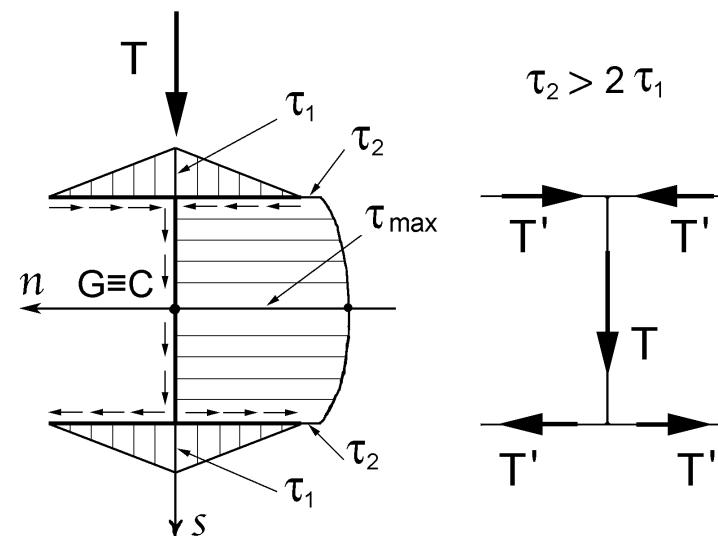
Naturalmente quanto detto per un nodo triplo vale per un qualunque altro nodo.

6.4.8 La sezione a doppio T

La sezione presenta due assi di simmetria e quindi il centro di taglio coincide con il baricentro. Nel caso il



taglio abbia quale retta d'azione la linea media dell'anima, tale linea media rappresenta l'asse di sollecitazione s mentre l'asse neutro n gli è ortogonale. Il taglio è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed emisimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni tangenziali è lineare lungo le ali e parabolico lungo l'anima con asse della parabola in corrispondenza del baricentro. Le tensioni tangenziali lungo l'anima devono avere come risultante il taglio applicato. Quindi il verso delle tensioni tangenziali lungo l'anima deve essere concorde al verso



del taglio. Tenendo conto che il flusso globale nei due nodi tripli deve essere nullo e che l'asse di sollecitazione è di simmetria si deduce automaticamente il verso delle tensioni tangenziali lungo le ali. Se τ_1 e τ_2 sono i moduli delle tensioni tangenziali, in vicinanza dei nodi tripli, rispettivamente nelle ali e nell'anima, l'equazione di flusso, con i versi di figura, richiede:

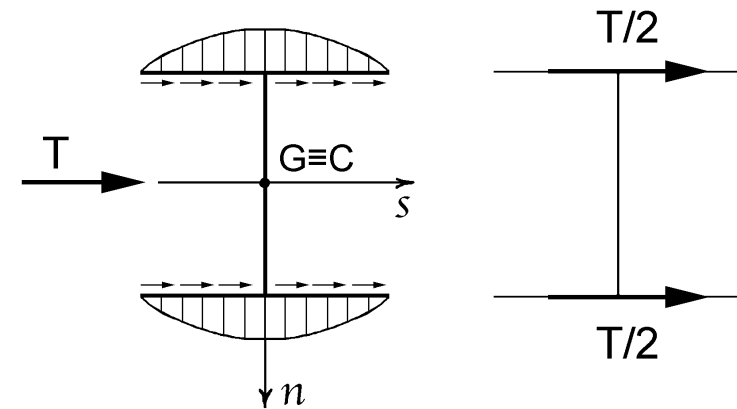
$$\tau_1 e + \tau_1 e - \tau_2 a = 0 \Rightarrow \tau_2 = 2 \frac{e}{a} \tau_1,$$

dove e ed a sono gli spessori delle ali e dell'anima rispettivamente. Se $e > a$, che è lo standard delle sezioni a doppio T, allora $\tau_2 > 2 \tau_1$.

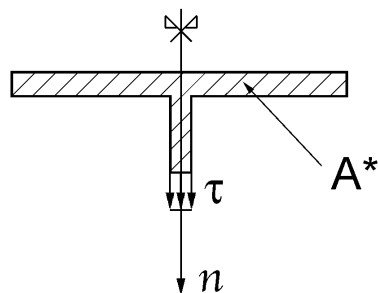
La massima tensione tangenziale $\tau_{\max}$ la si ha in corrispondenza dell'intersezione tra asse neutro e linea media dell'anima, dove la parabola presenta il suo massimo.

In figura è anche riportato il quadro delle risultanti delle tensioni tangenziali nei vari tratti, avendo indicato con T' il modulo della risultante su mezza ala, che per simmetria ed ennisimmetria è uguale per tutte e quattro le mezze ali.

Nel caso il taglio abbia invece quale retta d'azione la retta baricentrica parallela alle ali allora l'asse neutro coincide con la linea media dell'anima. Ancora, il taglio



è simmetrico rispetto all'asse di sollecitazione ed ennisimmetrico rispetto all'asse neutro. Il diagramma delle tensioni è lineare lungo l'anima e parabolico sulle ali. In particolare, il diagramma lungo l'anima è nullo. Infatti l'asse neutro è asse di simmetria per qualunque area A^* individuata da una corda lungo l'anima e quindi il momento statico S_n^* è nullo. Alternativamente, le eventuali tensioni tangenziali lungo una corda dell'anima sono simmetriche rispetto all'asse neutro. Essendo tale asse di ennisimmetria



tria, tali tensioni tangenziali devono essere nulle.

