

Daniele Zaccaria

TRAVI E SISTEMI DI TRAVI

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Industriale, Ingegneria Navale



Dipartimento di Ingegneria e Architettura • Università degli Studi di Trieste • 25 agosto 2016

Copyright © 2016 Daniele ZACCARIA. All rights reserved.

Questo documento può essere riprodotto e distribuito in tutto o in parte, con ogni mezzo fisico o elettronico, purché questo avviso di copyright sia mantenuto su tutte le copie. La ridistribuzione commerciale non è permessa. Ogni traduzione, lavoro derivato o comprendente questo documento deve contenere questo stesso avviso di copyright : per esempio, non si possono produrre lavori derivati da questo documento ed imporre restrizioni aggiuntive sulla sua distribuzione. Per ulteriori informazioni si prega di contattare l'autore all'indirizzo zaccaria@units.it.

This document may be reproduced and distributed in whole or in part, in any medium physical or electronic, as long as this copyright notice is retained on all copies. Commercial redistribution is not allowed. All translations, derivative works, or aggregate works incorporating this document in whole or in part must be covered under this copyright notice. That is, you may not produce a derivative work from this document and impose additional restrictions on its distribution. For further information please contact the author at zaccaria@units.it.

Trieste, 25 agosto 2016

INDICE

Premessa	9
1 Analisi statica e cinematica dei sistemi di travi	11
1.1 Vincoli	11
1.1.1 Vincoli piani semplici	11
Equilibrio del doppio doppio pendolo	12
1.1.2 Vincoli piani doppi e tripli	12
1.1.3 Cenni ai vincoli Spaziali	14
Incastro	14
Cerniera sferica	14
Cerniera cilindrica	14
Appoggio sferico scorrevole	14
Appoggio cilindrico scorrevole	14
1.2 Sistemi di travi e vincoli interni	14
1.3 Concetti alla base dell'analisi statica e cinematica dei sistemi di travi	16
1.3.1 Concetti sulla cinematica rigida infinitesima	17
1.3.2 Concetti statici	18
1.4 Dualità statico-cinematica dei sistemi di travi	19
1.4.1 Matrice cinematica	19
1.4.2 Gradi di labilità e di iperstaticità	22
1.4.3 Matrice statica	23
1.4.4 Equilibrio di un sistema di travi	25
1.4.5 Relazione tra la matrice statica e quella cinematica	25
1.4.6 Equilibrio e indeterminazione statica	26
1.4.7 Esempio sull'analisi statica e cinematica	27
1.4.8 Principio dei lavori virtuali per i sistemi di travi vincolati	29

Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio delle forze	29
1.5 Cinematica rigida infinitesima di sistemi piani	31
1.5.1 Centri assoluti di rotazione	31
1.5.2 Centri relativi di rotazione	33
1.5.3 Implicazioni dell'esistenza di campi di spostamenti rigidi infinitesimi	36
1.5.4 Allineamento dei centri relativi di tre corpi	36
1.5.5 Vincoli e centri di rotazione	38
1.5.6 Analisi dei casi possibili	39
1.5.7 Analisi di un sistema chiuso	39
1.5.8 Analisi di un sistema più volte labile	41
1.5.9 Calcolo di reazioni vincolari in un portale piano isostatico	42
2 Statica dei sistemi piani isostatici	43
2.1 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione	43
2.1.1 Convenzioni	43
2.1.2 Analisi qualitativa (asse rettilineo)	44
Forza normale	44
Taglio e momento flettente	45
2.2 Curva delle pressioni	48
2.2.1 Tratto non caricato	48
2.2.2 Tratto con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)	49
2.2.3 Arco parabolico	51
2.2.4 Arco circolare a tre cerniere	53
2.2.5 Cenni all'equilibrio dei fili	54
2.3 Travi Gerber	55
2.4 Sistemi chiusi isostatici	57
2.4.1 Maglia chiusa quadrata	57
2.4.2 Maglia chiusa triangolare	61
Isostaticità	61
Reazioni interne ed esterne	62
2.5 Travature reticolari isostatiche	64
2.5.1 Metodo dell'equilibrio dei nodi	66
Esempio	68
2.5.2 Metodo delle sezioni di Ritter	70
Esempio	71

3 Travi elastiche lineari	73	
3.1 Equazioni della teoria tecnica delle travi	73	
3.1.1 Trave di Timoshenko	76	
3.1.2 Trave piana inflessa	79	
3.1.3 Sovrapposizione degli effetti	85	
3.2 Integrazione dell'equazione della linea elastica	88	
3.2.1 Trave incastro appoggio	88	
3.2.2 Trave soggetta a sole condizioni cinematiche al contorno	90	
3.3 Aste snelle compresse	91	
3.3.1 Biforcazione dell'equilibrio	91	
3.3.2 Calcolo dei carichi critici	93	
Metodo statico	93	
Metodo energetico	93	
Equivalenza tra il metodo energetico e quello statico	94	
3.3.3 Asta di Eulero	94	
Applicazione del metodo statico	94	
Applicazione del metodo energetico	95	
Valutazione dei carichi e dei modi critici	96	
3.3.4 Altri casi di vincolo	99	
Mensola	99	
Trave incastro-appoggio	100	
Trave doppiamente incastrata	103	
Trave incastro-doppio doppio pendolo	104	
Schemi riassuntivi	104	
Portali con traversi infinitamente rigidi	105	
3.3.5 Limiti di validità della formula di Eulero	106	
3.3.6 Verifica di sicurezza di profilati metallici compressi	107	
Metodo omega	109	
Esercizio	109	
3.4 Pressoflessione di travi snelle	112	
Mensola	112	
Trave appoggiata	115	
4 Spostamenti e rotazioni in sistemi piani isostatici	117	
4.1 Deformata della linea d'asse	117	
4.1.1 Momento flettente	117	
4.1.2 Forza normale	119	
4.2 Metodo cinematico	120	
4.2.1 Sistemi di travi prevalentemente inflesse	120	
4.2.2 Mensola soggetta ad un carico ripartito	121	
4.2.3 Trave appoggiata soggetta a forza normale	122	
4.2.4 Arco circolare soggetto ad un carico ripartito	123	
4.3 Sistemi di travi con uguale deformazione	124	
4.3.1 Coefficienti elastici	124	
4.3.2 Trave appoggio-carrello soggetta a carico distribuito	126	
4.3.3 Trave appoggio-carrello soggetta a due coppie simmetriche	127	
4.3.4 Trave appoggio-carrello soggetta ad una coppia	128	
4.3.5 Struttura chiusa rettangolare	129	
4.4 Principio dei lavori virtuali	133	
Deduzione alternativa del principio dei lavori virtuali per le travi piane inflesse	133	
4.4.1 Mensola soggetta ad una forza assiale	134	
4.4.2 Portale zoppo	135	
4.4.3 Telaio	137	
4.4.4 Struttura chiusa di forma rettangolare	138	
4.4.5 Struttura con una parte chiusa triangolare	140	
4.5 Integrazione dell'equazione della linea elastica	143	
4.6 Analogia di Mohr	144	
4.6.1 Mensola soggetta ad una coppia	145	
4.6.2 Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria	146	
Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria	147	
4.7 Cedimenti e distorsioni	148	
4.7.1 Cedimenti vincolari elastici	148	
4.7.2 Cedimenti vincolari anelastici	150	
4.7.3 Distorsioni concentrate	152	
4.7.4 Distorsioni distribuite	153	
4.7.5 Distorsioni termiche	153	
Trave appoggiata soggetta a distorsione termica uniforme	155	
Trave appoggiata soggetta a distorsione termica a farfalla	155	
4.7.6 Distorsioni plastiche	156	
Distorsioni plastiche distribuite di tipo assiale	156	
Distorsioni plastiche distribuite di tipo flessionale	156	

Distorsioni plastiche concentrate di tipo flessionale . . .	158	Trave incastro-incastro soggetta a una forza concentra- ta in mezzzeria	184
4.8 Teorema di Castigliano	160	Trave incastro-incastro soggetta a una forza distribuita	184
4.9 Cenni al calcolo di spostamenti e rotazioni in sistemi spaziali	163	Calcolo a rottura di una trave in acciaio a sezione ret- tangolare doppiamente incastrata e soggetta a un carico ripartito	185
4.9.1 Applicazione del metodo cinetico al caso di una mensola spaziale di sezione a C deformabile a taglio . .	163	Trave incastro-incastro soggetta a una distorsione termica a farfalla	185
4.9.2 Calcolo di spostamenti e rotazioni in sistemi spaziali con il principio dei lavori virtuali	165	5.2.4 Travi Continue	186
5 Sistemi iperstatici	171	Trave continua su due appoggi intermedi caricata da una forza concentrata	187
5.1 Soluzione delle strutture iperstatiche	171	Analisi qualitativa basata sulle rigidezze	188
5.1.1 Metodo delle forze	171	Trave continua su un appoggio intermedio caricata da una forza distribuita	190
5.1.2 Metodo degli spostamenti	171	5.3 Strutture simmetriche	192
5.2 Travi iperstatiche	172	5.3.1 Azioni su strutture simmetriche	193
5.2.1 Travi appoggiate	172	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche	193
Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale	172	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche .	193
Soluzione col metodo delle forze	172	Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche	194
Soluzione col metodo degli spostamenti	173	5.3.2 Strutture assialsimmetriche	194
Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale .	177	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simmetriche	194
Trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica uniforme	177	Diagrammi nel caso assialsimmetrico	196
5.2.2 Travi incastro-appoggio	178	Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisimme- triche	197
Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia	178	Trave appoggiata soggetta a un carico assiale emisim- metrico	199
Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concen- trata	179	Diagrammi nel caso assiale emisimmetrico	200
Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita	180	5.3.3 Strutture Polarsimmetriche	201
Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distri- buita con incastro cedevole angolarmente in modo elastico	180	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsimme- triche	201
Trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolar- mente in modo anelastico	181	Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremi- simmetriche	202
Trave incastro-appoggio con incastro cedevole vertical- mente in modo anelastico	182	5.4 Travi iperstatiche ad asse curvo	203
Trave incastro-appoggio soggetta a distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna . . .	182	5.4.1 Anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica a farfalla	203
5.2.3 Travi incastro-doppio pendolo e incastro-incastro	183	5.4.2 Anello soggetto a forze concentrate	206
Trave incastro-doppio pendolo soggetta a una forza concentrata	183	5.5 Sistemi di pendoli	207
		5.5.1 Sistema di pendoli labile e iperstatico non equilibrato .	207

5.5.2	Cavalletto iperstatico assialsimmetrico caricato simmetricamente	210
5.5.3	Sistema di pendoli paralleli	212
5.5.4	Sistema di pendoli connessi in un nodo	213
6	Telai e travature reticolari	215
6.1	Telai piani	215
6.1.1	Telaio a un solo nodo fisso soggetto ad una coppia . . .	217
6.1.2	Telaio a un nodo spostabile soggetto a un carico ripartito	221
6.1.3	Metodo dei telai a nodi spostabili	225
6.1.4	Schema fondamentale dei telai a nodi fissi	227
6.1.5	Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili	228
6.1.6	Telai con traversi rigidi	231
	Portale con traverso rigido	231
	Telaio con traverso rigido e tre ritti	232
	Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti	235
6.2	Telai spaziali	237
6.3	Travature reticolari	241
6.3.1	Travatura reticolare tirantata iperstatica	244
	Sovrapposizione degli effetti	244
	Soluzione flessionale	245
	Soluzione assiale	245
6.3.2	Arco reticolare a tre cerniere	248
6.3.3	Travatura reticolare a nodi rigidi	252
	Soluzione flessionale	253
	Soluzione assiale	254
7	Analisi dei metodi delle forze e degli spostamenti	257
7.1	Equazioni di congruenza (metodo delle forze)	257
7.1.1	Principio dei lavori virtuali	260
7.1.2	Indeformabilità assiale	261
7.1.3	Soluzione del telaio a un nodo spostabile	263
7.2	Equazioni di equilibrio (metodo degli spostamenti)	267
7.2.1	Principio dei lavori virtuali	270
7.2.2	Soluzione del telaio a un nodo spostabile	272
7.2.3	Struttura reticolare iperstatica simmetrica	275
7.3	Assemblaggio della matrice delle rigidezze	278
7.3.1	Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti gli spostamenti di estremità vincolati	279

7.3.2	Matrice di rigidezza di una trave inflessa con una rotazione di nodo non vincolata	280
7.3.3	Matrici di rigidezza delle travi componenti il telaio e loro assemblaggio	280
7.4	Metodo iterativo di Cross	282

Riferimenti bibliografici	285
----------------------------------	------------

Indice analitico	287
-------------------------	------------

PREMESSA

In questa terza dispensa di *Scienza delle Costruzioni* viene affrontato il problema di come risolvere problemi riguardanti sia travi elastiche lineari che sistemi di travi elastiche lineari. Introdotti i principali concetti riguardanti i vincoli e i sistemi di travi si affronta come prima cosa l'analisi statica e cinematica dei sistemi di travi. Si passa quindi ad introdurre i concetti e a risolvere dei problemi riguardanti la statica dei sistemi di travi isostatici. Si risolvono poi alcuni problemi riguardanti le travi elastiche lineari, tra cui il problema dell'integrazione della linea elastica e quello della stabilità e della biforcazione per inflessione laterale di travi compresse. Si affronta quindi il problema della determinazione di spostamenti e rotazioni in sistemi di travi isostatici elastici lineari, preliminare alla risoluzione delle strutture iperstatiche. Si discutono quindi i concetti riguardanti i telai e le travature reticolari e si termina con un'analisi dettagliata delle equazioni risolventi i problemi iperstatici.

ANALISI STATICA E CINEMATICA DEI SISTEMI DI TRAVI

1.1 Vincoli

Ricordando che i vincoli rigidi, o comunque le imposizioni perfette di condizioni cinematiche semplici, che si considerano durante il calcolo di una struttura non sono sempre la modellizzazione di “vincoli reali”, al fine di evitare equivoci si consiglia di interpretare i simboli grafici dei vari tipi di vincoli semplici illustrati nel seguito non come l’idealizzazione della loro realizzazione concreta, ma per quello che effettivamente rappresentano nel presente contesto: delle semplici imposizioni cinematiche.

Nel seguito, limitatamente ai vincoli rigidi bilaterali e privi di attrito, si analizzerà il caso delle travi piane e si accennerà al caso delle travi spaziali. Si ricordi che se una trave è piana la sola rotazione possibile è attorno ad un asse perpendicolare al piano della trave, mentre una eventuale reazione momento risultante deve avere asse ortogonale al piano della trave.

1.1.1 Vincoli piani semplici

I *vincoli semplici* impediscono un solo grado di libertà. Nel caso di trave piana, vi sono quindi due tipi di vincoli semplici. Un primo tipo impedisce l’incremento di spostamento di un punto della sezione retta in una data direzione, punto che può anche non appartenere alla linea d’asse della trave. In tal caso la retta d’azione della reazione risultante è parallela a tale direzione e passa per il punto vincolato, mentre la reazione momento risultante (rispetto al punto vincolato) è nulla. Tale tipo di vincolo può essere

rappresentato graficamente da un *carrello*,¹ disegnato sia con che senza cerniera in corrispondenza del punto vincolato, con piano di scorrimento perpendicolare all’incremento di spostamento impedito (fig. 1.1a), oppure

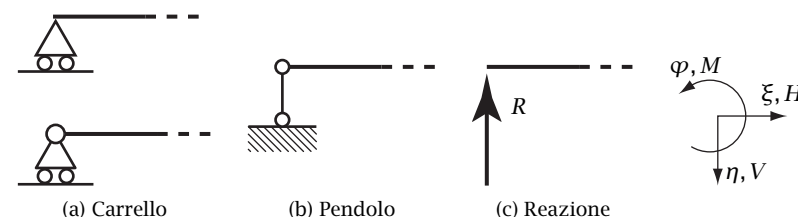


Figura 1.1: Vincoli che impediscono l’incremento di spostamento in una data direzione

da un *pendolo semplice*² il cui asse ha quindi la direzione dell’incremento di spostamento impedito (fig. 1.1b). Si osservi che l’equivalenza tra il carrello e il pendolo semplice riguarda il solo incremento del moto, e quindi anche

¹ Roller support nella letteratura inglese.

² Il pendolo semplice è composto da due cerniere collegate da un’asta rigida, di cui una fissata all’esterno. Ne consegue che il punto della struttura connesso all’altra cerniera è vincolato a spostarsi su una circonferenza, come accade nel caso del pendolo in senso stretto, costituito da un punto pesante connesso ad una delle due estremità di un filo inestensibile e avente l’altra estremità fissa. Nella letteratura inglese il pendolo in senso stretto si rende con *pendulum*, mentre il pendolo inteso quale vincolo semplice con *linked support*.

il tipo di reazione, poiché l'uno vincola il punto a spostarsi lungo una retta e l'altro lungo una circonferenza. Comunque, sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti il carrello e il pendolo semplice possono considerarsi equivalenti, almeno approssimativamente, anche nella descrizione degli spostamenti in un intervallo finito di tempo. Nel caso dei due vincoli illustrati in fig. 1.1, le condizioni cinematiche e le conseguenti condizioni statiche sulle componenti di reazione possono scriversi, con le convenzioni indicate nella stessa figura:

$$d\eta = 0, \quad H = 0, \quad M = 0, \quad (1.1)$$

mentre l'incremento di spostamento $d\xi$, l'incremento di rotazione $d\varphi$ e la componente V della reazione risultante sono indeterminate e quindi, in generale, diverse da zero.

Il secondo tipo di vincolo semplice impedisce l'incremento di rotazione della sezione retta mentre consente un generico incremento di traslazione. La reazione consiste quindi in una coppia agente nel piano della trave, cioè con asse momento ortogonale al piano della trave e quindi coincidente con l'asse della rotazione impedita. Tale tipo di vincolo può essere rappresentato graficamente da un *doppio doppio pendolo* o *pendolo improprio*, costituito da due coppie di doppi pendoli connessi tramite un elemento rigido e con gli assi delle due coppie di doppi pendoli non allineati. Con riferimento alla fig. 1.2, le condizioni cinematiche che definiscono il vincolo

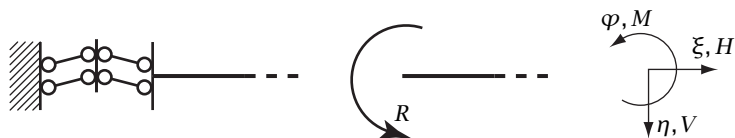


Figura 1.2: Vincolo che impedisce l'incremento di rotazione (doppio doppio pendolo)

e le conseguenti condizioni statiche sulle componenti di reazione possono scriversi:

$$d\varphi = 0, \quad H = 0, \quad V = 0, \quad (1.2)$$

mentre gli incrementi di spostamento in ogni direzione, e quindi sia l'incremento $d\xi$ che quello $d\eta$, e la reazione momento risultante M sono indeterminati e quindi, in generale, diversi da zero.

Equilibrio del doppio doppio pendolo. Si vuole verificare nel seguito che il doppio doppio pendolo reagisce al più con una coppia. Infatti, con riferimento allo schema di fig. 1.3a, sull'elemento rigido che connette i due



Figura 1.3: Equilibrio interno al doppio doppio pendolo

doppi pendoli agiscono quattro forze, di cui due nel punto A e due nel punto B. La risultante di F_1 e F_3 passa per A mentre la risultante di F_2 e F_4 passa per B. Per equilibrio tali risultanti devono essere uguali ed opposte ed avere la stessa retta d'azione, che non può quindi che essere verticale (fig. 1.3b). Poiché F_3 e F_4 , così come F_1 e F_2 , sono parallele deve dunque risultare $F_1 = F_2$ e $F_3 = F_4$, con la conseguenza che la sezione S è al più soggetta ad una coppia.

1.1.2 Vincoli piani doppi e tripli

I *vincoli doppi* impediscono due gradi di libertà contemporaneamente e, nel caso di trave piana, vi sono quindi due tipi di vincoli semplici. Un primo tipo impedisce l'incremento di spostamento di un punto della sezione retta, punto che può anche non appartenere alla linea d'asse della trave, lasciando la sezione retta libera di ruotare attorno allo stesso punto. Ne consegue che la retta d'azione della reazione risultante passa per il punto vincolato, essendone però indeterminata la direzione, mentre la reazione momento risultante è nulla. Tale tipo di vincolo può essere rappresentato graficamente da una *cerniera* (fig. 1.4b),³ oppure da un *appoggio*, disegnato sia con che senza cerniera in corrispondenza del punto vincolato (fig. 1.4a).⁴ Le condizioni cinematiche e le conseguenti condizioni statiche

³Hinge oppure *pin* nella letteratura inglese.

⁴Un appoggio in senso stretto è un vincolo monolatero, ma che si comporta come un vincolo bilaterale se le forze agenti sono tali da impedire il distacco dal vincolo, come quasi sempre accade nelle strutture civili. Nei casi in cui si voglia distinguere tra appoggi monolateri e bilateri, si riserva il simbolo senza cerniera all'appoggio monolatero e quello

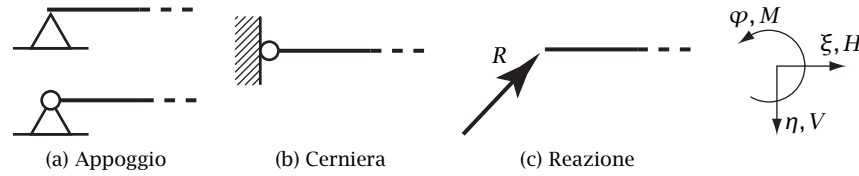


Figura 1.4: Vincoli che impediscono l'incremento di spostamento

sulle componenti di reazione di tale tipo di vincolo possono scriversi, con le convenzioni indicate in fig. 1.4:

$$d\xi = 0, \quad d\eta = 0, \quad M = 0, \quad (1.3)$$

mentre l'incremento di rotazione $d\varphi$ e le componenti H e V della reazione risultante sono indeterminate e quindi, in generale, diverse da zero.