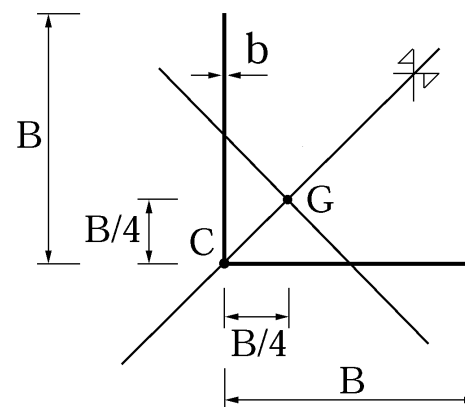
Gli assi delle due parabole coincidono entrambi con l'asse neutro. Il flusso lungo le ali, a differenza del caso precedente, ha sempre lo stesso verso, poiché il flusso lungo l'anima è nullo. Tale verso deve essere in accordo con il verso della forza di taglio.

6.4.9 La sezione a L a lati uguali

La sezione presenta un'asse di simmetria, inclinato di 45° rispetto ai lati, che contiene baricentro e centro di taglio. Come già visto, il centro di taglio è situato alla intersezione dei lati. Il baricentro è invece posizionato alla intersezione tra l'asse di simmetria e l'allineamento dei baricentri dei due lati, e si trova quindi alla distanza $\frac{B}{4}$ dai lati, se B è la loro lunghezza.

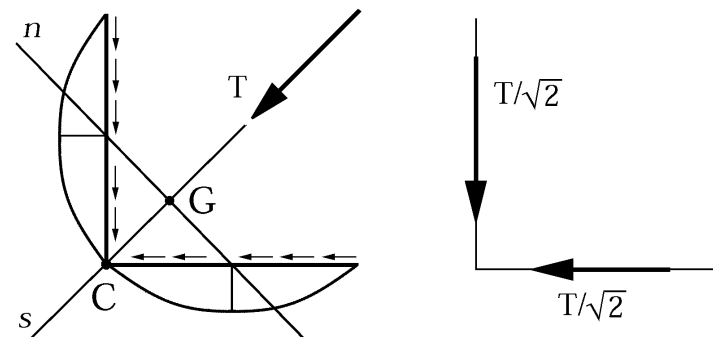
Si consideri innanzitutto il caso di un taglio avente quale retta d'azione l'asse di simmetria, che risulta di simmetria anche per il taglio applicato. L'asse neutro è la retta che passa per i baricentri dei due lati. Poiché i lati sono inclinati rispetto all'asse neutro, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono parabolici, con assi delle parabole in corrispondenza dei baricentri dei due lati.

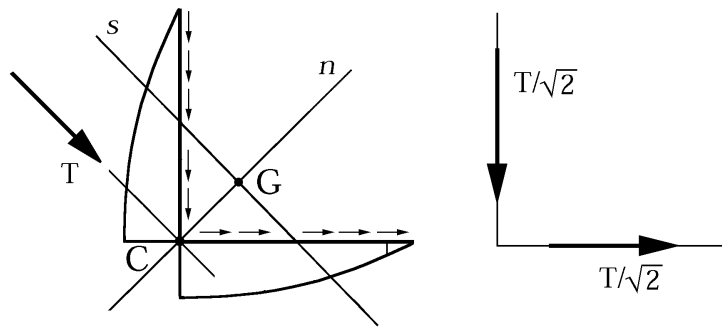
Si consideri poi il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta per



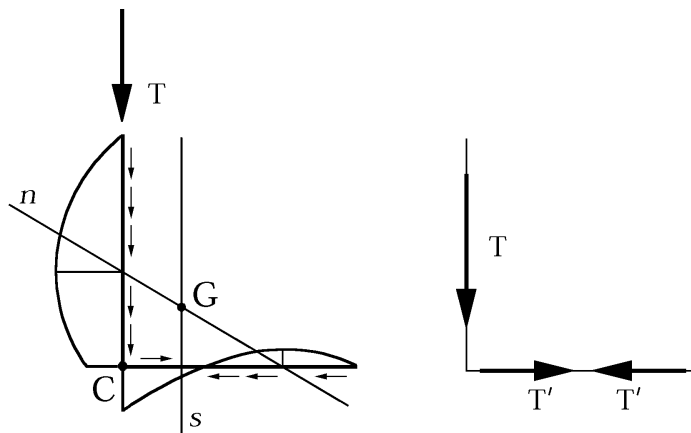
il centro di taglio perpendicolare all'asse di simmetria. L'asse neutro coincide con l'asse di simmetria, i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono ancora parabolici e gli assi delle parabole sono in corrispondenza del centro di taglio (dove i lati intersecano l'asse neutro).

Si consideri infine il caso di un taglio avente quale retta d'azione la retta verticale per il centro di taglio. L'asse di sollecitazione è la retta verticale per G e l'asse neutro è il coniugato di questo. Poiché l'asse verticale non è principale di inerzia il suo coniugato è inclinato rispetto alla verticale. Ne consegue che i due lati della sezione a L sono inclinati rispetto all'asse neutro e che quindi i diagrammi delle tensioni tangenziali sui due lati sono



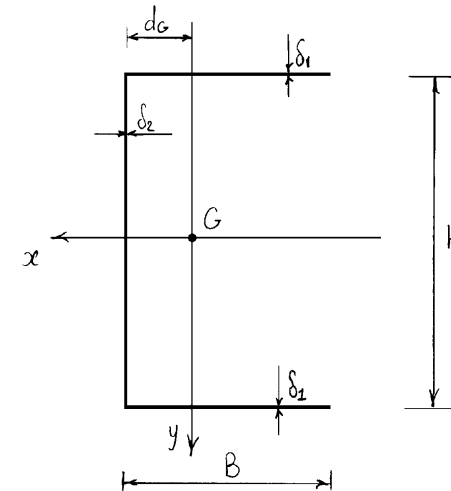


parabolici, con gli assi delle parabole posti in corrispondenza delle intersezioni con l'asse neutro. Dovendo essere nulla la risultante orizzontale delle tensioni tangenziali, l'intersezione dell'asse neutro con il lato orizzontale della sezione deve essere situata necessariamente nella metà destra del lato.

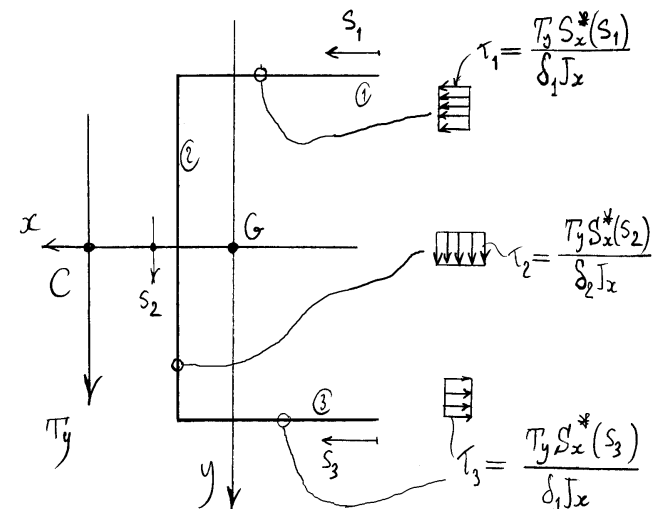


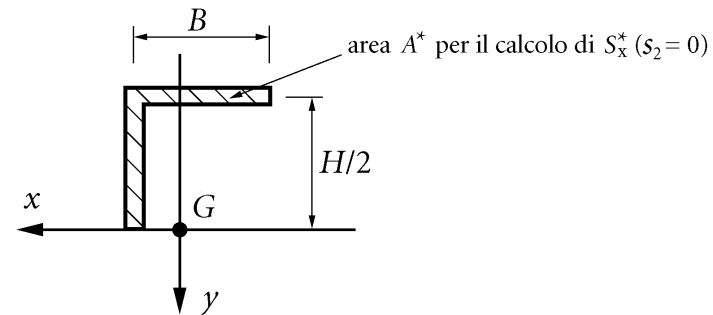
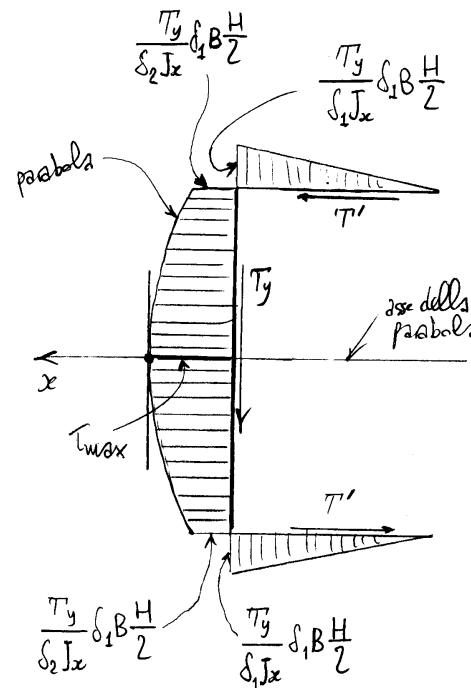
6.4.10 La sezione a C

Si consideri la sezione a C di figura, di cui si sono già calcolate le caratteristiche inerziali.



Taglio parallelo all'anima passante per il centro di taglio





Verifichiamo che l'integrale delle τ_{xy} (agenti nell'insieme del profilato) fornisce il taglio T_y applicato

La tensione tangenziale massima, agente in corrispondenza della corda posta sull'asse x, vale:

$$\tau_{max} = \tau_2(0) = -\frac{T_y}{\delta_2 J_x} \left(\frac{\delta_1 B H}{2} + \frac{\delta_2 H^2}{8} \right),$$

dove il segno negativo significa che il verso di τ è uscente dall'area A^* che si è considerata nel calcolo di $S_x^*(s_2)$.

$$\begin{cases} S_x^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \frac{H}{2} \\ S_x^*(s_2) = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) - s_2 \right] \\ \quad = -\delta_1 B \frac{H}{2} - \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - s_2^2 \right) \\ S_x^*(s_3) = \delta_1 s_3 \frac{H}{2} \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{xy} \delta_2 ds_2 &= -\frac{T_y}{\delta_2 J_x} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_x^*(s_2) \delta_2 ds_2 \\
 &= \frac{T_y}{J_x} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left\{ \delta_1 B \frac{H}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - s_2^2 \right) \right\} ds_2 \\
 &= \frac{T_y}{J_x} \left\{ \delta_1 B \frac{H^2}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^3}{4} - \frac{H^3}{12} \right) \right\} = \\
 &= \frac{T_y}{J_x} \underbrace{\left\{ \delta_1 B \frac{H^2}{2} + \delta_2 \frac{H^3}{12} \right\}}_{J_x} = T_y .
 \end{aligned}$$

Per quel che riguarda i segni, si è tenuto conto che nell'anima $\tau_{xy} = -\tau_2$. Infatti τ_2 è positivo se diretto verso l'alto (se entrante nella sezione) mentre τ_{xy} è positivo se diretto verso il basso, data che questa è l'orientazione di y .