Il secondo tipo di vincolo doppio impedisce l'incremento di rotazione della sezione retta e il suo incremento di traslazione in una data direzione. La reazione consiste quindi in una forza avente la direzione della traslazione impedita ma di retta d'azione indeterminata oppure, nel caso in cui la reazione risultante sia nulla, in una coppia agente nel piano della trave. La rappresentazione grafica di tale vincolo è basata sul *doppio pendolo* o *cerniera impropria* (fig. 1.5a), oppure sul *pattino* o *incastro scorrevole*



Figura 1.5: Vincoli che impediscono la rotazione e l'incremento di spostamento in una data direzione

(fig. 1.5b).⁵ Si osservi che l'equivalenza tra il doppio pendolo e il pattino, con cerniera all'appoggio bilatero. Appoggio si rende in inglese con il termine *knife-edge support*, per quel che riguarda l'appoggio in senso stretto, e con *hinge support* per quello bilatero.

⁵ *Slider* nella letteratura inglese.

come già quella tra il carrello e il pendolo semplice, riguarda il solo incremento del moto, e quindi anche il tipo di reazione, poiché l'uno vincola la sezione a traslare lungo una circonferenza e l'altro lungo una retta. Sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti il pattino e il doppio pendolo possono comunque considerarsi equivalenti, almeno approssimativamente, anche nella descrizione degli spostamenti in un intervallo finito di tempo. Con riferimento alla fig. 1.5, le condizioni cinematiche che definiscono il vincolo e le conseguenti condizioni statiche sulle componenti di reazione possono scriversi:

$$d\xi = 0, \quad d\varphi = 0, \quad V = 0, \quad (1.4)$$

mentre l'incremento di spostamento $d\eta$, la componente H della reazione risultante e la reazione momento risultante M sono indeterminati e quindi, in generale, diversi da zero.

Infine nel caso piano esiste evidentemente un unico vincolo triplo che blocca i tre gradi di libertà della sezione retta rendendola fissa nel piano. La reazione vincolare non è soggetta a restrizioni e consiste quindi in una forza avente retta d'azione indeterminata oppure in una coppia. Tale condizione si può rendere graficamente con l'*incastro*⁶ (fig. 1.6). Le condizioni

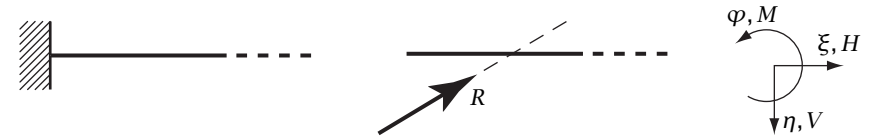


Figura 1.6: Incastro

cinematiche che definiscono il vincolo possono quindi scriversi (fig. 1.6):

$$d\xi = 0, \quad d\eta = 0, \quad d\varphi = 0, \quad (1.5)$$

e tali condizioni, come detto, non implicano alcuna condizione statica sulle componenti di reazione, tutte indeterminate e quindi, in generale, diverse dallo zero.

⁶ *Clamp* oppure *fixed support* nella letteratura inglese.

1.1.3 Cenno ai vincoli Spaziali

Una sezione retta ha nello spazio sei gradi di libertà. I diversi tipi di vincolo impediscono uno o più di tali gradi di libertà. Vediamone alcuni esempi nel seguito.

Incastro. Impedisce sia la traslazione che la rotazione della sezione retta. In altri termini il moto rigido incrementale non esiste e il vincolo è sestuplo. La reazione risultante è allora una forza di retta d'azione generica oppure, nel caso la reazione risultante sia nulla, una coppia di asse momento di direzione generica.

Cerniera sferica. Impedisce lo spostamento di un punto della sezione retta lasciando la sezione retta libera di ruotare attorno al punto vincolato. In altri termini il moto rigido incrementale della sezione è una rotazione attorno ad un generico asse passante per il punto vincolato. Essendo permesso il solo incremento della rotazione, caratterizzato da tre parametri, il vincolo è triplo. La reazione risultante è allora una forza di direzione generica e passante per il punto vincolato mentre la reazione momento risultante è nulla.

Cerniera cilindrica. Blocca lo spostamento di un punto della sezione retta e permette la rotazione attorno ad un asse fisso passante per il punto vincolato. Il moto rigido incrementale della sezione è dunque una rotazione attorno all'asse fisso. Essendo permesso il solo incremento di una componente della rotazione, caratterizzato da un solo parametro, il vincolo è quintuplo.

Se la reazione risultante non è nulla, le reazioni vincolari consistono in un'unica forza di direzione generica passante per l'asse fisso di rotazione, ovvero in una forza passante per il punto vincolato e in una coppia di asse momento ortogonale all'asse di rotazione. Poiché la coppia e la componente della forza avente l'asse di rotazione quale retta d'azione equivalgono ad una forza parallela all'asse di rotazione, le reazioni vincolari consistono in generale in due forze di cui l'una, R_1 , passante per il punto vincolato e ortogonale all'asse di rotazione e l'altra, R_2 , parallela all'asse della rotazione (fig. 1.7). Se la reazione risultante è invece nulla, resta la sola reazione momento risultante di asse momento perpendicolare all'asse di rotazione.

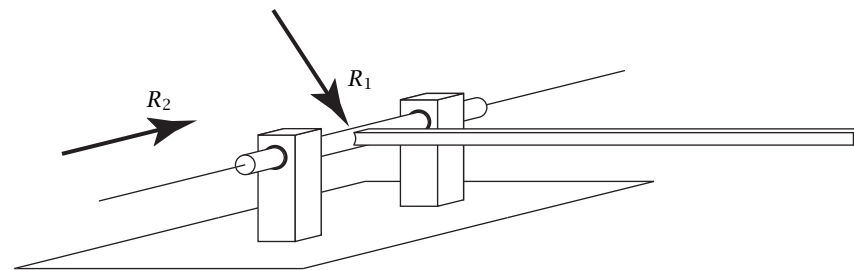


Figura 1.7: Cerniera cilindrica

Appoggio sferico scorrevole. Consente la traslazione della sezione retta nella direzione parallela al piano di scorrimento dell'appoggio e la rotazione attorno ad un punto. Si tratta quindi di un vincolo semplice poiché impedisce la sola traslazione ortogonale al piano di scorrimento.

Le reazioni consistono in generale in un'unica forza passante per il punto vincolato e ortogonale al piano di scorrimento dell'appoggio.

Appoggio cilindrico scorrevole. Consente la traslazione della sezione retta nella direzione parallela al piano di scorrimento dell'appoggio, la rotazione attorno ad un primo asse perpendicolare al piano di scorrimento e la rotazione attorno ad un secondo asse, per esempio parallelo al piano di scorrimento. Si tratta quindi di un vincolo doppio.

Se la reazione risultante non è nulla, la reazione vincolare consiste in un'unica forza ortogonale al piano di scorrimento e passante per l'asse di rotazione parallelo al piano di scorrimento, ovvero in una forza di retta d'azione l'asse di rotazione perpendicolare al piano di scorrimento e in una coppia di asse momento ortogonale ai due assi di rotazione.

Se la reazione risultante è invece nulla, la reazione vincolare consiste in un'unica coppia di asse momento ortogonale ai due assi di rotazione.

1.2 Sistemi di travi e vincoli interni

Si indica con il nome di *sistema di travi*⁷ un insieme di travi vincolate tra loro e con l'esterno. Un sistema di travi modella di conseguenza una strut-

⁷Framed structure nella letteratura inglese.

tura composta di parti connesse tra loro, ognuna delle quali si sviluppa prevalentemente in una direzione. Le singole travi modellano il comportamento delle singole parti della struttura mentre i vincoli ne modellano le connessioni.

I sistemi di travi sono *aperti* o *monoconnessi* se, a prescindere dai vincoli esterni, una qualunque sezione del sistema lo divide in due parti. Se invece esistono parti del sistema le cui sezioni, sempre a prescindere dai vincoli esterni, non dividono in due parti il sistema, questi si dice *chiuso* o *pluriconnesso*. Un sistema potrebbe essere composto da parti di diversa connessione, in generale da parti aperte e da parti chiuse di diversa connessione. Una parte del sistema ha grado di connessione n se servono n sezioni della parte per dividere in due parti il sistema di travi.

A differenza del caso di una singola trave, nel caso di un sistema di travi occorre distinguere tra loro i *vincoli esterni*, che connettono le travi del sistema all'ambiente esterno, e i *vincoli interni* o *vincoli mutui*, che invece le connettono tra loro. Un vincolo esterno impone delle condizioni cinematiche ad una sezione di una trave del sistema relativamente all'osservatore esterno, cioè relativamente a quell'osservatore rispetto al quale è descritto il moto oppure la quiete del sistema, e le loro reazioni agiscono vicendevolmente, per il principio di azione e reazione, sulla sezione vincolata e sull'ambiente esterno al sistema. Viceversa un vincolo interno impone delle condizioni cinematiche ad una sezione di una trave del sistema relativamente ad un'altra sezione, della stessa trave oppure di un'altra trave del sistema, e le loro reazioni agiscono vicendevolmente, per il principio di azione e reazione, sulle due sezioni vincolate, ovvero agiscono entrambe sul sistema di travi. Nelle fig. 1.8 e 1.9 sono illustrati i simboli grafici, con le corrispondenti reazioni, che saranno utilizzati nel seguito per rappresentare i vincoli interni piani semplici e doppi rispettivamente. Come risulta dalle predette figure, non verrà utilizzato il simbolo riguardante il carrello. Si preferirà inoltre il simbolo del doppio pendolo a quello del pattino.

Per quel che riguarda invece il vincolo di incastro (triplo nel caso piano e sestuplo nel caso spaziale), occorre a questo punto evidenziare che due parti di una stessa trave possono considerarsi quali travi distinte connesse da un incastro interno, per cui il vincolo interno di incastro sarà implicito in ogni punto di continuità della linea d'asse senza bisogno di alcun simbolo. È anche evidente da tale affermazione che esistono svariati sistemi di travi tutti equivalenti ad un dato sistema, potendo una singola trave ri-

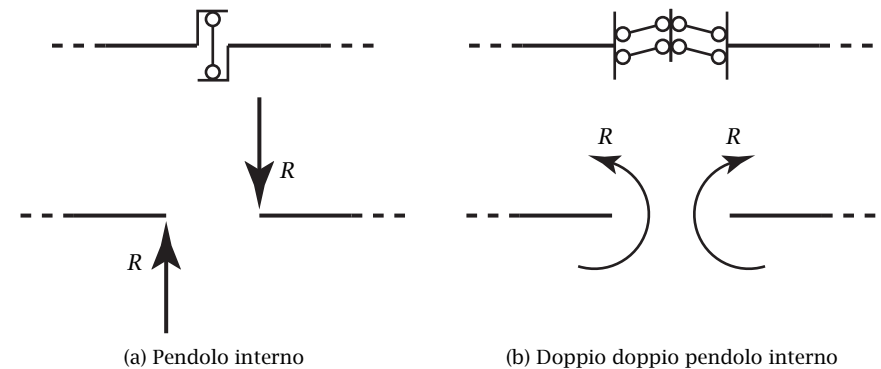


Figura 1.8: Vincoli interni semplici

guardarsi come composta da due o più parti connesse da incastri interni. Ricordando inoltre che il raggio di curvatura dell'asse di una trave deve essere sufficientemente grande rispetto ad una dimensione significativa della sezione retta, si presentano spesso casi in cui parti continue di strutture non possono che essere assimilate a travi con linee d'asse aventi tangenti

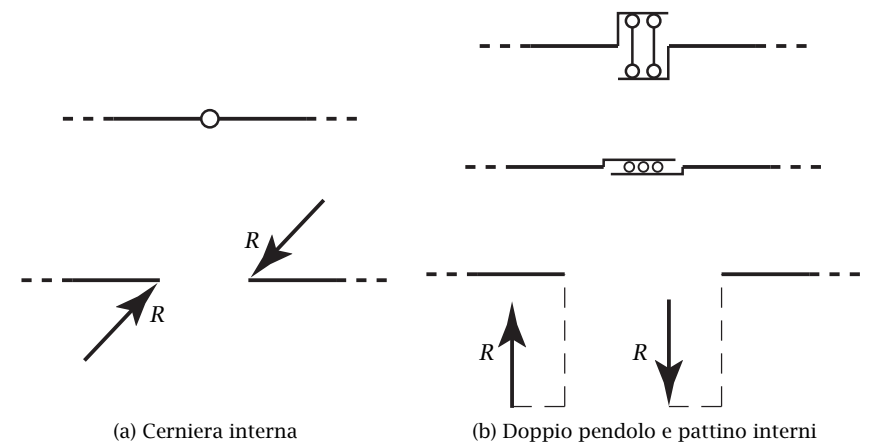


Figura 1.9: Vincoli interni doppi

discontinue in un numero finito di punti. Poiché normalmente si desidera che la linea d'asse di una singola trave sia sufficientemente regolare, e che in particolare non presenti discontinuità nella tangente, ne consegue che invece di una singola trave verrà considerato un sistema di più travi connesse da incastri interni in corrispondenza dei punti singolari.

Si noti poi che due travi aventi due estremità in comune e connesse fra loro tramite un vincolo doppio o semplice (nel caso piano) si possono considerare come un'unica trave continua a cui siano state praticate una o due sconnessioni in corrispondenza di un'incastro interno.

Infine, un punto del sistema di travi comune a più travi, o comunque di discontinuità nella tangente, e quindi normalmente considerato estremità di due travi piuttosto che interno ad un'unica trave, viene comunemente denominato *nodo*.⁸ Si parla di *nodo doppio* oppure di *nodo triplo* (e così via) se il punto è comune a due oppure a tre (e così via) travi del sistema. Si parla invece di *nodo cerniera*⁹ se le estremità delle travi in corrispondenza del nodo sono connesse tra loro tramite una cerniera (una cerniera sferica nel caso spaziale) oppure di *nodo incastro* o *nodo rigido*¹⁰ nel caso in cui le estremità comuni sono connesse tramite incastri interni.

Nella fig. 1.10 è illustrato un sistema piano aperto di cinque travi ad asse

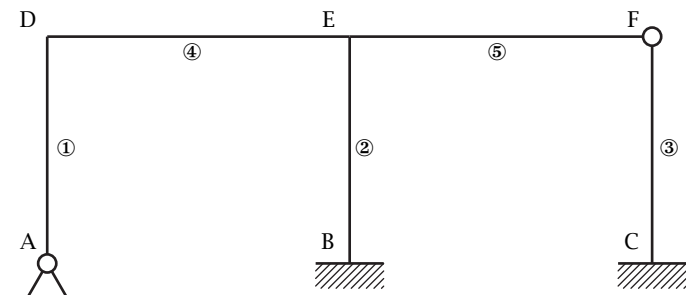


Figura 1.10: Esempio di un sistema di travi

rettilineo. Con riferimento alla numerazione di figura, la prima trave è vincolata esternamente da una cerniera nella estremità A mentre la seconda e la terza sono vincolate tramite due incastri nelle estremità B e C. Sono

inoltre presenti due nodi doppi, nodo cerniera in F e nodo incastro in D, e un nodo triplo rigido in E. Si noti che la quarta e quinta trave possono essere considerate parti di un'unica trave ad asse rettilineo connessa in corrispondenza di un punto intermedio ad una estremità della seconda trave nel nodo doppio rigido E. Si noti anche che la prima, quarta e quinta trave costituiscono un'unica trave, ma con la linea d'asse avente un punto di discontinuità della tangente in D. Si noti inoltre che la prima, quarta, quinta e terza trave costituiscono, in quest'ordine, un'unica trave con due punti di discontinuità in D e F e una sconnessione semplice in corrispondenza del punto di discontinuità F. Si noti infine che l'intero sistema non può in nessun caso considerarsi quale unica trave data la presenza del nodo triplo E.

1.3 Concetti alla base dell'analisi statica e cinematica dei sistemi di travi

Si ricorda che l'equilibrio di tutte le forze esterne applicate ad un corpo non vincolato è equivalente al principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi, dove assumono un ruolo strumentale di primo piano gli spostamenti rigidi virtuali, ovverossia infinitesimi. Sconnettendo i vincoli esterni ed interni di un sistema di travi, il sistema stesso risulta diviso in una o più parti continue non vincolate ognuna soggetta non solo alle forze esterne applicate alla data parte ma anche, in generale, alle reazioni vincolari che le competono, di cui alcune potrebbero essere interne per quel che riguarda il sistema di travi, ma comunque anch'esse esterne riguardo alla parte in discussione. Si può quindi comprendere l'importanza dello studio della cinematica rigida infinitesima dei sistemi di travi quale strumento per l'analisi statica degli stessi, studio che sarà anteposto a quello della statica dei sistemi di travi, dato che alle proprietà cinematiche corrispondono delle duali proprietà statiche. Tali proprietà saranno inizialmente enunciate senza dimostrazione, rinviata ad una successiva algebrizzazione dell'analisi cinematica e statica dei sistemi di travi, nell'ambito della quale sarà dimostrata, non a caso per mezzo del principio dei lavori virtuali, quella dualità statico-cinematica alla base delle suddette proprietà.

⁸ *Joint* oppure *connection* nella letteratura inglese.

⁹ *Hinged connection* nella letteratura inglese.

¹⁰ *Rigid connection* nella letteratura inglese.

1.3.1 Concetti sulla cinematica rigida infinitesima

Un sistema di travi in una data configurazione, quella indeformata nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, è detto *labile* se può subire degli spostamenti rigidi infinitesimi. Si noti che se un sistema può subire degli spostamenti rigidi finiti, può subire anche degli spostamenti rigidi infinitesimi, che non sono altro che la linearizzazione dei precedenti. Non è invece vero l'inverso, ovvero esistono sistemi che possono subire degli spostamenti rigidi infinitesimi senza che esistano degli effettivi campi di spostamenti rigidi finiti, come la trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 1.11. Infatti tale trave non può subire degli sposta-



Figura 1.11: Trave su un appoggio fisso e un carrello

menti rigidi finiti poiché il punto fisso A richiederebbe alla trave di ruotare attorno allo stesso punto. Il punto B dovrebbe allora spostarsi su una circonferenza, ma il carrello impone a B di spostarsi sulla retta verticale per lo stesso punto. Può invece subire degli spostamenti rigidi infinitesimi che non sono altro che la linearizzazione del campo di spostamenti associato alla rotazione di polo A, dato che tale campo linearizzato richiede al punto B di spostarsi sulla verticale.

Il numero l dei parametri lagrangiani che definiscono il generico campo di spostamenti rigidi infinitesimi è detto *grado di labilità*.¹¹ I possibili campi di spostamenti rigidi infinitesimi definiscono lo *stato cinematico* del sistema di travi.

Un vincolo è detto *iperstatico* o *inefficace* se può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema di travi. Se un vincolo non può invece essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema è

¹¹Affinché le strutture civili siano funzionali, devono essere fissate al terreno e le sue diverse parti fra di loro. Questo implica che non devono essere possibili degli spostamenti rigidi, da cui il termine *labilità* per indicare in tale ambito i gradi di libertà, termine che contiene una connotazione negativa. D'altronde la stessa osservazione è valida anche per le costruzioni meccaniche che possono contenere parti in movimento od essere esse stesse in movimento. Infatti, ad esclusione di ciò che si può muovere, alle parti restanti è richiesto di essere fissate fra di loro, alle parti in movimento ed eventualmente al terreno, almeno nel caso in cui non sia previsto il movimento dell'intera struttura.

detto *vincolo efficace*. È bene dire subito che si presentano sia casi in cui tutti i vincoli semplici, interni ed esterni, del sistema di travi sono iperstatici sia casi in cui tutti i vincoli sono efficaci. Del primo caso ne è un semplice esempio la trave su tre carrelli di fig. 1.12a, mentre il secondo

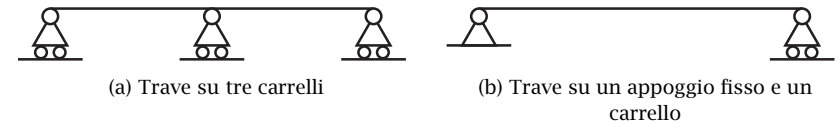


Figura 1.12: Vincoli efficaci e inefficaci

caso è illustrato dalla trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 1.12b.

Il numero massimo i dei vincoli semplici iperstatici che possono essere contemporaneamente rimossi senza modificare lo stato cinematico del sistema è detto *grado di iperstaticità*. Se due diversi insiemi di vincoli soddisfano la proprietà, per rendere consistente la definizione di grado di iperstaticità i due insiemi devono contenere lo stesso numero di vincoli, anche se come detto non contengono gli stessi vincoli. Questa proprietà sarà dimostrata in seguito nell'ambito della algebrizzazione del problema. La definizione di grado di iperstaticità richiede che esista un insieme di i vincoli iperstatici soddisfacente la condizione, non che un qualunque insieme di i vincoli iperstatici soddisfi la condizione stessa, come mostrato dalla trave incastro-appoggio di fig. 1.13. È facile infatti verificare che tutti i vincoli di

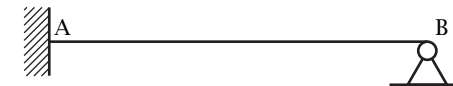


Figura 1.13: Trave incastro-appoggio

tale sistema sono iperstatici e che il sistema stesso è due volte iperstatico. Rimuovendo però il vincolo in B che impedisce lo spostamento verticale e il vincolo in A che impedisce la rotazione della sezione si ottiene il sistema labile di fig. 1.11.