Fattore di taglio χ_y

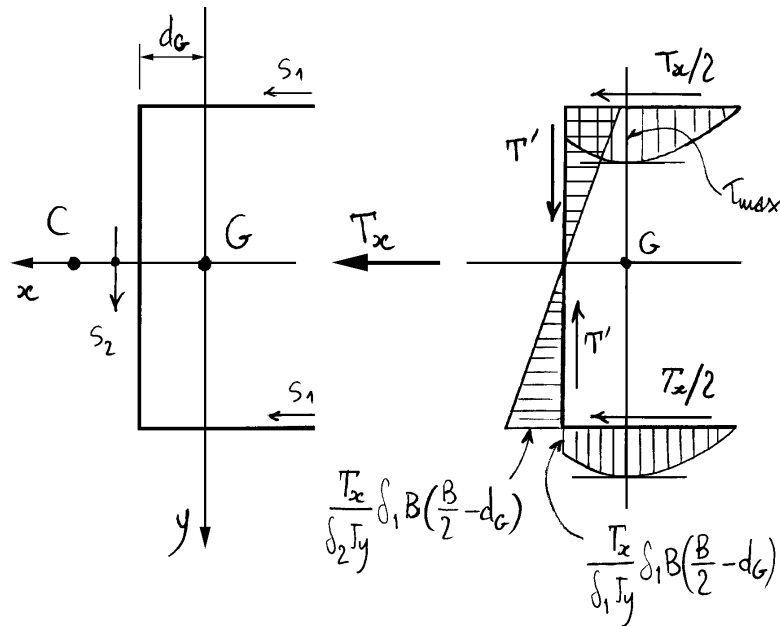
$$\begin{aligned}
 \chi_y &= \frac{A}{J_x^2} \int_{\ell} \frac{S_x^{*2}}{\delta_1} ds = \\
 &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ 2 \int_0^B \frac{\delta_1 H^2}{4} \xi^2 d\xi + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[\delta_1 B \frac{H}{2} + \frac{\delta_2}{2} \left(\frac{H^2}{4} - \xi^2 \right) \right]^2 d\xi \right\} \\
 &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{\delta_1^2 B^2 H^2}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^3}{8} - \frac{\delta_1 B H \xi^2}{2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta_2 H^4}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^2 \xi^2}{8} + \frac{\delta_2 \xi^4}{4} \right] d\xi \right\} = \\
 &= \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{\delta_1 B^3 H^2}{6} + \frac{\delta_1^2 B^2 H^3}{4 \delta_2} + \frac{\delta_1 B H^4}{8} - \frac{\delta_1 B H^4}{24} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta_2 H^5}{4 \times 16} - \frac{\delta_2 H^5}{6 \times 16} + \frac{\delta_2 H^5}{20 \times 16} \right\} ,
 \end{aligned}$$

e infine:

$$\chi_y = \frac{A}{J_x^2} \left\{ \frac{1}{6} \delta_1 B^3 H^2 + \frac{1}{4 \delta_2} \delta_1^2 B^2 H^3 + \frac{1}{12} \delta_1 B H^4 + \frac{1}{120} \delta_2 H^5 \right\} .$$

conformemente a quanto già ottenuto utilizzando la funzione di ingobbamento.

Taglio agente secondo l'asse di simmetria



$$S_y^*(s_1) = -\delta_1 s_1 \left(B - d_G - \frac{s_1}{2} \right),$$

$$S_y^*(s_2) = \delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left(\frac{B}{2} - d_G \right).$$

Per $S_1 = B - d_G$:

$$\tau_{max} = \frac{T_x}{\delta_1 J_y} \frac{(B-d_g)^2}{2} = \frac{T_x}{J_y} \frac{(B-d_g)^2}{2} .$$

Fattore di taglio secondo x

$$\chi_x = \frac{A}{J_y^2} \int_l \frac{S_y^{*2}}{b} ds =$$

$$= \frac{A}{J_y^2} \left\{ 2 \int_0^B \delta_1 s_1^2 \left(B - d_G - \frac{s_1}{2} \right)^2 ds_1 \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{1}{\delta_2} \left[\delta_2 \left(\frac{H}{2} + s_2 \right) d_G - \delta_1 B \left(\frac{B}{2} - d_G \right) \right]^2 ds_2 \right\}.$$

Fattore di taglio misto

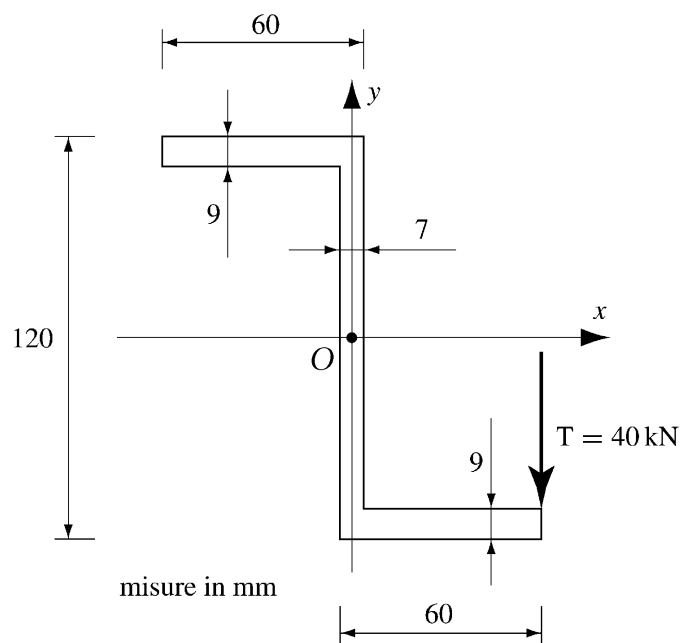
Poiché x è asse di simmetria il fattore di taglio misto si annulla:

$$\chi_{xy} = 0.$$

In altre parole, x e y sono assi principali di taglio.

6.4.11 Sezione a Z

Si consideri la sezione a Z sotto riportata soggetta ad un taglio verticale $T = 40 \text{ kN}$.

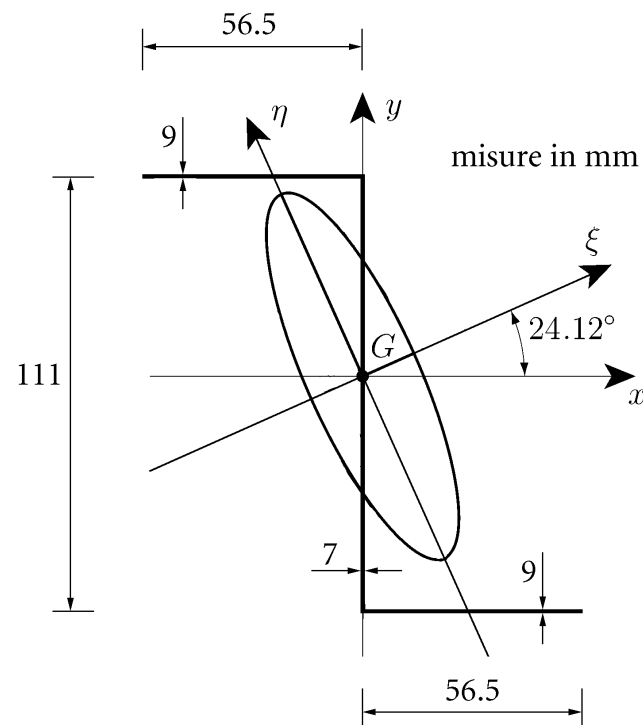


Di tale sezione sono già state calcolate le quantità inerziali:

$$\begin{cases} J_{\xi} = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases},$$

$$\alpha_{\xi} = 24.12^\circ.$$

Come già detto, la sezione presenta una simmetria polare, cioè è invariante per rotazioni di 180° attorno al punto O , punto che deve quindi coincidere con il baricentro. In tale

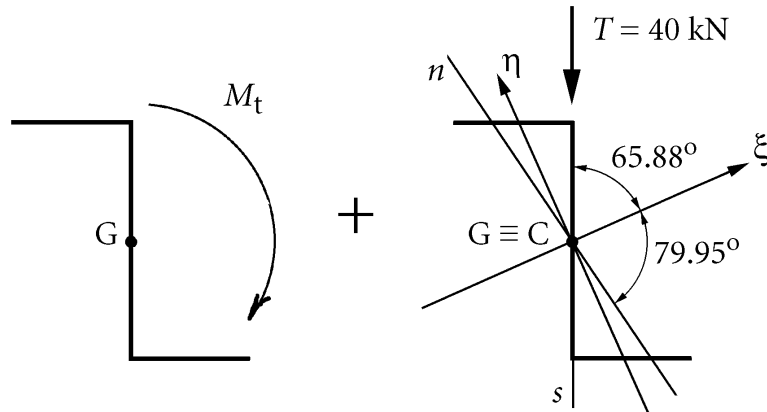


rotazione un taglio qualunque passante per O cambia di segno (cioè presenta una emisimmetria polare). Ne consegue che un tale taglio non può provocare una rotazione di tipo torsionale della sezione, essendo tale rotazione invariante e quindi simmetrica. Il polo O deve quindi coincidere con il centro di taglio C .

Il problema può quindi essere risolto sovrapponendo un problema di torsione con uno di taglio passante per il centro di taglio.

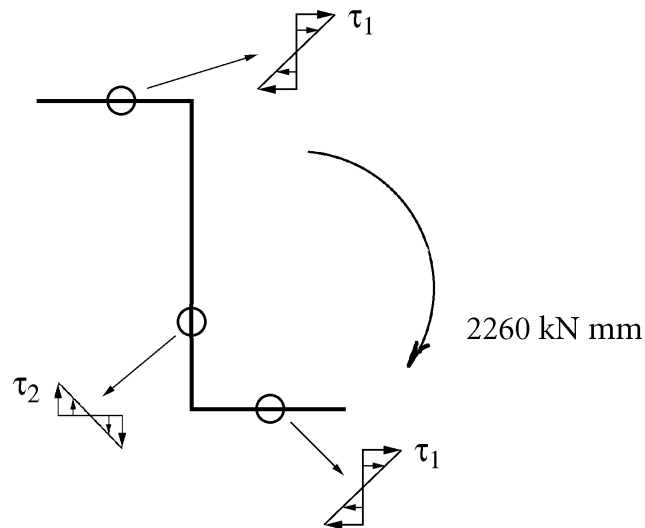
Il momento torcente M_t è orario e di modulo:

$$M_t = 40 \text{ kN} \times 56.5 \text{ mm} = 2260 \text{ kN mm},$$



mentre il fattore torsionale di rigidezza vale:

$$J_t = \frac{1}{3} [2 \times 56.5 \text{ mm} \times (9 \text{ mm})^3 + 111 \text{ mm} \times (7 \text{ mm})^3] = 40150 \text{ mm}^4.$$



Le tensioni tangenziali valgono quindi:

$$\tau_1 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} 9 \text{ mm} = 506.60 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{2.26 \times 10^6 \text{ N mm}}{40150 \text{ mm}^4} 7 \text{ mm} = 394.02 \text{ N/mm}^2.$$

La forza di taglio può essere scomposta nelle due direzioni principali di inerzia:

$$T_\xi = -T \sin \alpha_\xi = -0.409 T = -16.36 \text{ kN},$$

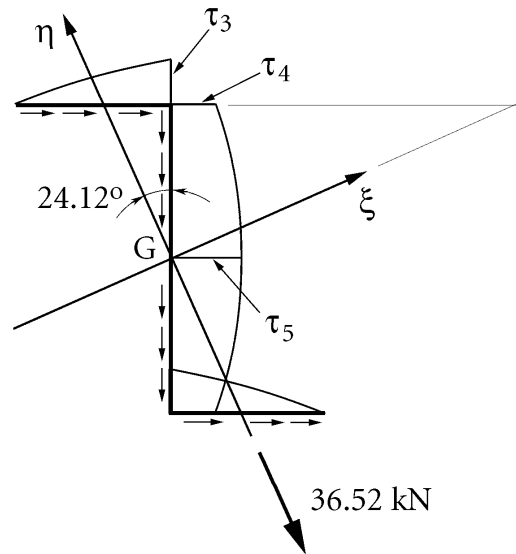
$$T_\eta = -T \cos \alpha_\xi = -0.913 T = -36.52 \text{ kN}.$$