Dalla definizione di grado i di iperstaticità consegue inoltre che rimosso un opportuno insieme di i vincoli iperstatici, non è poi più possibile rimuovere ulteriori vincoli senza modificare lo stato cinematico del siste-

ma. I vincoli restanti sono quindi divenuti tutti efficaci. Se v è il numero dei vincoli semplici, interni ed esterni, il numero dei vincoli restanti, tutti efficaci, vale $v - i$. Se g rappresenta il numero dei gradi di libertà del sistema svincolato, si può allora presumere che il grado di labilità del sistema valga:

$$l = g - (v - i), \quad (1.6)$$

altra proprietà dimostrata nel seguito sempre nell'ambito dell'algebrizzazione del problema. Ne consegue quindi la relazione:

$$v - g = i - l. \quad (1.7)$$

Poiché un corpo ha 6 gradi di libertà nello spazio e 3 gradi di libertà nel piano, sia dal punto di vista degli spostamenti rigidi finiti che di quelli infinitesimi, ne risulta:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{nel caso spaziale,} \\ 3n & \text{nel caso piano,} \end{cases} \quad (1.8)$$

dove n è il numero di parti continue del sistema connesse tra loro dai vincoli interni.

Un sistema di travi, in una data configurazione, è detto *labile* se il suo grado di labilità non è nullo. Analogamente è detto *iperstatico* se non è nullo il suo grado di iperstaticità. Si noti che un sistema può essere contemporaneamente labile e iperstatico, come per esempio il semplice caso della trave su tre carrelli di fig. 1.12a. Infatti i tre carrelli a piano di scorrimento orizzontale rendono possibile un moto rigido di traslazione orizzontale, e quindi $l = 1$. D'altronde uno qualunque dei tre carrelli può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico della trave rigida e quindi i tre vincoli sono iperstatici e di conseguenza la struttura è iperstatica. Poiché solo un carrello per volta può essere rimosso senza modificare lo stato cinematico del sistema ne risulta $i = 1$. La trave su tre carrelli ha dunque un grado di iperstaticità e un grado di labilità. La trave incastro-appoggio di fig. 1.13 è invece un esempio di un sistema non labile e due volte iperstatico.

Se il sistema non è né labile e né iperstatico viene detto *isostatico*. La trave su un appoggio fisso e un carrello di fig. 1.12b è un semplice esempio di sistema isostatico.

Un sistema di travi è dunque isostatico se e solo se:

$$i = 0 \quad \text{e} \quad l = 0. \quad (1.9)$$

Si osservi che la relazione (1.7) fornisce la seguente condizione necessaria di isostaticità:

$$v - g = 0. \quad (1.10)$$

La condizione non è sufficiente poiché è soddisfatta se $i = l$ senza che entrambi siano nulli, come nel caso già visto della trave su tre carrelli di fig. 1.12a. Se un sistema soddisfa la condizione necessaria di isostaticità (1.10) senza essere isostatico ne consegue che è contemporaneamente labile e iperstatico con ugual grado di labilità e di iperstaticità. In tal caso si suol dire a volte che i vincoli sono *mal disposti*, naturalmente rispetto alla esigenza di avere un sistema di travi isostatico.

1.3.2 Concetti statici

Sia dato un sistema di travi vincolato esternamente e internamente e soggetto a date forze esterne. Si svincoli il sistema in modo da ottenere un sistema composto di parti libere continue e monoconnesse, ognuna soggetta sia alle forze esterne che alle reazioni dei vincoli di propria competenza. Un sistema di travi soggetto a un sistema di forze esterne è detto *equilibrato* se esiste un insieme di reazioni vincolari ammissibili che rendano *equilibrate tutte le parti del sistema svincolato*. Si osservi che tale definizione è compatibile con l'esistenza di più sistemi di reazioni vincolari ammissibili equilibranti le date forze esterne.

Un sistema di travi equilibrato è detto *staticamente determinato* se le reazioni vincolari sono univocamente determinate dalle equazioni di equilibrio, in caso contrario il sistema è detto *staticamente indeterminato*. Si consideri poi che tutte le parti in cui può essere divisa una parte continua monoconnessa soggetta a forze equilibrate sono staticamente determinate dalle forze esterne, nel senso che esistono delle caratteristiche della sollecitazione univocamente determinate dalle equazioni di equilibrio che le rendono equilibrate. Ne consegue allora che se un sistema di travi è staticamente determinato per quel che riguarda le reazioni dei vincoli interni ed esterni lo è anche per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione.

La labilità di un sistema di travi non dipende dalle forze applicate, ma solo dalla sua cinematica infinitesima. Un sistema di travi labile può essere equilibrato se soggetto a certe forze esterne mentre può essere non equilibrato se soggetto ad altre forze. In quest'ultimo caso si dice che le forze *mettono in gioco la labilità del sistema*. La trave su un appoggio

fisso e un carrello di fig. 1.14a, caricata da una forza verticale in corrispondenza del carrello, e la trave su tre carrelli di fig. 1.14b, soggetta ad una

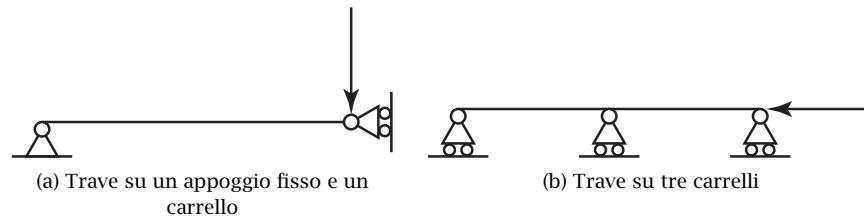


Figura 1.14: Esempi di travi labili non equilibrate

forza orizzontale, sono due semplici esempi di sistemi di travi labili non equilibrati.

Dalla dualità statico-cinematica, come sarà discusso e dimostrato nel seguito, conseguono delle corrispondenze tra le proprietà cinematiche e quelle statiche. La prima corrispondenza è quella tra *non labilità e equilibrio*: i sistemi di travi non labili, in particolare i sistemi isostatici, sono sempre equilibrati, qualunque siano le forze esterne applicate. La seconda corrispondenza è quella tra *non iperstaticità e determinazione statica*: i sistemi di travi equilibrati non iperstatici, in particolare i sistemi isostatici, sono sempre staticamente determinati. La terza corrispondenza è quella tra *iperstaticità e indeterminazione statica*: i sistemi equilibrati iperstatici, in particolare i sistemi non labili iperstatici, sono sempre staticamente indeterminati. In particolare, un numero di reazioni vincolari pari al grado i di iperstaticità resta indeterminato.

1.4 Dualità statico-cinematica dei sistemi di travi

Scopo del presente paragrafo è innanzitutto quello di dimostrare l'esistenza del grado di iperstaticità e di determinare in generale i gradi di labilità e di iperstaticità di un sistema di travi vincolate tra loro e con l'esterno, in generale in una data configurazione che coincide obbligatoriamente con quella indeformata sia nel caso di travi rigide che nel caso di travi deformabili nell'ambito di una teoria del primo ordine. In secondo luogo è quello di dimostrare la dualità statico-cinematica dalla quale derivano immediatamente le proprietà statiche enunciate nel precedente paragrafo. In

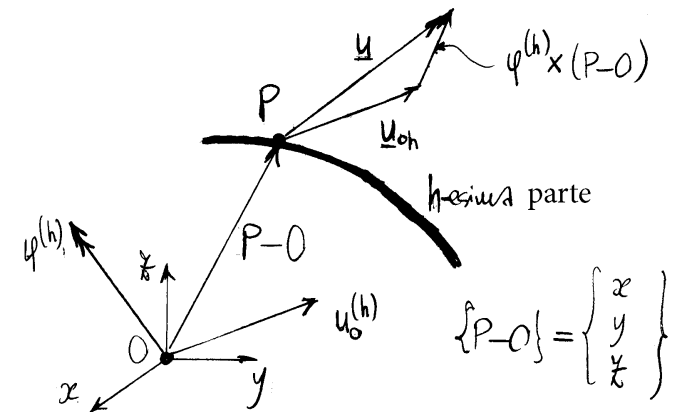
terzo luogo è quella di enunciare il principio dei lavori virtuali per i sistemi vincolati e di dimostrarne l'equivalenza con l'equilibrio degli stessi sistemi.

1.4.1 Matrice cinematica

Siano n il numero di parti continue del sistema di travi connesse tra loro da vincoli interni, v il numero di vincoli semplici interni ed esterni e g il numero dei gradi di libertà del sistema svincolato. Si ricordi che nei riguardi dei soli campi di spostamenti rigidi infinitesimi un corpo ha 6 gradi di libertà nello spazio e 3 gradi di libertà nel piano e ne risulta, come già visto:

$$g = \begin{cases} 6n & \text{nel caso spaziale,} \\ 3n & \text{nel caso piano.} \end{cases}$$

Si utilizzerà inoltre un sistema esterno di coordinate $Oxyz$ cartesiane ortogonali per valutare le coordinate dei punti del sistema di travi e le componenti dei vettori spostamento e rotazione mentre il centro degli assi O sarà utilizzato quale polo sia cinematico che statico. Quindi il campo de-



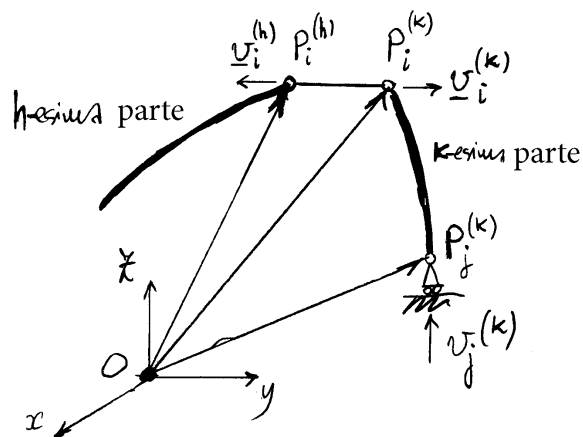
gli spostamenti rigidi infinitesimi di una qualunque parte del sistema sarà descritto da una rototraslazione di polo O , mentre i momenti delle forze agenti sulla stessa parte saranno valutati rispetto allo stesso polo.

Detto P un qualunque punto dello spazio, il campo degli spostamenti rigidi infinitesimi della h -esima parte del sistema di travi si può allora esprimere nella forma:

$$\underline{u} = \underline{u}_0^{(h)} + \underline{\varphi}^{(h)} \times (\underline{P} - \underline{O}),$$

dove $\underline{u}_0^{(h)}$ è lo spostamento del punto O e $\underline{\varphi}^{(h)}$ è il vettore rotazione della parte h -esima, indipendente da O .

Si consideri il generico vincolo (rigido) semplice i -esimo esterno od interno, agente sulla parte h nel punto $P_i^{(h)}$. Sia $\underline{v}_i^{(h)}$ un versore della direzione dello spostamento generalizzato



(spostamento o rotazione) impedito dal vincolo.

Se il vincolo i -esimo è interno, agente sulle parti h -esima e k -esima in corrispondenza dei punti $P_i^{(h)}$ e

$P_i^{(k)}$, il verso dei versori $\underline{v}_i^{(h)}$ e $\underline{v}_i^{(k)}$ verrà scelto in modo tale che risulti:

$$\underline{v}_i^{(k)} = -\underline{v}_i^{(h)}.$$

Si svincolino ora le diverse parti componenti il sistema. Se con $\tau_i^{(h)}$ si indica la componente dello spostamento generalizzato del punto $P_i^{(h)}$ nella direzione e nel verso di $\underline{v}_i^{(h)}$, risulta:

$$\tau_i^{(h)} = \left\{ \underline{u}_0^{(h)} + \underline{\varphi}^{(h)} \times (\underline{P}_i^{(h)} - \underline{O}) \right\} \cdot \underline{v}_i^{(h)}, \quad (1a)$$

se $\underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta uno spostamento, oppure:

$$\tau_i^{(h)} = \underline{\varphi}^{(h)} \cdot \underline{v}_i^{(h)}, \quad (1b)$$

se $\underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta una rotazione.

Detto $\underline{r}$ il vettore degli spostamenti (generalizzati) impediti dai vincoli, di dimensione pari al numero ν dei vincoli, risulta:

$$\tau_i = \tau_i^{(h)}, \quad (2a)$$

se il vincolo i -esimo è esterno (applicato alla parte h -esima), oppure:

$$r_i = r_i^{(h)} + r_i^{(k)}, \quad (2b)$$

se il vincolo i -esimo è interno (applicato alle parti h -esima e k -esima).

Nota che se il vincolo i -esimo è interno, $r_i \underline{v}_i^{(h)}$ rappresenta lo spostamento relativo di h rispetto a k e viceversa per $r_i \underline{v}_i^{(k)}$.

Sia poi $\underline{s}$ il vettore degli spostamenti indipendenti (Lagrangiane) del sistema svincolato, di dimensione $g = 6n$:

$$\underline{s} = \begin{Bmatrix} \underline{s}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(n)} \end{Bmatrix},$$

dove il generico vettore $\underline{s}^{(h)}$, di dimensione 6, contiene le 3 componenti dello spostamento $\underline{u}_o^{(h)}$ e le tre componenti della rotazione $\underline{\varphi}^{(h)}$:

$$\underline{s}^{(h)} = \begin{Bmatrix} u_{o1}^{(h)} \\ u_{o2}^{(h)} \\ u_{o3}^{(h)} \\ \varphi_1^{(h)} \\ \varphi_2^{(h)} \\ \varphi_3^{(h)} \end{Bmatrix}.$$

Poiché le equazioni (2) sono lineari, possono allora essere scritte in forma algebrica nella forma seguente:

$$r = \underline{A} \underline{s}, \quad (3)$$

dove la matrice $\underline{A}$, di dimensione $v \times g$, è detta matrice cinematica.

1.4.2 Gradi di labilità e di iperstaticità

Nel sistema vincolato $r = 0$. La (3) rappresenta allora un sistema omogeneo di v equazioni nelle g incognite $\underline{s}$.

Si può allora affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni

$$\underline{A} \underline{s} = \underline{0},$$

abbia $\underline{s} = \underline{0}$ quale unica soluzione, ovvero affinché il sistema di travi non sia labile, è che la caratteristica C_A della matrice $\underline{A}$ sia uguale a g :

$$C_A = g.$$

Poiché $v \geq C_A$ è evidente che deve necessariamente essere $v \geq g$ affinché il sistema di travi non sia labile.

Le righe di $\underline{A}$ rappresentano i vincoli. Se una riga di $\underline{A}$ è ottenuta per combinazione lineare delle altre righe, il corrispondente vincolo è inessenziale (cioè è un vincolo iperstatico). Il numero

$$\begin{matrix} v \\ \boxed{\underline{A}} \\ g \end{matrix} \begin{matrix} \left\{ \underline{s} \right\} \\ g \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \underline{0} \right\} \\ g \end{matrix}$$

di righe di $\underline{A}$ linearmente dipendenti coincide quindi con il grado di iperstaticità i del sistema. La caratteristica della matrice $\underline{A}$ rappresenta il numero di righe linearmente indipendenti:

$$c_A = v - i.$$

Ne risulta che il grado di iperstaticità i vale:

$$i = v - c_A,$$

e che il sistema di travi non è labile se e solo se:

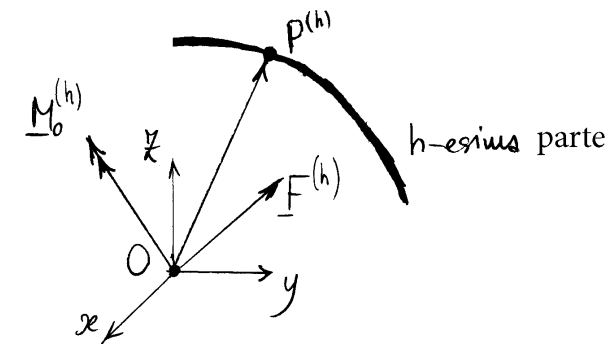
$$g = v - i.$$

Se $g > v - i = c_A$ il numero $g - c_A$ rappresenta il numero di soluzioni $s \neq 0$ linearmente indipendenti del sistema omogeneo $A s = 0$, cioè rappresenta i gradi di labilità del sistema:

$$l = g - c_A = g - (v - i).$$

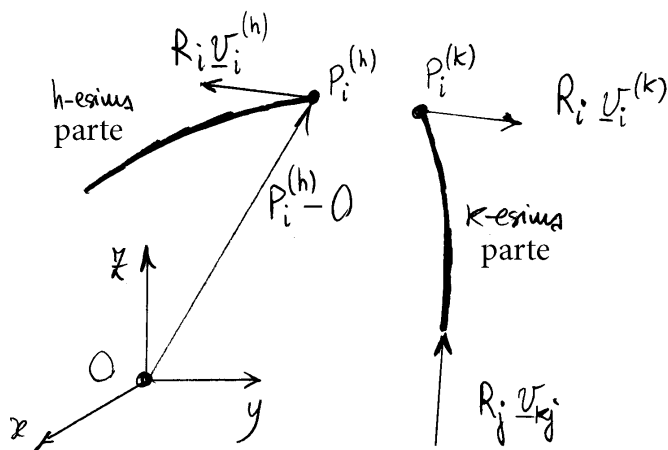
1.4.3 Matrice statica

Sia dato un sistema di n parti rigide e un sistema di coordinate $Oxyz$.



Siano $\underline{F}^{(h)}$ e $\underline{M}_o^{(h)}$ rispettivamente risultante e momento risultante rispetto al polo O delle forze esterne applicate alla h -esima trave. Detta poi R_i la componente della i -esima reazione, in direzione e verso di $\underline{v}_i^{(h)}$, le equazioni vettoriali di equilibrio della parte h -esima si scrivano:

$$\begin{cases} \underline{F}^{(h)} + \sum_{\text{Ri forza}} R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \\ \underline{M}_o^{(h)} + \sum_{\text{Ri coppia}} R_i \underline{v}_i^{(h)} + \sum_{\text{Ri forza}} (\underline{P}_i^{(h)} - O) \times R_i \underline{v}_i^{(h)} = \underline{0} \end{cases}, \quad (6)$$



$$\underline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{S}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(h)} \\ \vdots \\ \underline{S}^{(n)} \end{array} \right\},$$

dove il vettore $\underline{S}^{(h)}$, di dimensione 6, contiene le componenti della risultante e del momento risultante relativi alla trave h-esima:

$$\underline{S}^{(h)} = \left\{ \begin{array}{c} F_x^{(h)} \\ F_y^{(h)} \\ F_z^{(h)} \\ M_{0x}^{(h)} \\ M_{0y}^{(h)} \\ M_{0z}^{(h)} \end{array} \right\}.$$

Dalla (6) si ottiene allora:

$$\underline{B} \underline{R} + \underline{S} = \underline{0}, \quad (7)$$

dove la matrice $\underline{B}$, di dimensione $g \times v$, è detta matrice statica.

dove le sommatorie sono limitate ai vincoli che agiscono sulla h-esima parte.

Si introducano il vettore delle reazioni vincolari (generalizzate):

$$\underline{R} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \\ \vdots \\ R_v \end{array} \right\},$$

di dimensione v , pari al numero di vincoli semplici esterni ed interni, e il vettore delle forze applicate (generalizzate), di dimensione $g = 6n$, pari ai gradi di libertà del sistema svincolato:

1.4.4 Equilibrio di un sistema di travi

La (7) rappresenta un sistema di g equazioni nelle v incognite $\underline{R}$ e di termine noto il vettore $-\underline{S}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni (7) nelle incognite $\underline{R}$ ammetta soluzione, ovvero affinché il sistema di travi sia equilibrato sotto l'azione delle forze $\underline{S}$, è che la caratteristica c_B di $\underline{B}$ coincida con la caratteristica c_0 della matrice $\underline{B}_0$, di dimensione $g \times (v+1)$, che si ottiene dalla $\underline{B}$ aggiungendo al vettore $\underline{S}$:

$$c_B = c_0.$$

$$\underline{B}_0 \equiv \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} v \quad + \quad 1 \\ \hline \underline{B} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{S} \\ \hline \end{array} \\ \hline g \end{array}$$

1.4.5 Relazione tra la matrice statica e quella cinematica

Vogliamo ora mostrare che :

$$\underline{B} = \underline{A}^T.$$

Infatti siano $\underline{R}$ e $\underline{s}$ due vettori qualunque e si consideri il sistema di travi svincolato. Se si pone:

$$(6) \quad \begin{aligned} \underline{S} &= -\underline{B} \underline{R}, \\ \underline{r} &= \underline{A} \underline{s}, \end{aligned}$$

il sistema di forze $\underline{R}$, $\underline{S}$ è equilibrato e il sistema di spostamenti $\underline{r}$, $\underline{s}$ è congruente per il sistema svincolato. Quindi, per il principio dei lavori virtuali applicato alle singole travi svincolate, deve essere:

$$L_e + L_R = 0,$$

dove L_e rappresenta il lavoro di tutte le forze

esterne applicate :

$$L_e = \underline{S}^T \underline{s},$$

mentre L_R rappresenta il lavoro delle reazioni vincolari:

$$L_R = \underline{R}^T \underline{r}.$$

Tenere presente che se $\underline{r} \neq 0$ le reazioni vincolari lavorano e che il sistema $\underline{s}$, $\underline{r}$ è congruente per il sistema libero, ma non lo è, ingenuo, per quello vincolato.

Risulta, utilizzando le (6) :

$$\begin{aligned} L_e + L_R &= \underline{S}^T \underline{s} + \underline{R}^T \underline{r} \\ &= - \underline{R}^T \underline{B}^T \underline{s} + \underline{R}^T \underline{A} \underline{s} \\ &= \underline{R}^T (\underline{A} - \underline{B}^T) \underline{s} = \underline{0}, \end{aligned}$$

per ogni vettore $\underline{R}$ e $\underline{s}$ e quindi $\underline{A} - \underline{B}^T = \underline{0}$,

come volevasi dimostrare.

1.4.6 Equilibrio e indeterminazione statica

Una conseguenza di tale proprietà è che

$$C_B = C_A = v - i.$$

Nel caso di struttura labile, cioè se :

$$g > v - i = C_B,$$

l'equilibrio dipende dalle forze $\underline{S}$ (si ha equilibrio se $\underline{S}$ è linearmente dipendente dai $v-i$ vincoli efficaci).