Si procede calcolando i soli moduli delle tensioni tangenziali. Nel caso della componente T_η si ottiene:

$$S^*_3 = S^*_4 = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} \cos 24.12^\circ + \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = 31628 \text{ mm}^3,$$

$$\tau_3 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 27.63 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_4 = \frac{36520 \text{ N} \times 31628 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 35.52 \text{ N/mm}^2,$$

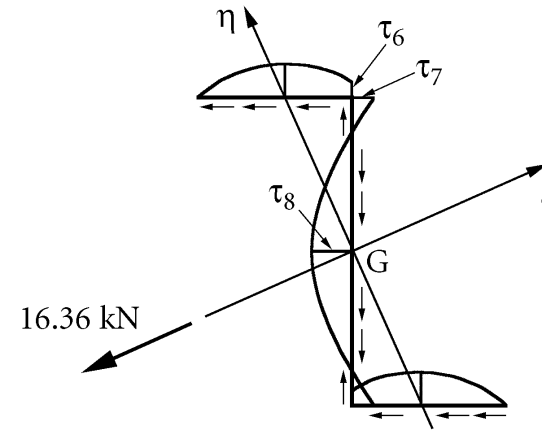


$$S_5^* = S_3^* + 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \cos 24.12^\circ \right] = 41468 \text{ mm}^3 ,$$

$$\tau_5 = \frac{36520 \text{ N} \times 41468 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (4.64419 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 46.57 \text{ N/mm}^2 .$$

Per quel che riguarda la componente T_ξ si ottiene invece:

$$S_6^* = S_7^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{56.5 \text{ mm}}{2} \times \cos 24.12^\circ - \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \sin 24.12^\circ \right\} = 1581 \text{ mm}^3 ,$$



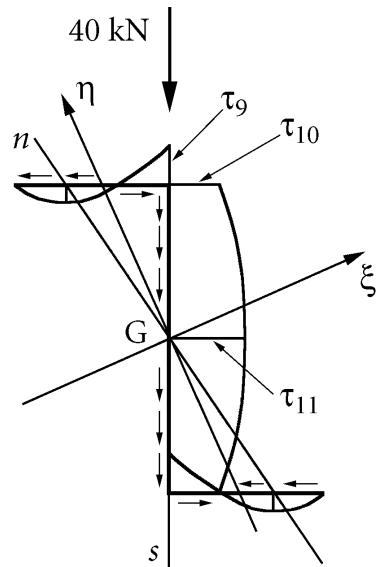
$$\tau_6 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 7.79 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\tau_7 = \frac{16360 \text{ N} \times 1578 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 10.02 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$S_8^* = 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \times \left[\frac{111 \text{ mm}}{4} \times \sin 24.12^\circ \right] - S_6^* = 2824 \text{ mm}^3 ,$$

$$\tau_8 = \frac{16360 \text{ N} \times 2827 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (3.6838 \times 10^5 \text{ mm}^4)} = 17.90 \text{ N/mm}^2 .$$

Considerando invece la forza di taglio complessiva, l'asse di sollecitazione s della flessione associata al taglio coincide con l'asse



$$J_n = \frac{464.419 \text{ cm}^4 \times \cos^2(-79.95^\circ) + 36.838 \text{ cm}^4 \times \sin^2(-79.95^\circ)}{\sin^2 34.16^\circ} = 158.094 \text{ cm}^4.$$

I momenti statici valgono:

$$S_9^* = S_{10}^* = (9 \text{ mm} \times 56.5 \text{ mm}) \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{2} - \frac{56.5 \text{ mm}}{2 \times \tan 34.16^\circ} \right\} = 7055 \text{ mm}^3,$$

$$S_{11}^* = S_9^* + \left\{ 7 \text{ mm} \times \frac{111 \text{ mm}}{2} \right\} \times \left\{ \frac{111 \text{ mm}}{4} \right\} = 17836 \text{ mm}^3.$$

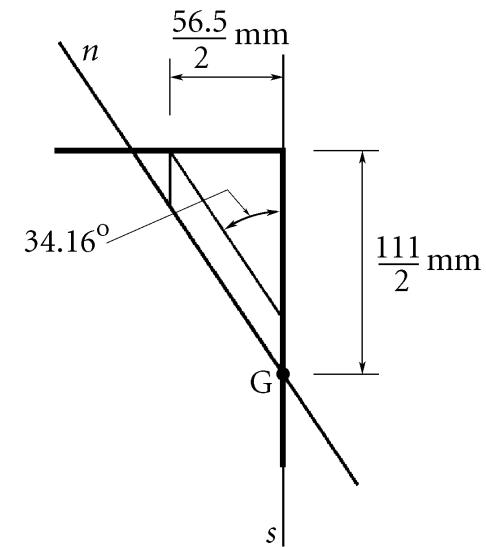
y verticale. Risulta quindi:

$$\widehat{\xi s} = 90^\circ - \alpha_\xi = 65.88^\circ.$$

Utilizzando la formula di coniugio, si ottiene allora l'inclinazione dell'asse neutro n :

$$\widehat{\xi n} = \tan^{-1} \left\{ - \frac{464.419 \text{ cm}^4}{36.838 \text{ cm}^4 \times \tan 65.88^\circ} \right\} = -79.95^\circ.$$

Tenendo conto che $\widehat{ns} = 180^\circ - (65.88^\circ + 79.95^\circ) = 34.16^\circ$, il momento di inerzia J_n rispetto all'asse neutro risulta:



Si ottengono così le seguenti tensioni tangenziali:

$$\tau_9 = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{9 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 19.83 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{10} = \frac{40000 \text{ N} \times 7055 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 25.50 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{11} = \frac{40000 \text{ N} \times 17836 \text{ mm}^3}{7 \text{ mm} \times (1.58094 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 64.47 \text{ N/mm}^2.$$