Se invece il sistema di travi non è labile l'equilibrio è sempre possibile poiché in tal caso

$$g = C_A = v - i \leq v,$$

e la caratteristica della matrice orlata $\underline{B}_0$ risulta

$$\begin{array}{c} g \\ \boxed{\underline{B}} \\ v \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \underline{R} \\ \vdots \\ \underline{r} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \underline{S} \\ \vdots \\ \underline{s} \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \end{array} \right\}_g$$

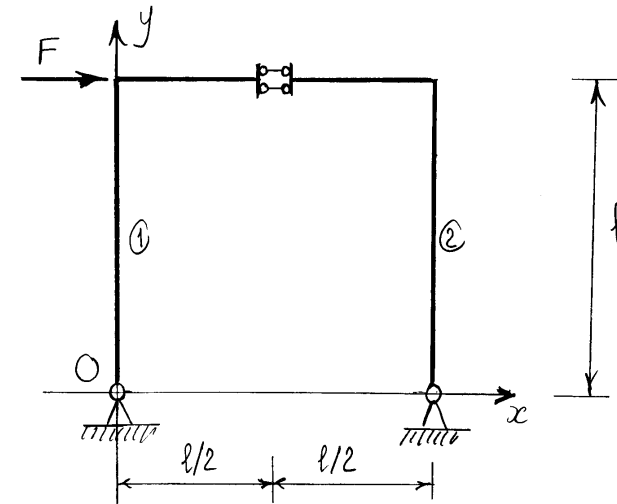
necessariamente pari a g , indipendentemente da $\underline{S}$.

Se $i=0$ e $g=v$ il sistema di travi è isostatico e il sistema di equazioni (5) ammette una e una sola soluzione. Se invece $i=0$ e $g > v$ il sistema di travi è labile e la (5) ammette una e una sola soluzione nel caso $C_0 = C_B$, mentre non ammette soluzioni se $C_0 = C_B + 1$.

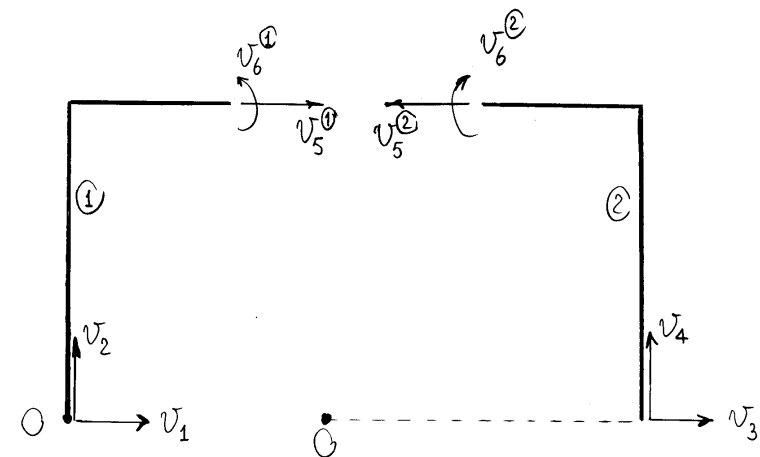
Se $i \neq 0$ e $g = v - i$, il sistema di travi è iperstatico e il sistema di equazioni (5) ammette ∞^i soluzioni, cioè il numero di soluzioni linearmente indipendenti (grado di indeterminazione statica) è pari al grado di iperstaticità i .

Se $i \neq 0$ e $g > v - i$ la struttura è labile e il sistema di equazioni (5) ammette ∞^i soluzioni se $C_0 = C_B$ mentre non ammette soluzioni se $C_0 = C_B + 1$.

1.4.7 Esempio sull'analisi statica e cinematica



Analisi cinematica



$$\begin{cases} \chi_1 = u_x^{\textcircled{1}} \\ \chi_2 = u_y^{\textcircled{1}} \\ \chi_3 = u_x^{\textcircled{2}} \\ \chi_4 = u_y^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \chi_5 = u_x^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{1}} l - u_x^{\textcircled{2}} + \varphi^{\textcircled{2}} l \\ \chi_6 = \varphi^{\textcircled{1}} - \varphi^{\textcircled{2}} \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 1 & 0 & -l & -1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^{\textcircled{1}} \\ u_y^{\textcircled{1}} \\ \varphi^{\textcircled{1}} \\ u_x^{\textcircled{2}} \\ u_y^{\textcircled{2}} \\ \varphi^{\textcircled{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

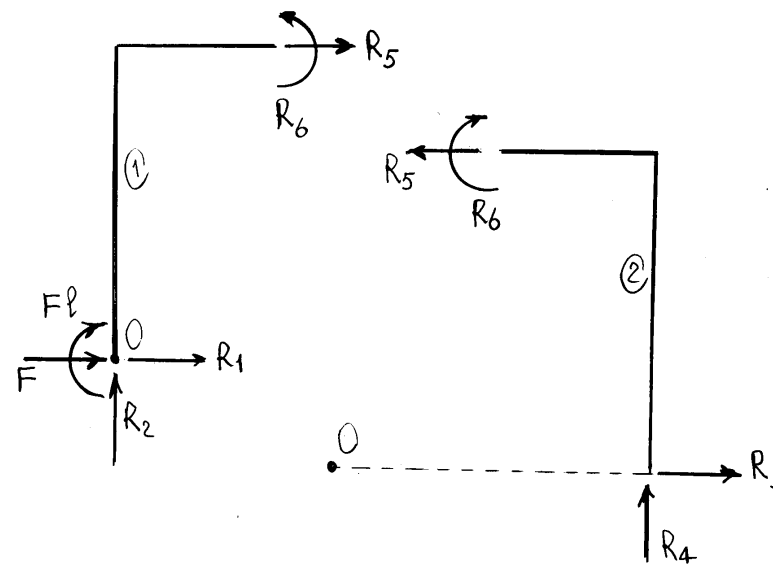
Quale centro di riduzione è stato utilizzato il punto O, sia per il corpo rigido ① che per quello ②. Si noti che la matrice cinematica ha determinante nullo e che quindi il sistema di equazioni ammette soluzioni non nulle.

In fatti :

$$1^{\text{a}} \text{ riga} - 3^{\text{a}} \text{ riga} - 5^{\text{a}} \text{ riga} = (6^{\text{a}} \text{ riga}) l$$

e dunque le righe della matrice cinematica non sono linearmente indipendenti.

Analisi statica



Scrivendo le equazioni di equilibrio con riduzione il punto O per entrambi i corpi rigidi si ottiene:

$$\begin{cases} R_1 + R_5 + F = 0 \\ R_2 = 0 \\ -R_5 l + R_6 - F l = 0 \\ R_3 - R_5 = 0 \\ R_4 = 0 \\ R_4 l + R_5 l - R_6 = 0 \end{cases}$$

In notazioni matriciali:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & l & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ -Fl \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Resta dunque confermato che le matrici cinematiche e statiche sono l'una la trasposta dell'altra.

Inoltre:

$$(5^{\text{a}} \text{ riga}) l - 3^{\text{a}} \text{ riga} = 6^{\text{a}} \text{ riga}$$

$$0 \times l - (-Fl) \neq 0 \Rightarrow \text{sistema non equilibrato}$$

1.4.8 Principio dei lavori virtuali per i sistemi di travi vincolati

Per definizione le forze esterne applicate ad un sistema di travi vincolato con vincoli rigidi, bilaterali e privi di attrito soddisfa, in una data configurazione, il *principio dei lavori virtuali* se il lavoro virtuale L_{ve} delle sole forze esterne, con esclusione delle reazioni vincolari, è nullo per ogni campo di spostamenti rigidi virtuali compatibili con i vincoli interni ed esterni e definito nella stessa configurazione:

$$L_{ve} = 0. \quad (1.11)$$

Si ricorda inoltre che le stesse forze esterne applicate al dato sistema di travi nella data configurazione sono *equilibrate* se esiste un insieme di reazioni vincolari che rendono equilibrate tutte le parti continue del sistema di travi ottenute sconnettendo tutti i vincoli interni ed esterni.

Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio delle forze. Un dato sistema di travi vincolato con vincoli rigidi, bilaterali e privi di attrito e soggetto a date forze esterne è equilibrato in una data configurazione se e solo se soddisfa il principio dei lavori virtuali.

Dimostrazione.

1) Necessità: Per ipotesi $\underline{r} = \underline{A} \underline{s} = \underline{0}$ e, dunque, il lavoro L_R delle reazioni vincolari, che vale $\underline{R}^T \underline{r}$, è nullo. Quindi $L_e = 0$.

2) Sufficienza

Sia quindi $L_e = 0$ per ogni sistema di spostamenti congruente con i vincoli di rigidità e i vincoli interni ed esterni, quindi tale che $r = 0$, cioè:

$$(7) \quad \underline{A} \underline{s} = \underline{0}.$$

Vogliamo mostrare allora che il sistema di forze è equilibrato, cioè che in corrispondenza del sistema di forze esterne $\underline{S}$ è possibile determinare un sistema di reazioni $\underline{R}$ tale che:

$$\underline{B} \underline{R} + \underline{S} = \underline{0}.$$

Per un noto teorema di algebra ciò è senz'altro possibile se la matrice $\underline{B}$ e la

matrice $\underline{B}_0$ che si ottiene da $\underline{B}$ orlandata con i termini noti $\underline{S}$ hanno la stessa caratteristica.

$$\underline{B}_0 \equiv \left[\begin{array}{c|c} \underline{B} = \underline{A}^T & \underline{S} \end{array} \right]_g$$

$v + 1$

Risulta:

$$\begin{array}{c} 1 \\ v \end{array} \left[\begin{array}{c} \underline{S}^T \\ \underline{A} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{s} \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} \underline{S}^T \underline{s} \\ \underline{A} \underline{s} \end{array} \right\}_{(v+1)}.$$

$\underline{B}_0^T$

Poiché $\underline{S}^T \underline{s} = L_e = 0$ per ipotesi, e $\underline{A} \underline{s} = \underline{0}$ per congruenza si ha in definitiva:

$$(8) \quad \underline{B}_0^T \underline{s} = \underline{0}.$$

Se le (7) e (8) sono intesi come due sistemi di equazioni omogenei nelle incognite $\underline{s}$, questi due sistemi hanno le stesse soluzioni (che sono gli spostamenti $\underline{s}$ congruenti) e quindi $\underline{B}^T$ e $\underline{B}_0^T$ hanno la stessa caratteristica.

Questo per un altro teorema di algebra che dice:
 “Una matrice $\underline{M}$ e la sua orlata $\underline{M}_0$ che si ottiene aggiungendo un vettore riga alle righe di $\underline{M}$, hanno la stessa caratteristica se e solo se i due sistemi di equazioni omogenei associati:

$$\underline{M} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{e} \quad \underline{M}_0 \underline{x} = \underline{0},$$

nelle incognite $\underline{x}$ hanno le stesse soluzioni.”

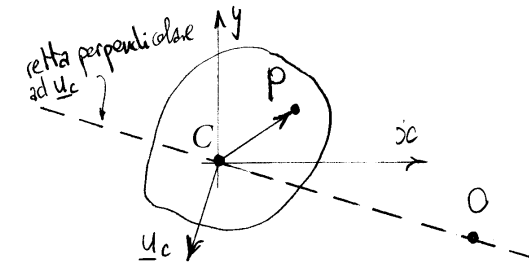
■

1.5 Cinematica rigida infinitesima di sistemi piani

1.5.1 Centri assoluti di rotazione

Sia dato un corpo vincolato a muoversi parallelamente ad un piano di normale $\underline{e}_z$. Un qualunque campo di spostamenti rigidi infinitesimi si può scomporre nella somma di una traslazione parallela al piano e di una rotazione di asse perpendicolare al piano:

$$\underline{u} = \underline{u}_c + \varphi \times (\underline{P} - \underline{C}), \quad \underline{\varphi} = \varphi \underline{e}_z.$$



L'equazione:

$$\underline{u}_c + \varphi \underline{e}_z \times (\underline{O} - \underline{C}) = \underline{0}, \quad (1)$$

sempre risolubile se $\varphi \neq 0$, individua il centro assoluto di rotazione $\underline{O}$, ossia quel punto che resta fisso nella trasformazione rigida.

Tenendo conto del fatto che $\underline{e}_x \times \underline{v}$, con $\underline{v}$ ortogonale a $\underline{e}_x$, rappresenta il vettore $\underline{v}$ ruotato di 90° in senso antiorario nel piano ortogonale a $\underline{e}_x$, si ha:

$$\underline{e}_x \times \{ \underline{e}_x \times (O-C) \} = -(O-C).$$

Premoltiplicando vettorialmente la (1) per $\underline{e}_x$ si ottiene allora:

$$O-C = \frac{1}{\varphi} \underline{e}_x \times \underline{u}_c.$$

In componenti:

$$O-C = \frac{1}{\varphi} \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ u_{cx} & u_{cy} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{u_{cy}}{\varphi} \\ \frac{u_{cx}}{\varphi} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

oppure:

$$\begin{cases} x_o = -u_{cy}/\varphi \\ y_o = u_{cx}/\varphi \end{cases}.$$

Se il centro assoluto è noto e P è un

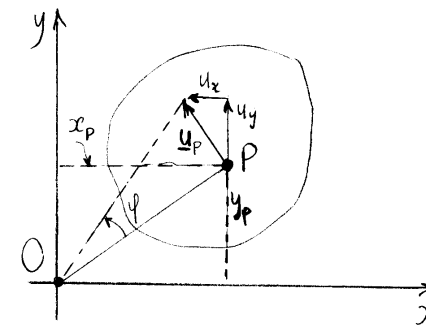
punto qualunque si ha:

$$\underline{u} = \underline{v} \times (P-O) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ 0 & 0 & \varphi \\ x_p & y_p & 0 \end{vmatrix},$$

e quindi:

$$\begin{cases} u_x = -\varphi y_p \\ u_y = \varphi x_p \end{cases}.$$

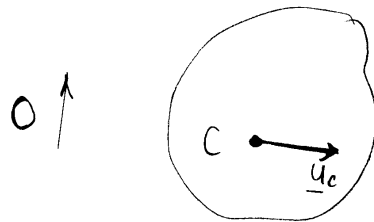
Si noti che lo spostamento di un punto avviene sempre perpendicolarmente alla congiungente del punto con il centro di rotazione.



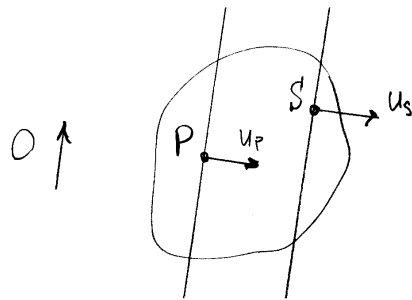
Se $\varphi = 0$, si ha una traslazione:

$$\underline{u} = \underline{u}_c = \text{cost}.$$

In tal caso lo spostamento di un punto avviene sempre perpendicolarmente ad una data direzione del piano, direzione che individua un punto improprio del piano che acquista quindi il ruolo di centro assoluto di rotazione. Tale direzione è individuata dalla direzione ortogonale ad $\underline{u}_c$.



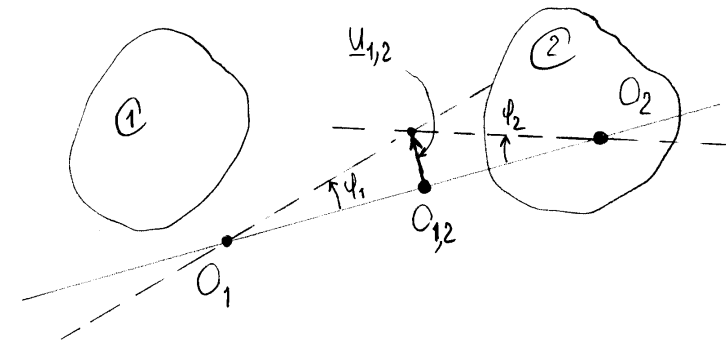
In altri termini, qualunque retta del fascio di rette parallele ortogonali ad $\underline{u}_c$ gode della proprietà di essere ortogonale allo spostamento di uno qualunque dei suoi punti; cioè gode della stessa proprietà di cui gode il fascio di rette proprio di sostegno il centro assoluto O nel caso $\underline{u} \neq 0$.



1.5.2 Centri relativi di rotazione

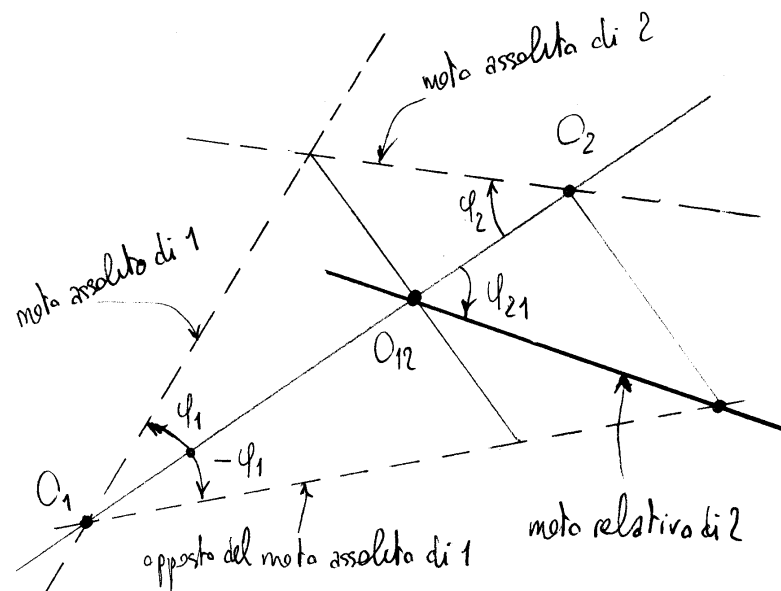
Siano ora dati due corpi vincolati a muoversi parallelamente ad un piano. Siano O_1 il centro assoluto di un campo di spostamenti rigidi infinitesimi del primo corpo e O_2 quello del secondo corpo, e per il momento sia $O_1 \neq O_2$. I campi di spostamenti rigidi infinitesimi dei due corpi risultano:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1), \quad \underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2).$$



I punti e solo i punti della congiungente O_1O_2 , ritenuti appartenenti allo spazio rigido del primo corpo e poi allo spazio rigido del secondo, subiscono per effetto delle due trasformazioni rigide infinitesime uno spostamento nella stessa direzione e solo uno di tali punti, detto *centro relativo*, subisce lo stesso spostamento per effetto dei due campi di spostamento. Se i campi di spostamento vengono descritti da un osservatore connesso ad uno dei due corpi, per esempio il primo corpo, il secondo corpo appare avere il centro relativo $O_{1,2}$ quale centro assoluto di rotazione. Tale descrizione può ottenersi sovrapponendo ai due campi di spostamenti un unico campo di spostamento pari a quello associato ad uno dei due corpi cambiato di segno:

$$\underline{u} = \underline{\varphi}_2 \times (P - O_2) - \underline{\varphi}_1 \times (P - O_1).$$



Annullando tale espressione si ottiene il centro relativo:

$$\underline{\varphi}_2 \times (O_{12} - O_2) - \underline{\varphi}_1 \times (O_{12} - O_1) = 0.$$

Poiché, come detto, il centro relativo è necessariamente allineato con i centri assoluti, si può porre:

$$\begin{cases} O_{12} - O_1 = \alpha (O_2 - O_1) \\ O_{12} - O_2 = \beta (O_2 - O_1) \end{cases},$$

$$O_2 - O_1 = (\alpha - \beta)(O_2 - O_1) \Rightarrow \alpha - \beta = 1.$$

Risultato:

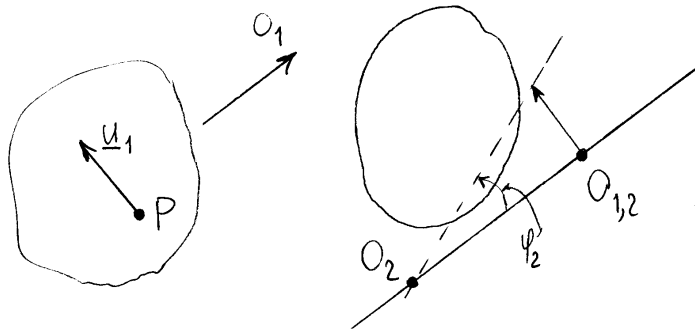
$$\beta \varphi_2 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) - \alpha \varphi_1 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) = 0,$$

$$\alpha \varphi_1 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1) = (\alpha - 1) \varphi_2 \underline{e}_z \times (O_2 - O_1),$$

cioè:

$$\alpha \varphi_1 = (\alpha - 1) \varphi_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Se il primo dei due corpi subisce una traslazione, il centro relativo giace sulla perpendicolare allo spostamento del primo dei due corpi tracciata per



il centro assoluto del secondo corpo, cioè giace ancora sulla congiungente i due centri assoluti O_1 e O_2 dei quali il primo è improprio.