Si noti che, come deve essere, risulta:

$$\tau_9 = \tau_3 - \tau_6 = (27.63 - 7.79) \text{ N/mm}^2 = 19.83 \text{ N/mm}^2,$$

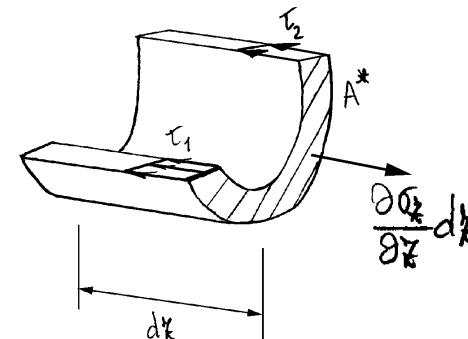
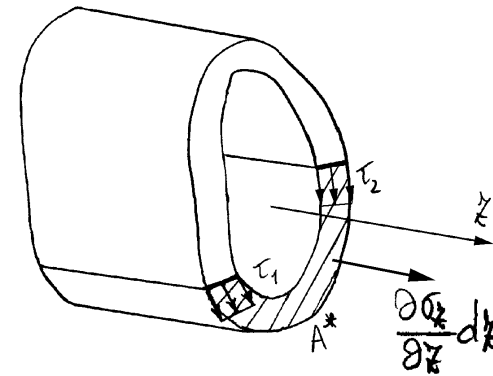
$$\tau_{10} = \tau_4 - \tau_7 = (35.52 - 10.02) \text{ N/mm}^2 = 25.50 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{11} = \tau_5 + \tau_8 = (46.57 + 17.90) \text{ N/mm}^2 = 64.47 \text{ N/mm}^2.$$

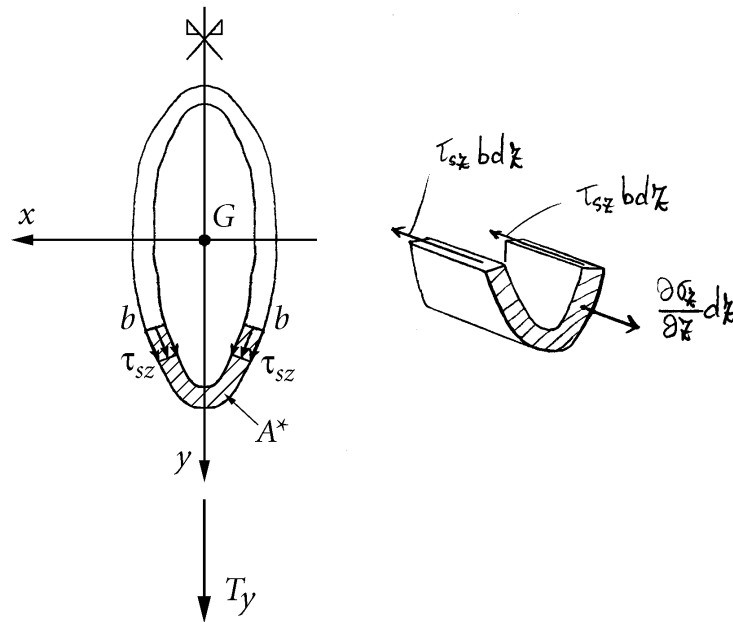
ATTENZIONE! Si tenga conto che i risultati numerici precedenti sono stati ottenuti operando in doppia precisione, con la successiva approssimazione a due cifre decimali. Questo rende apparentemente inconsistente la prima delle relazioni precedenti.

6.4.12 Il taglio nelle sezioni sottili chiuse simmetriche

Se la sezione sottile chiusa è biconnessa, occorrono due sezioni longitudinali in corrispondenza di due corde per isolare l'elemento di trave su cui imporre l'equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della trave. Questo significa che si ha a disposizione una sola equazione per le due incognite che rappresentano le tensioni tangenziali in corrispondenza delle due corde.



Se la sezione presenta un asse di simmetria e il taglio è simmetrico è possibile scegliere due corde in posizione simmetrica, nelle quali agisce di conseguenza una tensione tangenziale simmetrica.



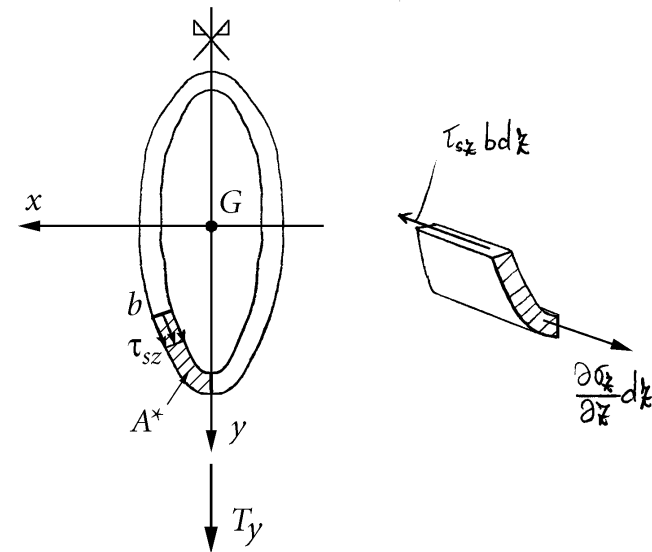
In tal modo le due incognite si riducono ad una sola e risulta:

$$2 \tau_{sx} b dz = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz dA \Rightarrow \tau_{sx} = \frac{T_y S_x^*}{2 b J_x},$$

dove S_x^* è il momento statico di una delle due parti in cui la sezione è divisa dalle due corde in posizione simmetrica.