Campo relativo di spostamenti:

$$\underline{u} = \varphi_2 \times (P - O_2) - \underline{u}_1.$$

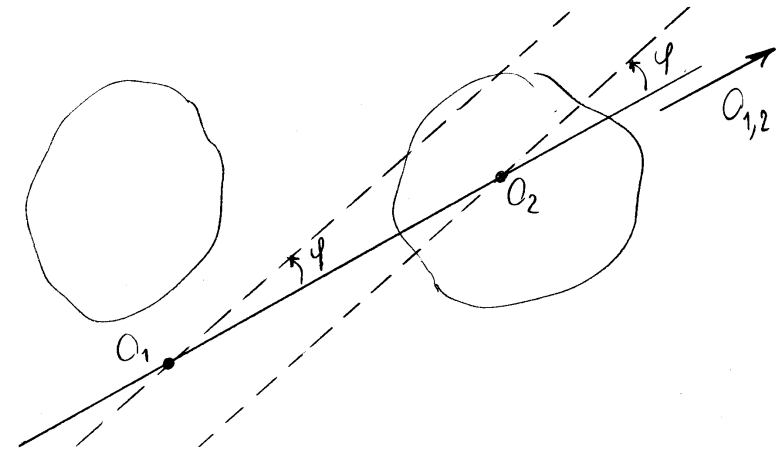
Risulta quindi:

$$\varphi_2 \times (O_{1,2} - O_2) = \underline{u}_1, \quad |O_{1,2} - O_2| = \frac{|\underline{u}_1|}{\varphi_2}.$$

Se $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, il campo relativo assume l'espressione:

$$\underline{u} = \varphi \times (O_1 - O_2) = \text{cost}.$$

Tale espressione rappresenta una traslazione ortogonale alla congiungente $O_1 O_2$. Ne risulta quindi un



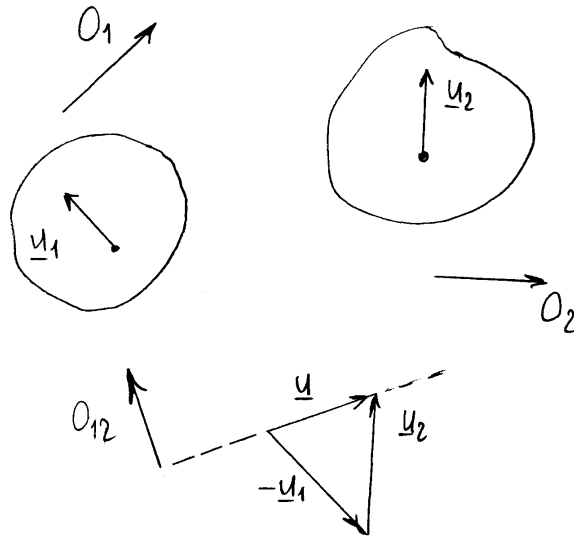
centro relativo improprio individuata dalla direzione della congiungente $\overline{O_1 O_2}$, ancora allineata con i centri assoluti.

Se tutti e due i campi di spostamento sono delle traslazioni, cioè se tutti e due i centri relativi sono impropri, anche il campo degli spostamenti relativi è una traslazione:

$$\underline{u} = \underline{u}_2 - \underline{u}_1.$$

Essendo tutti i centri impropri, il centro relativo è ancora allineato con i centri assoluti (allineamento lungo la retta impropria).

Supponiamo ora che $O_1 = O_2 = O$. Nel caso di O proprio, se i due corpi subiscono una rotazione di ampiezza diversa allora anche la rotazione



relativa avviene attorno allo stesso centro e risulta $O_{1,2} = O$. In caso contrario non vi sono spostamenti relativi e non esiste centro relativo. Nel caso di O improprio, se i due corpi subiscono una traslazione di ampiezza diversa allora anche la traslazione relativa avviene nella stessa direzione e risulta, come nel caso precedente, $O_{1,2} = O$. In caso contrario non vi sono spostamenti relativi e non esiste centro relativo.

1.5.3 Implicazioni dell'esistenza di campi di spostamenti rigidi infinitesimi

Nel seguito si riassumono le condizioni che devono essere soddisfatte sotto l'ipotesi di esistenza di due campi di spostamenti rigidi infinitesimi, associati ognuno a un corpo diverso.

1. Tenuto conto del fatto che un campo di spostamenti rigidi infinitesimi definisce uno e un solo centro assoluto di rotazione, due campi definiscono in modo univoco due centri assoluti O_1 e O_2 eventualmente coincidenti.
2. Se i due campi di spostamenti rigidi infinitesimi sono distinti viene

definito anche il centro relativo $O_{1,2}$ del campo di spostamenti rigidi relativo. D'altronde se i due campi sono coincidenti i due centri assoluti coincidono necessariamente:

$$O_1 = O_2, \quad (1.12)$$

e il centro relativo non esiste.

3. Se i due campi di spostamenti rigidi infinitesimi sono distinti, i tre centri, che necessariamente esistono, sono tutti e tre distinti e allineati:

$$O_1 \neq O_2 \neq O_{1,2} \quad \text{e} \quad O_1, O_2, O_{1,2} \text{ allineati} \quad (1.13)$$

oppure tutti e tre coincidenti:

$$O_1 = O_2 = O_{1,2}. \quad (1.14)$$

4. Se il primo dei due campi è nullo, il suo centro assoluto non esiste mentre il centro assoluto del secondo coincide con il centro relativo:

$$O_1 \text{ non esiste} \quad \Rightarrow \quad O_2 = O_{1,2}, \quad (1.15)$$

poiché in tal caso il campo di spostamenti rigidi relativi del secondo corpo rispetto al primo deve coincidere con il campo di spostamenti rigidi assoluto del secondo corpo.

1.5.4 Allineamento dei centri relativi di tre corpi

Siano dati tre campi di spostamenti rigidi infinitesimi distinti, associati ai tre corpi I, II e III. Questo implica l'esistenza dei tre centri relativi $O_{1,2}$, $O_{1,3}$ e $O_{2,3}$ corrispondenti ai tre campi di spostamenti rigidi infinitesimi relativi, ciascuno per ogni coppia di corpi. Si vuole mostrare nel seguito che i tre centri relativi sono tutti e tre distinti e allineati:

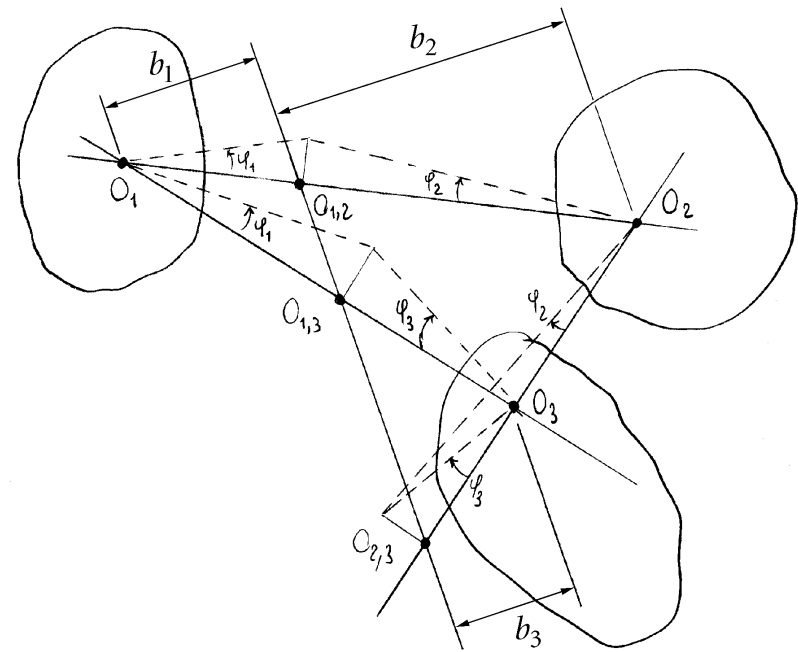
$$O_{1,2} \neq O_{1,3} \neq O_{2,3} \quad \text{e} \quad O_{1,2}, O_{1,3}, O_{2,3} \text{ allineati}, \quad (1.16)$$

oppure tutti e tre coincidenti:

$$O_{1,2} = O_{1,3} = O_{2,3}. \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Infatti si sovrappongono ai tre campi di spostamenti il campo di spostamenti del primo corpo cambiato di segno. Il risultato è che il campo associato al primo corpo si annulla, che il centro assoluto degli altri due campi coincidono con $O_{1,2}$ e $O_{1,3}$ e che il centro relativo dei campi associati ai corpi II e III risulta ancora essere $O_{2,3}$. Poiché i centri assoluti e relativo associati a due campi devono essere distinti e allineati oppure tutti e tre coincidenti, l'asserto è dimostrato. ■

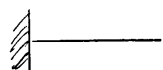
Si noti che se si fissano a priori tre centri assoluti e tre centri relativi soddisfacenti gli allineamenti tra due centri assoluti qualsiasi e il corrispondente centro relativo e l'allineamento tra i tre centri relativi, allora, fissata a priori la rotazione, per esempio φ_1 , di uno dei tre corpi, sono deducibili in catena le altre due rotazioni, nell'esempio φ_2 e φ_3 . Precisamente, φ_1 determina φ_2 appoggiandosi sui punti $O_1, O_{1,2}$ e O_2 mentre φ_2 determina φ_3 appoggiandosi ai punti $O_2, O_{2,3}$ e O_3 . Le rotazioni φ_1 e φ_3 sono senz'altro in armonia fra loro. Infatti lo spostamento di $O_{2,3}$ lungo l'allineamento dei



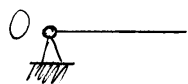
centri relativi calcolato tramite φ_2 vale $\varphi_2 b_2$, e tale quantità, per come è stata determinata φ_2 , uguaglia $\varphi_1 b_1$, che rappresenta anche lo spostamento di $O_{2,3}$ lungo l'allineamento dei centri relativi calcolato tramite φ_1 .

1.5.5 Vincoli e centri di rotazione

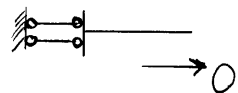
Vincoli esterni e centri assoluti:



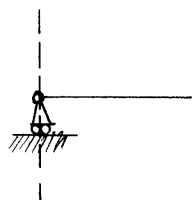
non esiste



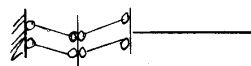
coincide con il punto vincolato



coincide con il punto improprio della direzione dei pendoli

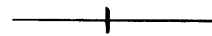


giace sulla retta passante per il punto vincolato e perpendicolare al piano di scorrimento del carrello

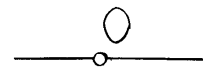


e' un punto improprio

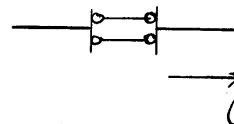
Vincoli interni e centri relativi:



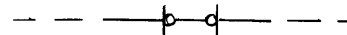
non esiste



coincide con il punto vincolato



coincide con il punto improprio della direzione dei pendoli



giace sulla retta contenente l'asse del pendolo



e' un punto improprio

1.5.6 Analisi dei casi possibili

Se i vincoli impongono che il centro assoluto O_1 del campo di spostamenti rigidi infinitesimi di un corpo coincida con due distinti punti del piano allora non esiste nessun campo di spostamenti e il centro assoluto non esiste.

Se i vincoli impongono che il centro relativo $O_{1,2}$ dei campi di spostamento di due corpi coincida con due distinti punti del piano allora i due corpi non possono subire spostamenti rigidi relativi, il centro relativo non esiste e i campi di spostamenti dei due corpi devono essere coincidenti:

$$O_1 = O_2. \quad (1.18)$$

Se i vincoli impongono la non coincidenza ed escludono l'allineamento dei centri assoluti e del centro relativo corrispondenti agli ipotetici campi di spostamenti dei due corpi allora i centri assoluti e quello relativo non esistono o, in altri termini, i due corpi non possono subire spostamenti rigidi infinitesimi rispetto all'osservatore esterno:

$$\begin{aligned} O_1, O_2 \text{ e } O_{12} \text{ distinti e non allineati} \\ \Rightarrow O_1, O_2 \text{ e } O_{12} \text{ non esistono.} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se i vincoli impongono la non coincidenza ed escludono l'allineamento dei centri relativi corrispondenti agli ipotetici campi di spostamento relativi di tre corpi allora i centri relativi non esistono o, in altri termini, i campi di spostamento dei tre corpi coincidono:

$$\begin{aligned} O_{1,2}, O_{1,3} \text{ e } O_{2,3} \text{ distinti e non allineati} \\ \Rightarrow O_{1,2}, O_{1,3} \text{ e } O_{2,3} \text{ non esistono.} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Se i vincoli impongono la coincidenza dei due centri assoluti ma non del centro relativo corrispondenti agli ipotetici moti di due corpi allora il centro relativo non esiste o, in altri termini, il moto relativo non è possibile:

$$O_1 = O_2 \neq O_{1,2} \Rightarrow O_{1,2} \text{ non esiste.} \quad (1.21)$$

Se i vincoli impongono la coincidenza di un centro assoluto e del centro relativo ma non dell'altro centro assoluto corrispondenti agli ipotetici campi di spostamenti di due corpi allora il centro assoluto del secondo corpo

non esiste o, in altri termini, il campo di spostamenti del secondo corpo non è possibile:

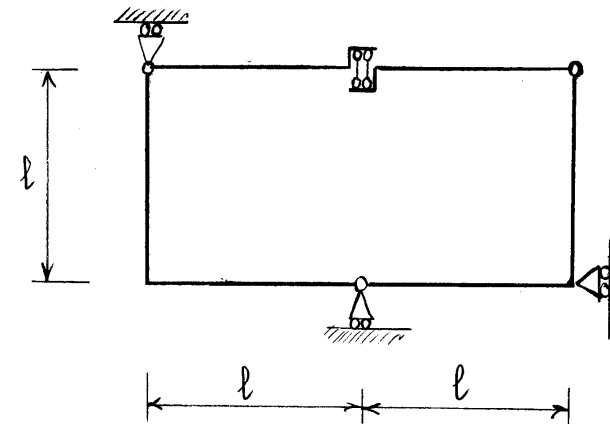
$$O_1 = O_{1,2} \neq O_2 \Rightarrow O_2 \text{ non esiste.} \quad (1.22)$$

Se i vincoli impongono la coincidenza di due centri relativi ma non del terzo corrispondenti agli ipotetici campi di spostamenti relativi di tre corpi allora il terzo centro relativo non esiste o, in altri termini, il campo di spostamenti relativi corrispondente al terzo centro non è possibile:

$$O_{1,2} = O_{1,3} \neq O_{2,3} \Rightarrow O_{2,3} \text{ non esiste.} \quad (1.23)$$

1.5.7 Analisi di un sistema chiuso

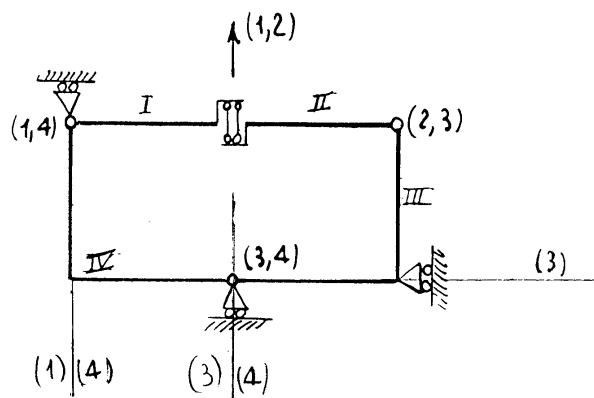
Determinare il grado di labilità del seguente sistema di travi:



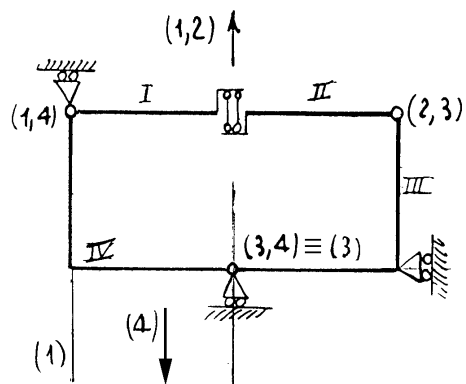
$$g = 4 \times 3 = 12, \quad v = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{carrello}}}{3 \times 1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cerniera}}}{3 \times 2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{doppio pendolo}}}{1 \times 2} = 11$$

Vediamo di calcolare ℓ attraverso la determinazione dei centri assoluti e relativi.

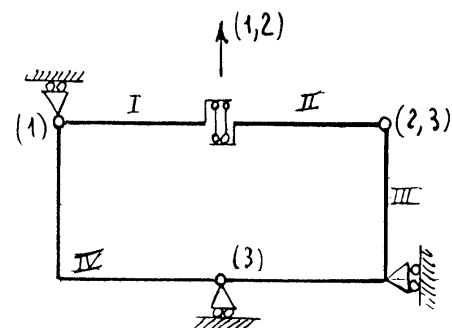
Condizioni dovute ai vincoli:



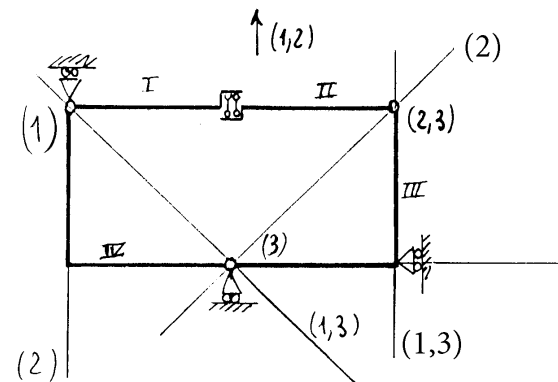
Due condizioni su (4) e su (3):



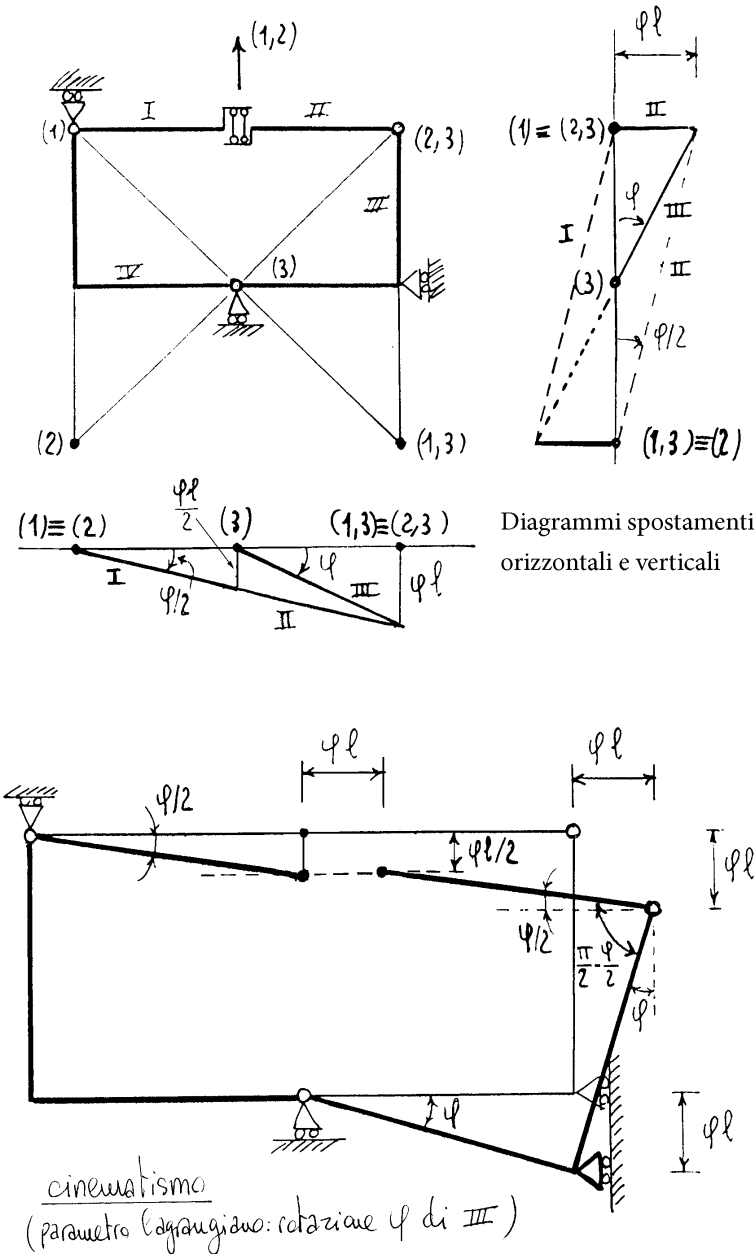
$(3) = (3,4) \neq (4) \Rightarrow (4)$ non esiste:



Allineamenti tra $(1), (1,2), (2)$, tra $(1), (1,3), (3)$, tra $(2), (2,3), (3)$ e tra $(1,2), (2,3), (4,3)$:



Due condizioni su (2) e (1,3):

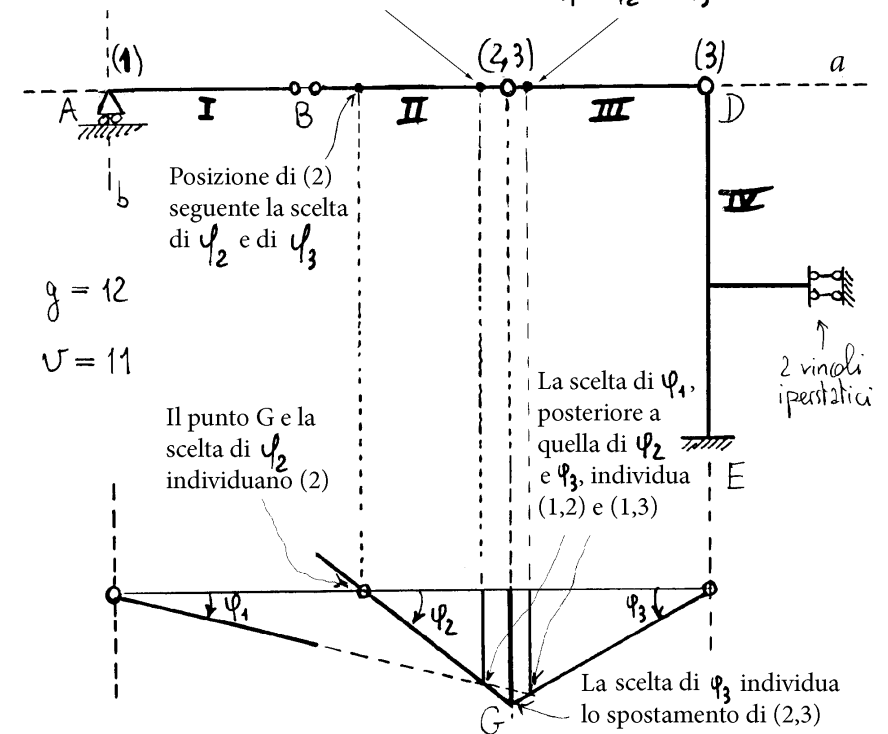


I centri assoluti e relativi sono univocamente determinati. La struttura è una volta labile ($\ell = 1$) e non è iperstatica ($i = 0$).