Alternativamente, occorre considerare che in una corda posta sull'asse di simmetria la tensione tangenziale è emisimmetrica e quindi nulla. Ne consegue che una delle due corde può essere scelta sull'asse di simmetria, dove la tensione tangenziale è nulla e quindi nota, e ancora le due incognite si riducono ad una sola:

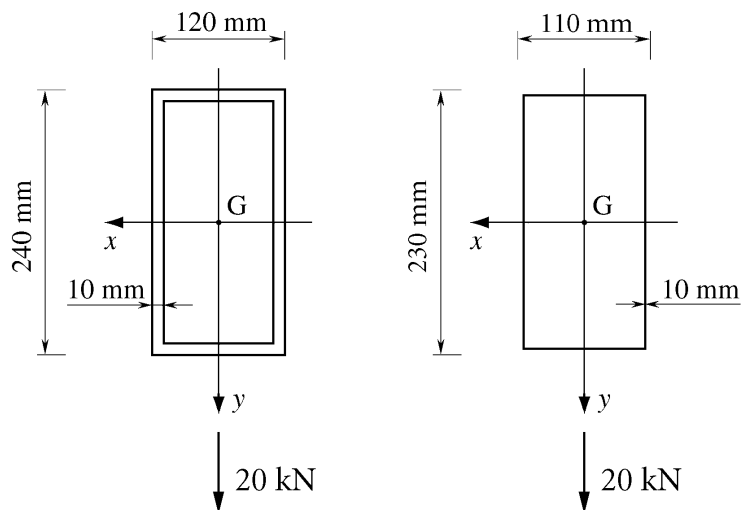
$$\tau_{sx} b dz = \int_{A^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} dz dA \Rightarrow \tau_{sx} = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$



Si osservi che in tal caso il momento statico S_x^* vale la metà di quello del caso precedente, in accordo col fatto che ora l'incognita compare solo una volta mentre nel caso precedente compariva due volte.

6.4.13 Sezione scatolare rettangolare

Quale esempio si consideri la sezione scatolare sottile di figura, già utilizzata in un esempio sul problema della torsione, soggetta ad una forza di taglio verticale di 20 kN.



Si utilizza la formula:

$$\tau_{sz} = \frac{T S_x^*}{2 b J_x},$$

relativa alla scelta di due corde in posizione simmetrica.

Risulta:

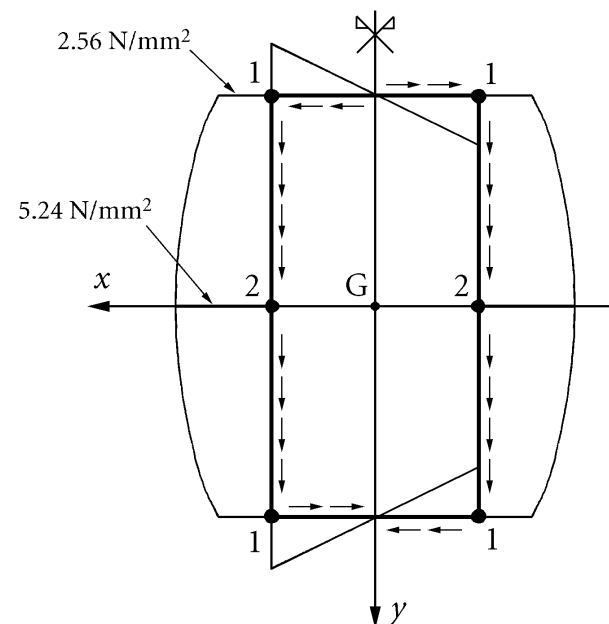
$$\begin{aligned} J_x &= 2 \times \left\{ \frac{10 \text{ mm}}{12} (230 \text{ mm})^3 + \right. \\ &\quad \left. + (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \left[\frac{230 \text{ mm}}{2} \right]^2 \right\} = \\ &= 4.93733 \times 10^7 \text{ mm}^4, \end{aligned}$$

$$S_{x1}^* = (10 \text{ mm} \times 110 \text{ mm}) \frac{230 \text{ mm}}{2} = 126500 \text{ mm}^3,$$

$$\begin{aligned} S_{x2}^* &= S_{x1}^* + 2 \times (10 \text{ mm} \times \frac{230 \text{ mm}}{2}) \times \frac{230 \text{ mm}}{4} = \\ &= 258750 \text{ mm}^3, \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \frac{20000 \text{ N} \times 126500 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 2.56 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_2 = \frac{20000 \text{ N} \times 258750 \text{ mm}^3}{2 \times 10 \text{ mm} \times (4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 5.24 \text{ N/mm}^2.$$



Bibliografia

Gilardi, G. (1996) *Analisi Due*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.

Indice analitico

baricentro, 21

caratteristiche della sollecitazione, 18

centro di massa, 21

equazioni (travi)

indefinite di equilibrio, 22

equilibrio (travi)

equazioni indefinite di , 22

Eulero-Bernoulli

trave, 15

fettente

momento, 20

forza

normale, 19

funzione

di ingobbamento, 15

inerzia

tensore di, 21

inflessa

trave, 15

ingobbamento

funzione di, 15

massa

centro di, 21

per unità di linea, 21

momenti statici

vettore dei, 21

momento

fettente, 20

torcente, 20

rotazione

flessionale, 17

torsionale, 16

snervamento caratteristico, 63n

sollecitazione

caratteristiche della, 18

superficie laterale di una trave, 11

taglio, 19

tensore

di inerzia, 21

torcente

momento, 20

trave

a brusca variazione di sezione, 13

a grande curvatura, 12

a lenta variazione di sezione, 13

a piccola curvatura, 12

a veloce variazione di sezione, 13

- cinematicamente piana, 33
 - di Eulero-Bernoulli, 15
 - di sezione sottile
 - aperta, 15
 - inflessa, 15
 - piana, 34
 - snella, 12
 - staticamente piana, 34
 - superficie laterale, 11
 - tozza, 12
 - vincolo di una, 21
- Travi
- equazioni indefinite di equilibrio, 22
- vettore
- dei momenti statici, 21
- vincolo
- di una trave, 21
- Vlasov
- teoria di, 15