1.5.8 Analisi di un sistema più volte labile

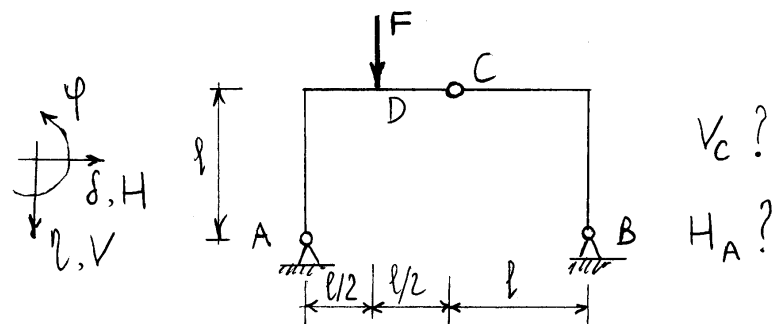
(2), (1,2) e (1,3) posizionati sulla retta a

(1,2) e (1,3) posizionati dalla scelta di φ_1 , φ_2 e φ_3

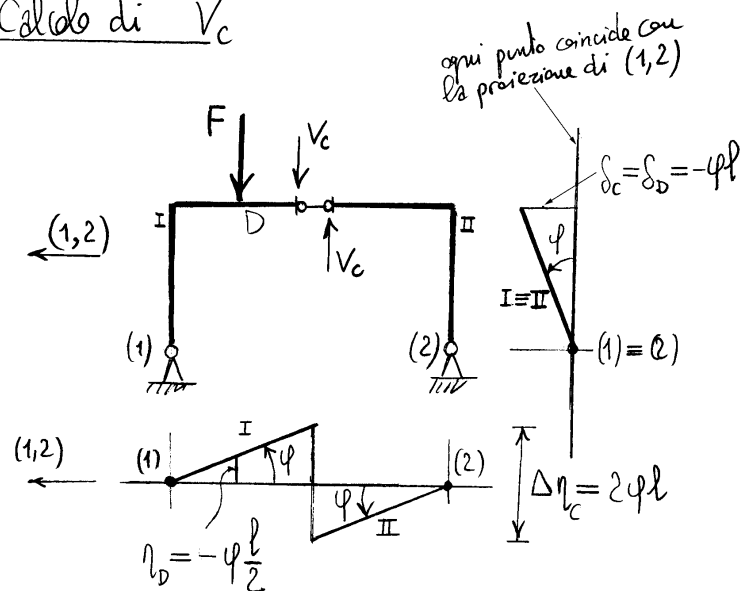


I parametri lagrangiani φ_1 , φ_2 , φ_3 individuano univocamente la configurazione e il sistema risulta quindi 3 volte labile e quindi 2 volte iperstatico.

1.5.9 Calcolo di reazioni vincolari in un portale piano isostatico



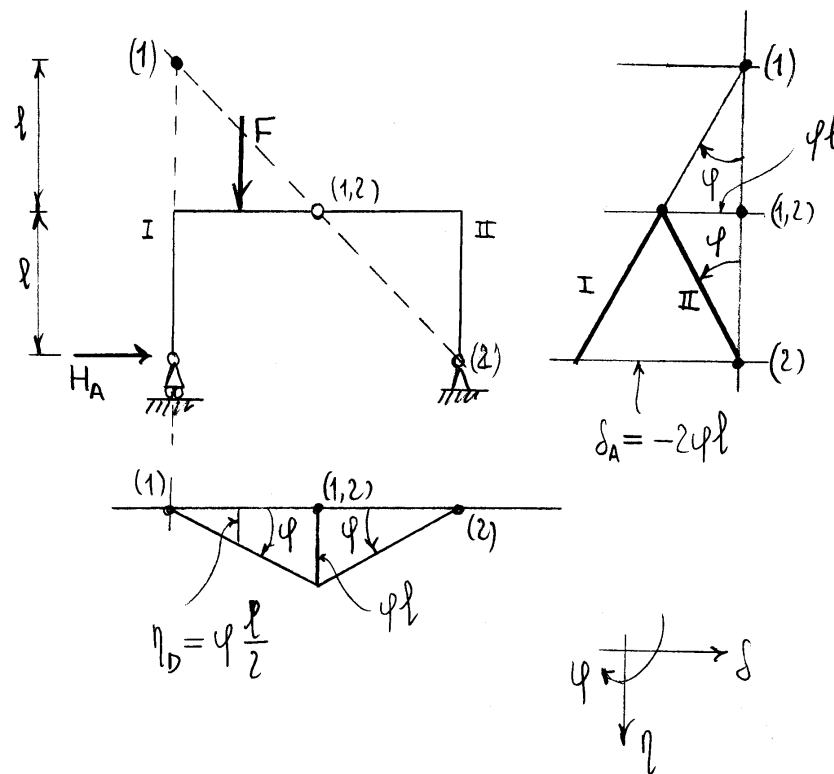
Calcolo di V_c



$$L_e = F \eta_D - V_c \Delta \eta_c = -F \phi \frac{l}{2} - V_c 2\phi l$$

$$L_e = 0 \Rightarrow V_c = -\frac{F}{4}$$

Calcolo di H_A



$$L_e = F \eta_D + H_A \delta_A = F \phi \frac{l}{2} - H_A 2\phi l$$

$$L_e = 0 \Rightarrow H_A = \frac{F}{4}$$

STATICA DEI SISTEMI PIANI ISOSTATICI

2.1 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

2.1.1 Convenzioni

Si ricordi che l'orientazione dell'asse decide chi sia la faccia positiva di una sezione, quella di normale uscente positiva, faccia in cui agiscono caratteristiche positive se concordi con gli assi locali di riferimento. Con l'ausilio della fig. 2.1, si noti che invertendo l'orientazione dell'asse la for-

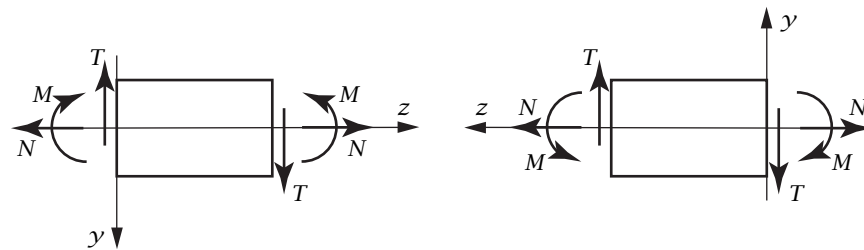


Figura 2.1: Convenzioni di segno delle caratteristiche della sollecitazione

za normale e il taglio non cambiano di segno mentre lo cambia il momento flettente. Inoltre qualunque sia l'orientazione dell'asse, la forza normale è positiva se uscente dall'elemento di trave, quindi se di trazione, mentre

la forza di taglio è positiva se fa ruotare l'elemento in senso orario. In tal modo è possibile definire le convenzioni di segno di forza normale e taglio basandosi su un fatto fisico, forza normale di trazione e taglio orario, senza alcun riferimento all'orientazione dell'asse (fig. 2.2). Nel caso del momento



Figura 2.2: Convenzioni di segno di forza normale e taglio

flettente invece ciò non è possibile. Si introduce comunque un riferimento ad un fatto fisico introducendo il concetto di *fibre tese* e di *fibre compresse*, ovverossia di quelle fibre longitudinali che in corrispondenza della sezione retta sono soggette a tensioni normali di trazione rispettivamente di compressione. Allo scopo di individuare le fibre tese, si noti che il momento flettente, momento risultante delle tensioni normali, è equivalente ad una coppia le cui forze possono essere tracciate ortogonalmente alla sezione alle due estremità della stessa sezione nel piano della trave (fig. 2.3). È evidente che di queste due forze quella che esce dall'elemento di trave individua la parte di sezione in cui si può supporre che agiscano solo delle tensioni normali di trazione, almeno nei casi in cui la distribuzione delle

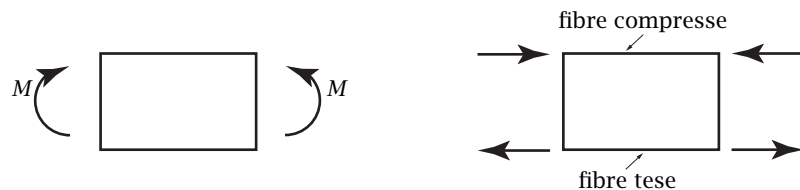


Figura 2.3: Fibre tese e fibre compresse

tensioni nel piano della sezione sia particolarmente semplice (per esempio lineare). Per dare un segno al momento flettente si possono scegliere delle fibre di riferimento, per esempio con un tratteggio in una delle due estremità della sezione, e stabilire che il momento sia positivo se tende le fibre di riferimento, negativo se le comprime (fig. 2.4a). Tale convenzione è sganciata dall'orientazione dell'asse della trave, ma occorre fare attenzione nel caso si utilizzi la terza equazione indefinita di equilibrio che per essere valida necessita che le fibre di riferimento e l'orientazione dell'asse abbiano una precisa relazione fra di loro (fig. 2.4b).

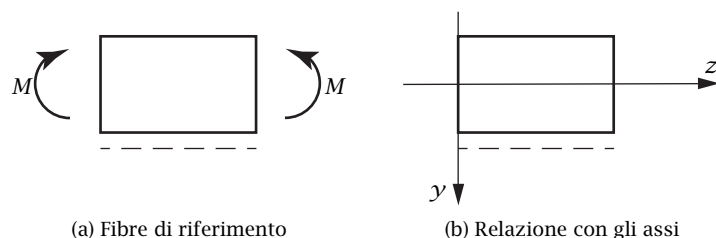


Figura 2.4: Convenzioni di segno del momento flettente

Ciò premesso, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si tracciano riportando, perpendicolarmente alla linea d'asse, il modulo della caratteristica stessa. Per quel che riguarda forza normale e taglio non ha importanza da quale parte venga riportato il valore positivo, purché sia indicato chiaramente il segno della caratteristica che in tal caso assume, come visto, un significato fisico. Per quel che riguarda il momento flettente si può invece prescindere dal dargli un segno, ma è consuetudine di riportarlo dalla parte delle fibre tese. In tal caso il significato fisico è quindi

assunto dalla parte in cui il diagramma è tracciato. Se si scelgono delle fibre di riferimento per dare un segno al momento, questi va tracciato dalla parte delle fibre di riferimento se il momento è positivo, dalla parte opposta se il momento è invece negativo, in modo da garantire in ogni caso che il momento sia tracciato dalla parte delle fibre tese.

2.1.2 Analisi qualitativa (asse rettilineo)

Le equazioni indefinite di equilibrio, valide nel caso in cui l'asse della trave è rettilineo, e le equazioni di discontinuità impongono delle condizioni all'andamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione. Le condizioni imposte dalle equazioni indefinite di equilibrio sono molto semplici nei casi in cui sono semplici le distribuzioni delle forze esterne p e q e dei momenti esterni m . Nel seguito si analizzeranno i casi in cui le distribuzioni sia delle forze esterne che dei momenti esterni sono nulle e i casi in cui le distribuzioni delle forze esterne sono costanti ancora in presenza di una distribuzione dei momenti esterni nulla. Tenendo poi conto, come già detto, che forza normale da una parte e taglio e momento flettente dall'altra parte sono indipendenti, si analizzerà per primo il diagramma della forza normale per poi passare ai diagrammi del taglio e del momento flettente.

Forza normale

$$\frac{dN}{dx} + p = 0, \quad \Delta N + P = 0.$$

In un tratto non caricato da forze aventi la direzione della linea d'asse (forze di tipo assiale), la forza normale è costante:

$$p = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 0 \Rightarrow N = \text{cost.}$$

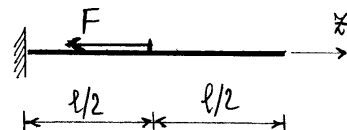
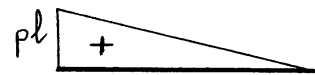
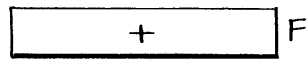
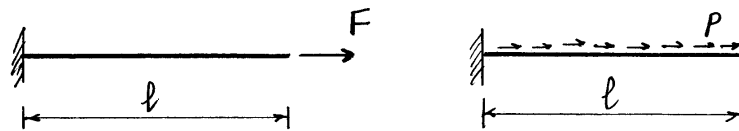
Se invece il carico di tipo assiale è costante, la forza normale è lineare:

$$p = \text{cost} \Rightarrow N = -p\bar{x} + \text{cost}.$$

Se invece è presente una forza concentrata diretta come la linea d'asse, la forza normale presenta una discontinuità:

$$\Delta N = N^+ - N^- = -P.$$

Esempi:



$$\begin{aligned} N^+ &= 0, \\ N^- &= -F \\ P &= -F \end{aligned}$$

Taglio e momento flettente

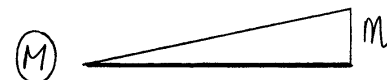
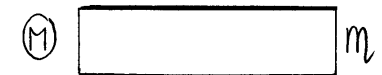
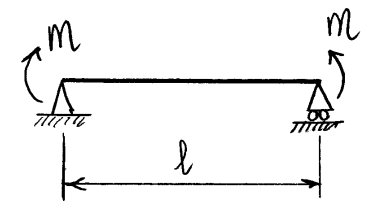
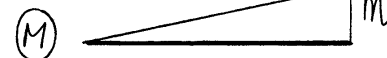
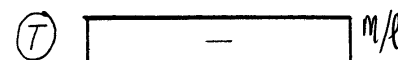
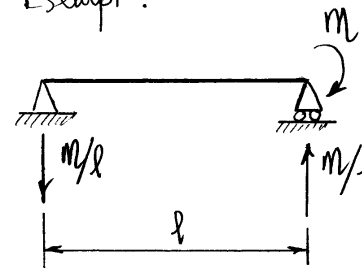
$$\begin{cases} \frac{dT}{d\bar{x}} + q = 0 \\ \frac{dM}{d\bar{x}} + m = T \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta T + Q = 0 \\ \Delta M + M = 0 \end{cases}$$

In un tratto non caricato da forze ortogonali alla linea d'asse e da coppie (forze di tipo flessionale), il taglio è costante e il momento flettente è lineare:

$$m, q = 0 \Rightarrow \frac{dT}{d\bar{x}} = 0 \Rightarrow T = \text{cost} \Rightarrow M = T\bar{x} + \text{cost}.$$

In particolare, se il taglio è nullo allora il momento flettente è costante.

Esempi:



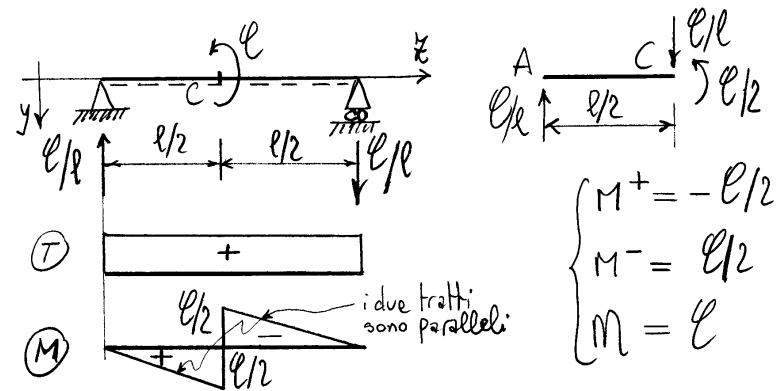
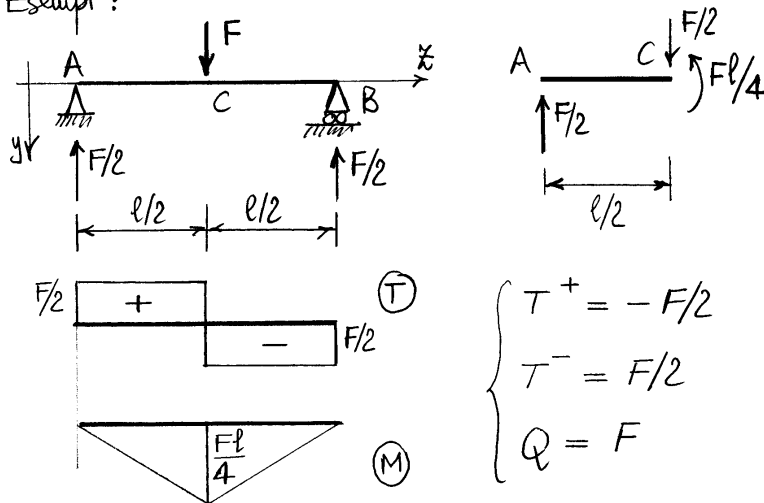
Una forza concentrata ortogonale alla linea d'asse provoca una discontinuità nel diagramma del taglio e di conseguenza nella tangente al diagramma del momento che presenta quindi un punto angoloso:

$$\Delta T = T^+ - T^- = \frac{dM}{dx}^+ - \frac{dM}{dx}^- = -Q.$$

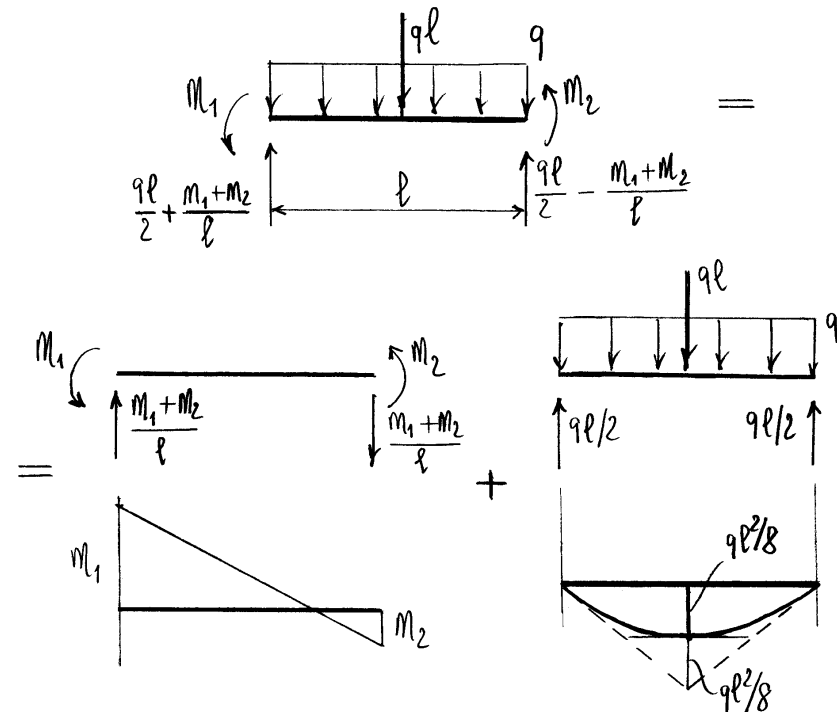
Se invece è presente una coppia concentrata si ha una discontinuità nel diagramma del momento flessente:

$$\Delta M = M^+ - M^- = -M.$$

Esempi:



Se infine il carico distribuito ortogonale alla linea d'asse è costante, con le coppie distribuite nulle, il taglio



risulta lineare e il momento parabolico, con asse della parabola parallela al carico:

$$\begin{cases} m=0 \\ q=\text{cost} \end{cases} \Rightarrow T = -qz + c_1 \Rightarrow M = -\frac{q}{2}z^2 + c_1z + c_2.$$

Il diagramma parabolico può sempre ottenersi come somma di due diagrammi particolari, uno lineare e uno parabolico.

Il diagramma parabolico particolare è quello di una trave soggetta a tutto il carico ripartito e con momenti nulli alle due estremità, come nel caso di una trave appoggiata. Il diagramma lineare particolare è quello di una trave non caricata lungo la linea d'asse e soggetta alle due estremità ai momenti complessivi eventualmente applicati alle due estremità. Poiché in mezzeria della trave soggetta al carico ripartito e con momenti nulli alle due estremità il taglio è nullo, l'inclinazione del diagramma lineare rappresenta il taglio complessivo in mezzeria e quindi la tangente in mezzeria al diagramma complessivo.

Nei punti di estremità del tratto di applicazione del carico distribuito le caratteristiche della sollecitazione si possono calcolare sostituendo al carico ripartito la sua risultante ql applicata nel punto di mezzo. Ne consegue che il diagramma del momento flettente dovuto alla risultante è tangente, alle estremità del carico distribuito, al momento flettente dovuto al

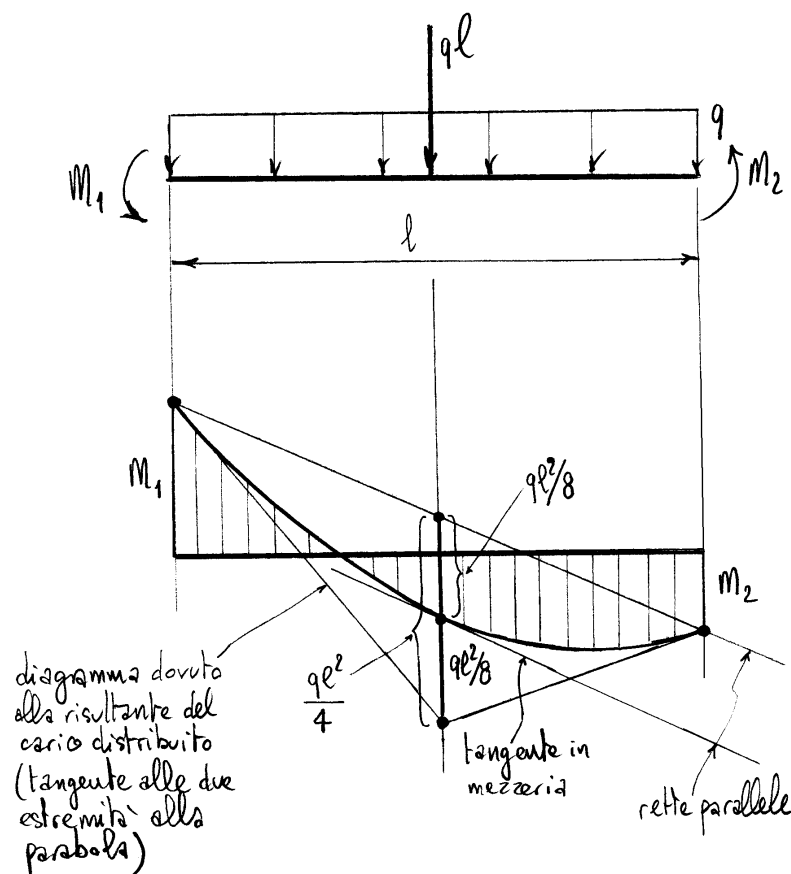
carico ripartito. Infatti, l'inclinazione del momento flettente rappresenta il taglio ed il taglio alle due estremità coincide nei due casi (di carico ripartito e di carico concentrato pari alla risultante).

Per costruire la parabola del momento flettente si può dunque procedere nel modo seguente:

- 1) Si riportano i valori del momento alle due estremità della trave (individuando così due punti della parabola);
- 2) Si uniscono i due punti di estremità (individuando così sia la parte lineare del momento che l'inclinazione della tangente in mezzeria);
- 3) Alla parte lineare si somma in mezzeria il valore $ql^2/8$ concordemente al verso del carico (individuando un terzo punto della parabola);
- 4) Dal punto della parabola in mezzeria si manda la parallela alla parte lineare del diagramma (ottenendo così la tangente alla parabola in tale punto);
- 5) Dal terzo punto della parabola, sempre nel verso del

carico, si riporta un segmento di lunghezza $ql^2/8$ (individuando così il vertice delle tangenti alle due estremità')

6) Si unisce il vertice delle tangenti ai due punti di estremità della parabola (ottenendo così le due tangenti di estremità della parabola).



2.2 Curva delle pressioni

Le sollecitazioni che si trasmettono attraverso una qualunque sezione retta di una trave piana equivalgono alla loro risultante agente lungo una ben determinata retta d'azione (*asse centrale* del sistema di forze) oppure, se tale risultante è nulla, equivalgono ad una coppia. Escluso quest'ultimo caso, ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione della risultante delle forze agenti nella stessa sezione. D'altronde una coppia $\mathcal{M}$ rappresenta il caso limite di una forza F avente braccio b rispetto ad un punto P del piano quando la forza tende a zero e il braccio tende all'infinito mantenendo costantemente uguale a $\mathcal{M}$ il prodotto Fb . Ne consegue una "forza nulla" che agisce secondo la *retta all'infinito* o *retta impropria* e quindi ad ogni sezione retta di una trave piana corrisponde la retta d'azione, propria o impropria, della risultante delle tensioni agenti nella stessa sezione.

La *curva delle pressioni* rappresenta l'involuppo delle rette d'azione delle risultanti relative a tutte le sezioni rette di un sistema di travi. Tale strumento grafico sintetizza, in modo qualitativo, le sollecitazioni cui una trave è sottoposta.

2.2.1 Tratto non caricato

In un tratto del sistema di travi monoconnesso, senza diramazioni e non caricato lungo le linee d'asse da forze esterne la curva delle pressioni è una linea retta, poiché in tal caso l'equilibrio richiede che la retta d'azione della risultante non vari al variare della sezione retta considerata. Infatti, due sezioni generiche del tratto individuano una parte di tale tratto caricata solo in corrispondenza delle sezioni stesse e quindi le due forze che si trasmettono in tali sezioni devono essere uguali ed opposte.

Se il sistema di travi è caricato solo da forze concentrate la curva delle pressioni risulta, per quanto detto, poligonale. I lati del "poligono" delle pressioni corrispondono ai tratti del sistema di travi tra un carico concentrato e l'altro (fig. 2.5a). Con riferimento all'esempio di fig. 2.5a, l'intersezione tra la traccia di una generica sezione S e la retta d'azione della risultante delle forze agenti nella stessa sezione (retta d'azione che rappresenta un lato del poligono delle pressioni) individua il *centro di sollecitazione* C .¹ Il valore della risultante può essere dedotto dal *poligono delle*

¹A volte detto *centro di pressione*.

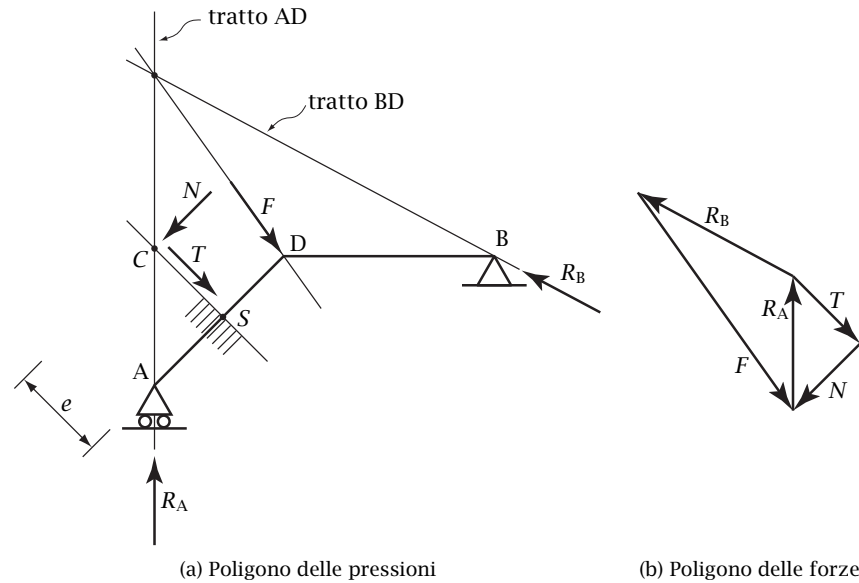


Figura 2.5: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico concentrato

forze (fig. 2.5b), che rappresenta l'equilibrio in forma vettoriale. La componente in direzione normale alla sezione individua la forza normale, quella in direzione della traccia della sezione la forza di taglio mentre il momento flettente dipende dalla eccentricità della risultante rispetto al punto S della linea d'asse, oppure dalla eccentricità della sola forza normale (indicata con e in fig. 2.5a). Il momento flettente si annulla dove i lati del poligono delle pressioni intersecano la linea d'asse del sistema di travi nel tratto di propria competenza. Nel caso della fig. 2.5a, tale situazione si verifica solo in corrispondenza delle sezioni vincolate A e B.

2.2.2 Tratto con carico distribuito costante (per unità di linea ortogonale al carico)

Si vuole ora mostrare che *in un tratto del sistema soggetto ad un carico distribuito q costante per unità di linea ortogonale al carico, la curva delle pressioni è una parabola il cui asse ha la direzione del carico.*

Dimostrazione. Facendo infatti riferimento allo schema di fig. 2.6a, dove la

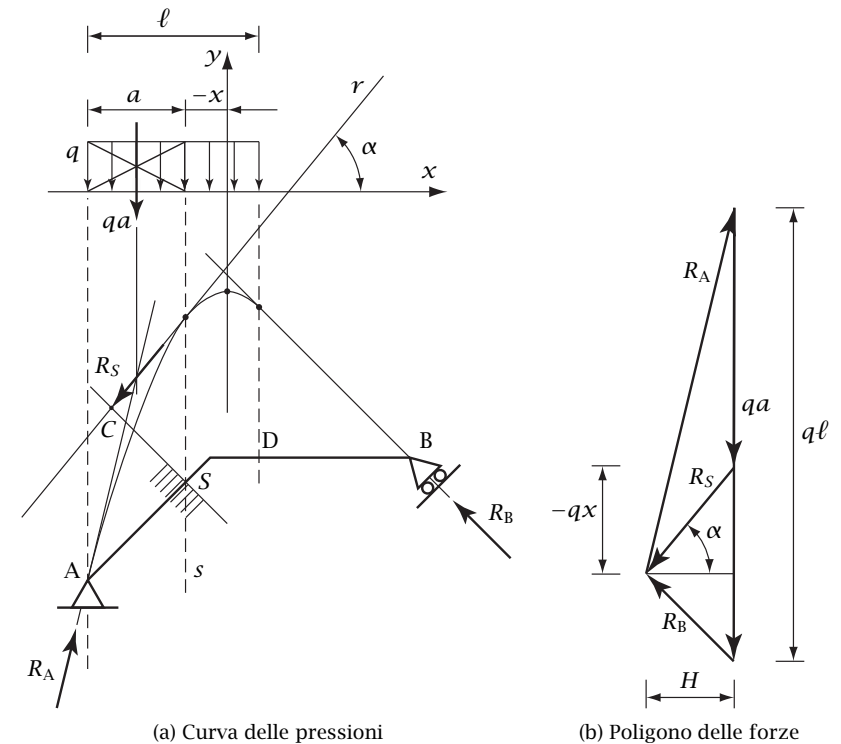


Figura 2.6: Esempio di un sistema di travi soggetto ad un carico ripartito

direzione del carico distribuito è verticale e il carico è ritenuto costante per unità di linea orizzontale (o per unità di proiezione orizzontale), si consideri la generica sezione S . La quota di carico distribuito che compete al tratto AS vale qa , dove a è la distanza in orizzontale di A da S . È quindi possibile determinare, tramite il poligono delle forze (fig. 2.6b), la risultante che compete alla sezione S . L'inclinazione di tale risultante fornisce, per definizione di inviluppo, la tangente r alla curva delle pressioni nel punto individuato dalla intersezione della curva con la retta d'azione s della quota di carico ripartito agente in S . Si assumano allora due assi ortogonali di riferimento, un asse orizzontale x generico ed un asse verticale y tale che

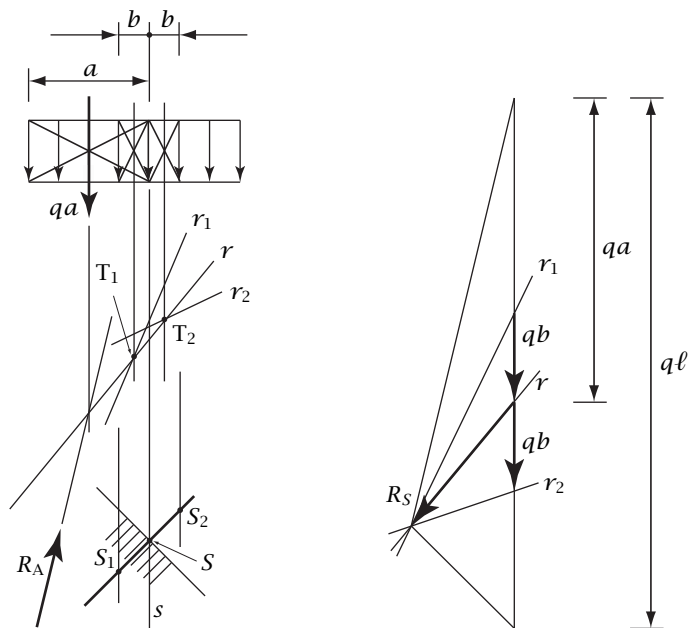


Figura 2.7: Tangenti alla curva delle pressioni nell'intorno di un punto

divida il carico ripartito in due quote, individuate nel poligono delle forze dalla orizzontale per il punto di incontro delle reazioni R_A ed R_B . Detta $f(x)$ l'equazione della curva delle pressioni, deve quindi risultare:

$$\frac{df}{dx} = \tan \alpha = \frac{-qx}{H}, \quad (2.1)$$

dove α è l'inclinazione della tangente rispetto all'asse x e H è la distanza, misurata nel poligono delle forze, della risultante del carico distribuito dal punto di incontro delle reazioni R_A ed R_B . Dato che la distanza H non dipende da x , integrando si ottiene:

$$f(x) = -\frac{qx^2}{2H} + c, \quad (2.2)$$

equazione che rappresenta una parabola di asse y , come volevasi dimostrare. ■

Nella dimostrazione precedente si è ipotizzato che *il punto di tangenza della risultante r in S si trovi sulla retta s* .

Dimostrazione. Per mostrare che così è si consideri la fig. 2.7, dove sono state tracciate le rette d'azione r_1 e r_2 delle risultanti relative rispettivamente alle due sezioni S_1 e S_2 che distano b da S in direzione orizzontale e che sono poste rispettivamente a sinistra e a destra di S . Le risultanti dei due carichi qb intercettano su r i punti T_1 e T_2 da cui passano le rette d'azione r_1 e r_2 . È evidente dalla costruzione che il punto di tangenza di r deve essere interno all'intervallo T_1T_2 . Essendo la distanza b arbitraria il punto di tangenza deve quindi stare sulla retta s . ■

Con riferimento alla fig. 2.8, si affronta ora il problema della costruzione

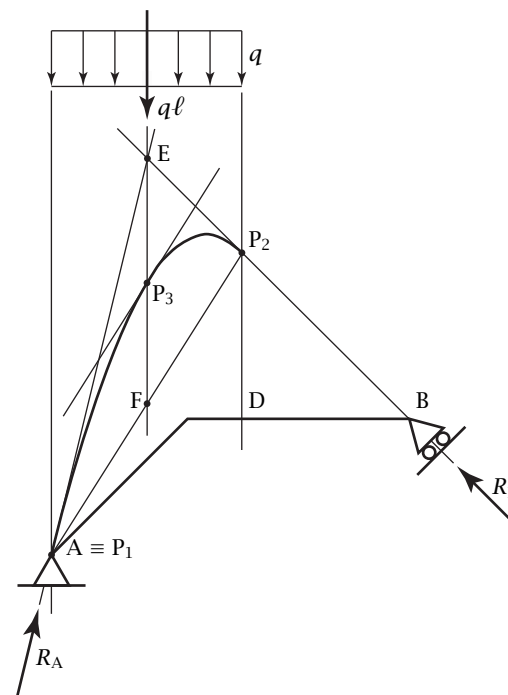


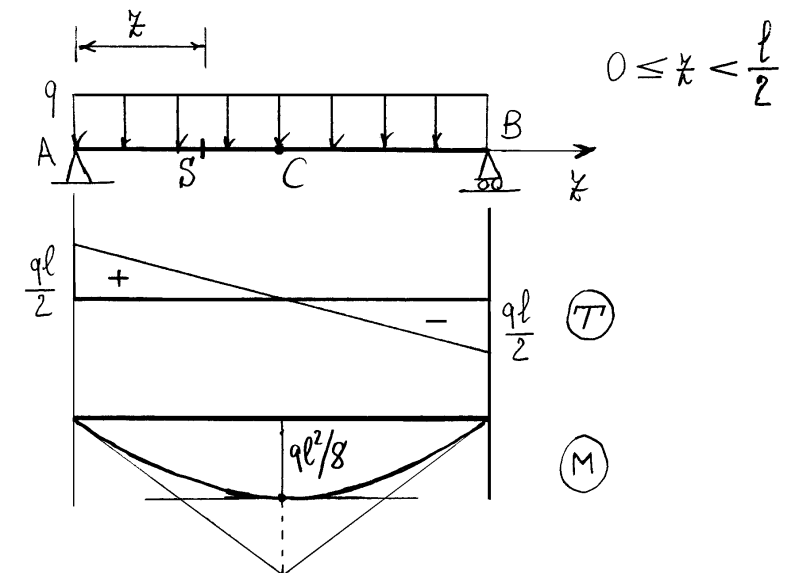
Figura 2.8: Costruzione della curva delle pressioni parabolica

dell'arco di parabola che rappresenta la curva delle pressioni tramite l'in-

dividuazione di tre dei suoi punti e delle corrispondenti tangenti, come già fatto per il tracciamento del diagramma parabolico del momento flettente. A tale proposito si ricordi che nel dato esempio la direzione del carico coincide con la direzione verticale. Si consideri allora innanzitutto che i due punti di estremità P_1 e P_2 della curva delle pressioni coincidono con le intersezioni tra le verticali per le sezioni A e D di estremità del carico distribuito e le rette d'azione delle risultanti in A e in D rispettivamente. Si noti che nell'esempio di fig. 2.8 il primo dei due punti, P_1 , coincide con il punto A. Le rette d'azione relative ai due punti di estremità rappresentano anche le due tangenti di estremità della curva delle pressioni mentre il vertice E delle tangenti si trova sulla retta d'azione della risultante del carico distribuito. Per completare la costruzione a questo punto basta unire i due punti di estremità P_1 e P_2 della curva delle pressioni, individuando così l'intersezione F con la retta d'azione della risultante del carico distribuito. Dividendo a metà il segmento EF si individua il terzo punto P_3 della parabola, mentre la tangente si ottiene mandando per P_3 la parallela alla congiungente P_1P_2 .

2.2.3 Arco parabolico

Si consideri una trave appoggiata soggetta ad un carico ripartito e si calcoli la posizione della risultante relativa alla generica sezione S' posta nella metà di sinistra della trave.



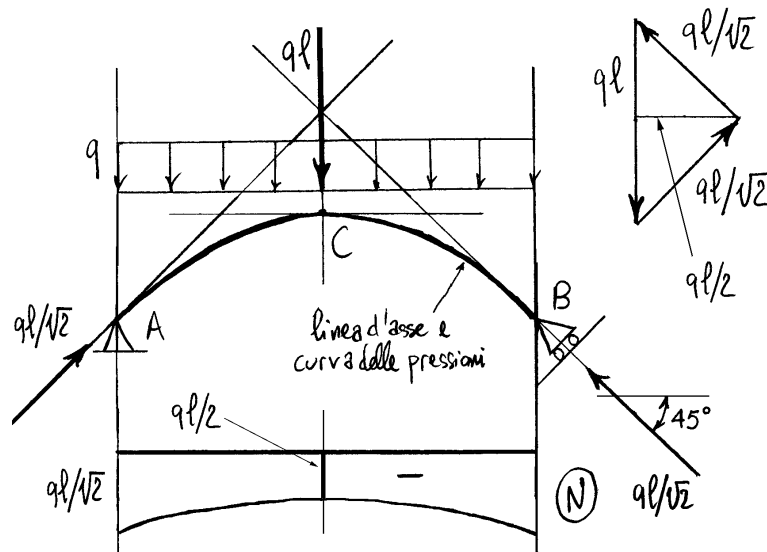
Detta x la distanza dall'appoggio di sinistra A risulta:

$$\left(\frac{ql}{2} - qx\right)x - (qx)\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{x^2}{l - 2x}.$$

La retta d'azione della risultante in A è la retta verticale per A. Facendo variare S' da A a C (sezione sulla

precedente era nulla.

Si sostituisca ora la trave ad asse rettilineo con un arco parabolico di linea d'asse coincidente con la curva delle pressioni precedente, lasciando invariati i vincoli in A e in B. Si ottiene così una struttura in grado di assorbire il carico ripartito generando esclusivamente una forza normale.



Cio' è particolarmente vantaggioso se il materiale di cui è composto l'arco non è resistente a trazione, poiché il carico in tal modo può essere assorbito generando solo sforzi di compressione.

2.2.4 Arco circolare a tre cerniere

Si consideri l'equilibrio di un arco di circonferenza AB di centro O, di semiapertura β generica, soggetto ad un carico distribuito q radiale (per unità di linea d'asse) e a due forze in A e in B tangenti alla linea d'asse (fig. 2.9a).

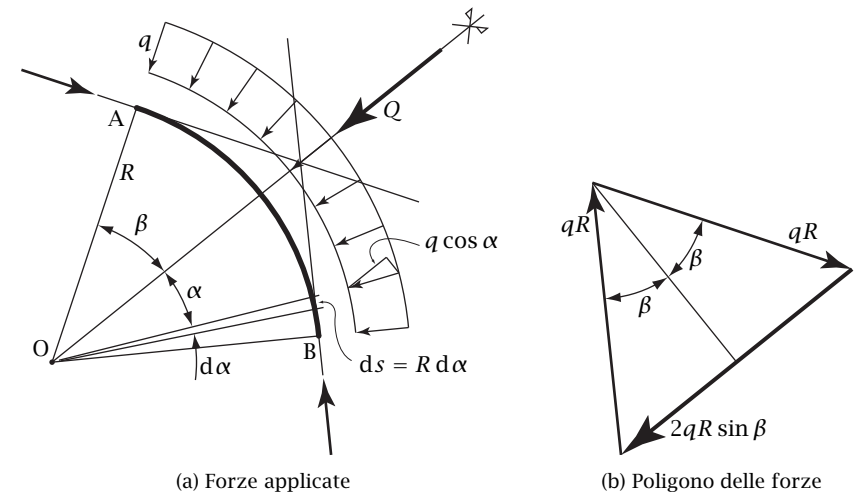


Figura 2.9: Equilibrio di un arco circolare soggetto ad un carico radiale

Il carico radiale è simmetrico rispetto alla bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ e quindi tale bisettrice coincide con la retta d'azione della risultante del carico. Sempre per simmetria, le due tangenti in A e in B si incontrano sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{AOB}$ rendendo così possibile l'equilibrio (dato che condizione necessaria per l'equilibrio di tre forze è che si incontrino in un punto).

Poiché la risultante del carico radiale ha retta d'azione l'asse di simmetria, è sufficiente integrare la componente del carico in tale direzione. La simmetria permette inoltre di integrare solo su metà arco. Con le convenzioni di fig. 2.9a si ottiene così:

$$Q = 2 \int_0^\beta q \cos \alpha R d\alpha = 2qR \sin \beta. \quad (2.3)$$

Come può poi dedursi dal poligono delle forze (fig. 2.9b), gli sforzi alle due estremità A e B dell'arco valgono qR . Si noti che tale risultato è indipendente dalla semiapertura β dell'arco.

Si consideri ora l'arco circolare a tre cerniere di fig. 2.10, soggetto ad un

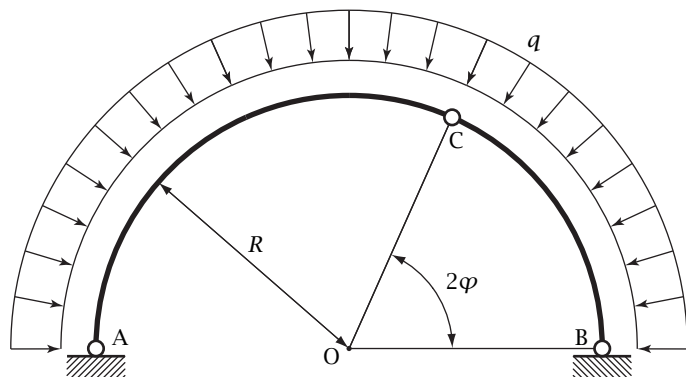


Figura 2.10: Arco circolare a tre cerniere soggetto ad un carico ripartito radiale

carico distribuito radiale costante (ancora per unità di linea d'asse).

Si sconnetta in corrispondenza delle tre cerniere (interna ed esterne). Per la soluzione precedente, è possibile equilibrare i due archi con delle forze tangenti alla linea d'asse, di modulo qR indipendente dalla semiapertura degli archi, come indicato in fig. 2.11. Le due forze in corrispondenza della cerniera interna sono quindi uguali ed opposte come imposto dal vincolo. Essendo soddisfatto l'equilibrio e tutte le condizioni imposte dai vincoli, lo schema di fig. 2.11 fornisce la soluzione dell'arco circolare a tre cerniere soggetto a carico radiale.

Si noti che l'arco è soggetto alla sola forza normale e che quindi la curva delle pressioni coincide con la linea d'asse dell'arco.

2.2.5 Cenno all'equilibrio dei fili

Come già visto nel caso dell'arco parabolico, la curva delle pressioni non dipende dalle linee d'asse del sistema di travi ma solo dalle forze applicate (forze attive e reazioni dei vincoli), almeno finché la forma della struttura non influenza le forze applicate. Si consideri allora un *filo inestendibile*, ovvero un filo che conserva la sua lunghezza. Essendo indefinitamente

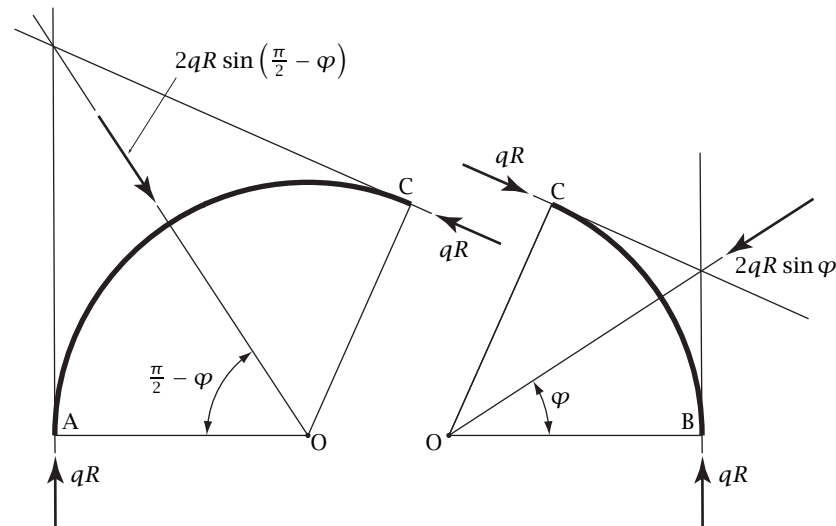


Figura 2.11: Reazioni interne ed esterne

flessibile, il filo può essere internamente soggetto solo a forze normali di trazione, dirette quindi secondo la tangente alla linea che rappresenta la configurazione equilibrata sotto le date forze.² Ne consegue che se si attegga un filo inestendibile secondo la curva delle pressioni determinata da dati carichi (e reazioni vincolari) si ottiene una configurazione equilibrata del filo soggetto a quei dati carichi, almeno nel caso in cui le forze normali sono di trazione.

Quale primo esempio si consideri il poligono delle pressioni di fig. 2.5a, p. 49. Tenuto conto che nel caso considerato lo sforzo normale è di compressione, è sufficiente modificare il verso della forza F esterna applicata per ottenere la configurazione di un filo inestendibile in equilibrio sotto le date forze (fig. 2.12a). Analogamente si consideri la curva delle pressioni dell'arco semicircolare di fig. 2.10, in questa pagina, che ricordiamo essere coincidente con la linea d'asse semicircolare. Tenendo ancora conto che nel caso trattato la forza normale è di compressione, se ne deriva che la configurazione del filo inestendibile di fig. 2.12b è equilibrata sotto il carico

²Si noti che non avendo il filo una forma propria, non ha senso scrivere l'equilibrio in una configurazione indeformata vicina a quella deformata.

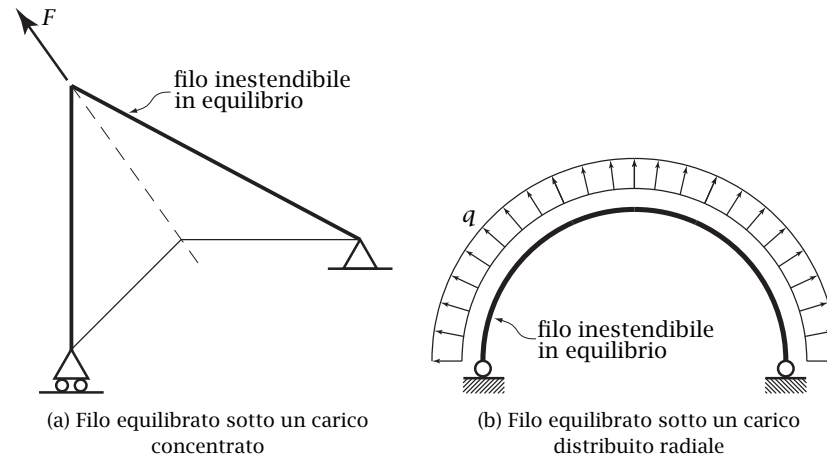


Figura 2.12: Fili inestendibili in equilibrio

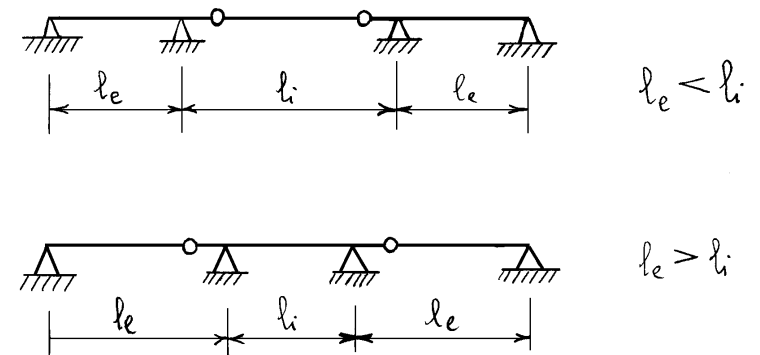
distribuito radiale.

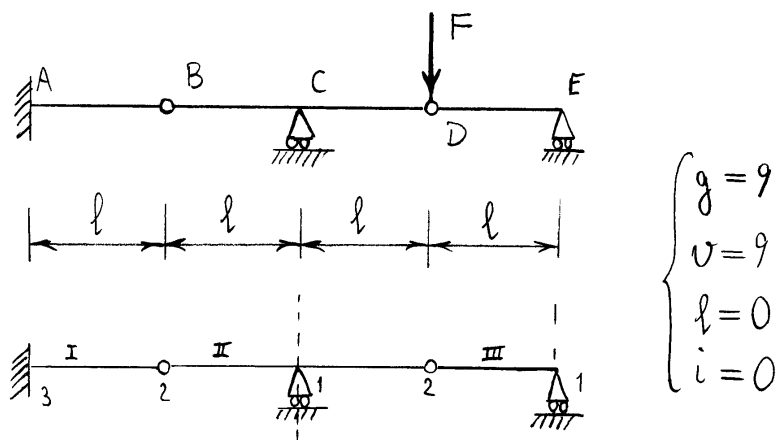
Si conclude osservando che negli equilibri precedenti non è stato messo in conto il peso proprio del filo. Si consideri allora un filo omogeneo pesante. In tale caso il peso proprio rappresenta un carico distribuito costante per unità di linea. Se il filo è molto teso tra due punti posti su una linea orizzontale, la sua configurazione equilibrata è vicina a quella rettilinea passante per i due punti. In tal caso il peso proprio del filo si può allora approssimativamente considerare quale carico distribuito costante per proiezione orizzontale. Ne consegue che il filo si atteggia, approssimativamente, secondo una curva parabolica passante per i due punti dati. L'equazione della parabola è fornita dalla (2.2) p. 50, dove H rappresenta la forza normale a cui il filo è approssimativamente soggetto.

2.3 Travi Gerber

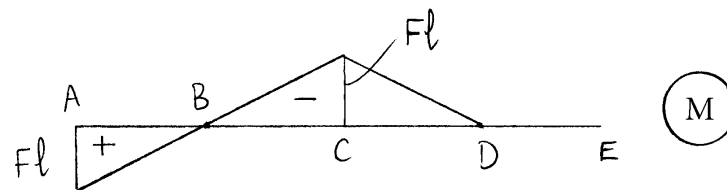
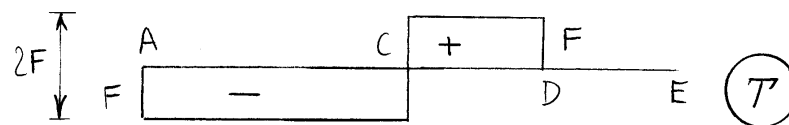
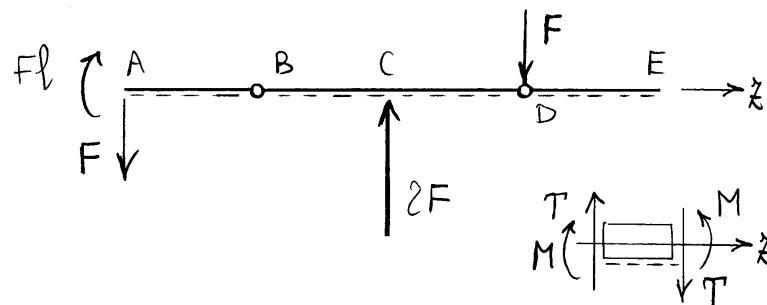
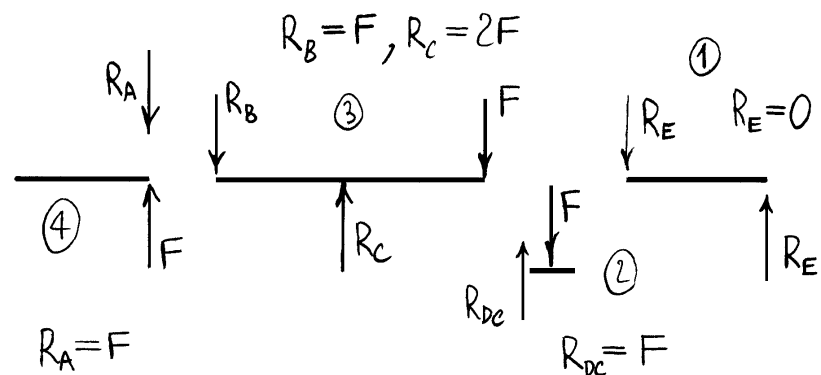
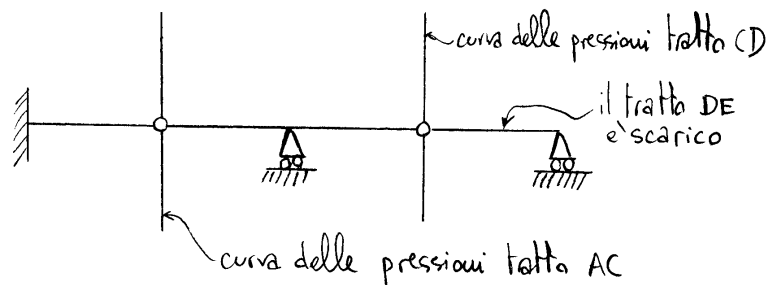
La trave Gerber è una trave su più di due appoggi resa isostatica mediante un numero sufficiente di snodi interni. Si tratta, dunque, di un sistema di travi, collegate tra loro da vincoli interni (tipicamente cerniere).

Casi più frequenti di travi Gerber su quattro appoggi:



Esercizio

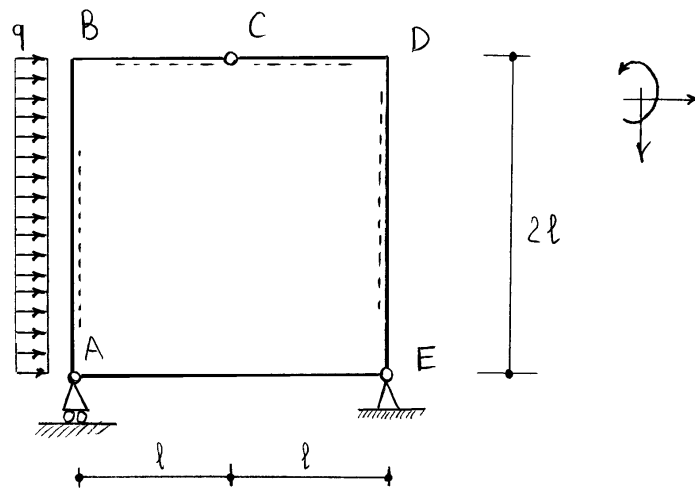
Il tratto AB è fisso. Il tratto BD è vincolato a ruotare attorno a B, ma in tal caso il punto C deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dall'appoggio e quindi anche il tratto BD è fisso, così come DE che a questo punto risulta una trave su due appoggi. Ne risulta che il sistema è isostatico.



2.4 Sistemi chiusi isostatici

2.4.1 Maglia chiusa quadrata

Si consideri il sistema chiuso di figura soggetto ad un carico ripartito uniformemente sul montante AB. Un sistema chiuso biconnesso ha tre gradi di iperstaticità poiché rimuovendo la continuità in corrispondenza di una generica sezione, cioè rimuovendo tre vincoli semplici, non si modifica la situazione cinematica del sistema, considerato rigido.



Nel caso in esame, nel tratto chiuso sono presenti tre connessioni semplici mentre esternamente sono presenti tre vin-

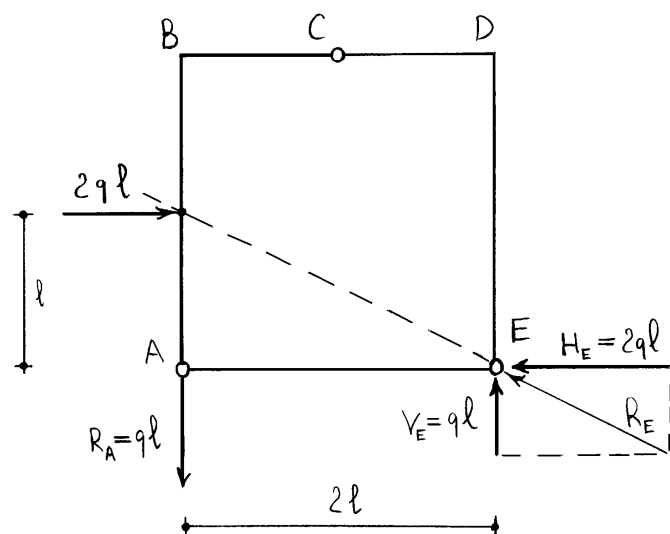
coli semplici. La condizione necessaria di isostaticità è dunque soddisfatta. Alternativamente, i tre tratti AE, ABC e CDE posseggono 9 gradi di libertà nel piano, sono vincolati tra loro da 3 vincoli doppi (le cerniere in A, E e C) e sono vincolati esternamente da un vincolo doppio (l'appoggio in E) e da un vincolo semplice (il carrello in A):

$$g = 3 \times 3 = 9, \quad v = 2 \times 4 + 1 = 9 \Rightarrow g - v = 0.$$

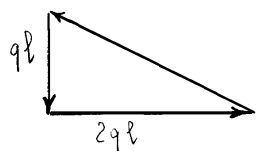
Inoltre, nell'ipotesi di labilità della struttura, il tratto AE deve ruotare attorno al punto E, ma in tal caso il punto A deve spostarsi verticalmente, il che è impedito dal carrello. Quindi il punto A è fisso. Il punto C, pensato appartenente al tratto ABC, deve quindi spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente AC così come, pensato appartenente al tratto CDE, deve spostarsi in direzione ortogonale alla congiungente EC. Quindi anche C è fisso e la struttura non è labile. Ne consegue che la struttura è isostatica.

Dato che la struttura è esternamente isostatica (è isostatica e i vincoli semplici esterni sono tre) l'equilibrio globale individua le reazioni dei vincoli esterni.

soluzione esterna



poligono delle forze



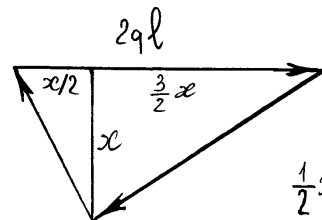
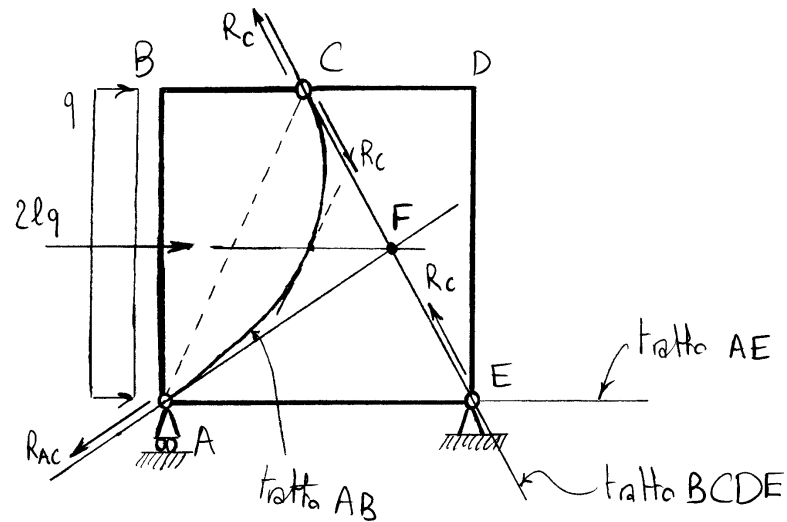
Equilibrio

- | | | |
|-----------------|-----------------|-------------------------|
| 1) Orizzontale: | 2) Verticale: | 3) Rotazione di polo E: |
| $2ql - H_E = 0$ | $R_A - V_E = 0$ | $R_A 2l - 2ql l = 0$ |

Soluzione vettoriale interna e curva delle pressioni

Per risolvere internamente la struttura si consideri l'equilibrio del tratto CDE. Essendo tale tratto soggetto alle due sole forze trasmesse in C ed in E, con rette d'azione rispettivamente per C e per E, ne risulta che le due forze devono essere uguali ed opposte. La loro retta d'azione coincide quindi con la congiungente CE, e tale congiungente rappresenta la curva delle pressioni nel tratto BCDE, tratto privo di forze esterne applicate.

Si consideri poi l'equilibrio del tratto ABC. La risultante del carico distribuito e la forza trasmessa in C si incontrano in un punto F per il quale deve passare, per equilibrio, anche la terza forza agente in A e con retta d'azione per A. Tale forza ha quindi la congiungente AF quale retta d'azione. La curva delle pressioni del tratto AB è una parabola ad asse orizzontale, passante per i punti A e C dove le tangenti sono le rette AF e CF rispettivamente. Diminuendo il segmento

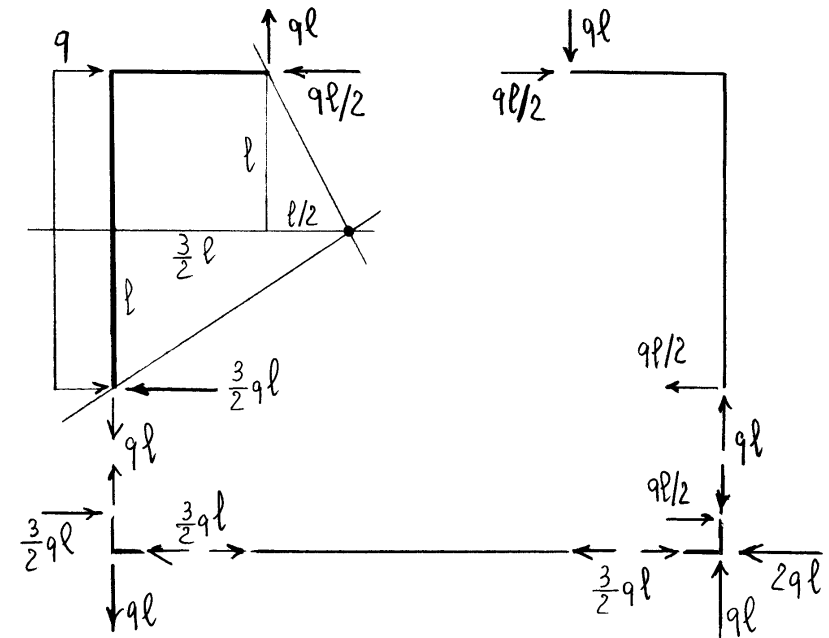


equilibrio del tratto ABC

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = 2ql \Rightarrow x = ql$$

orizzontale da F (vertice delle tangenti) alla congiungente AC si ottiene il terzo punto della parabola di tangente parallela ad AC.

In fine il tratto AE non è soggetto a forze esterne e la curva delle pressioni coincide con l'asse dell'arco.



Soluzione analitica interna

Parte 1

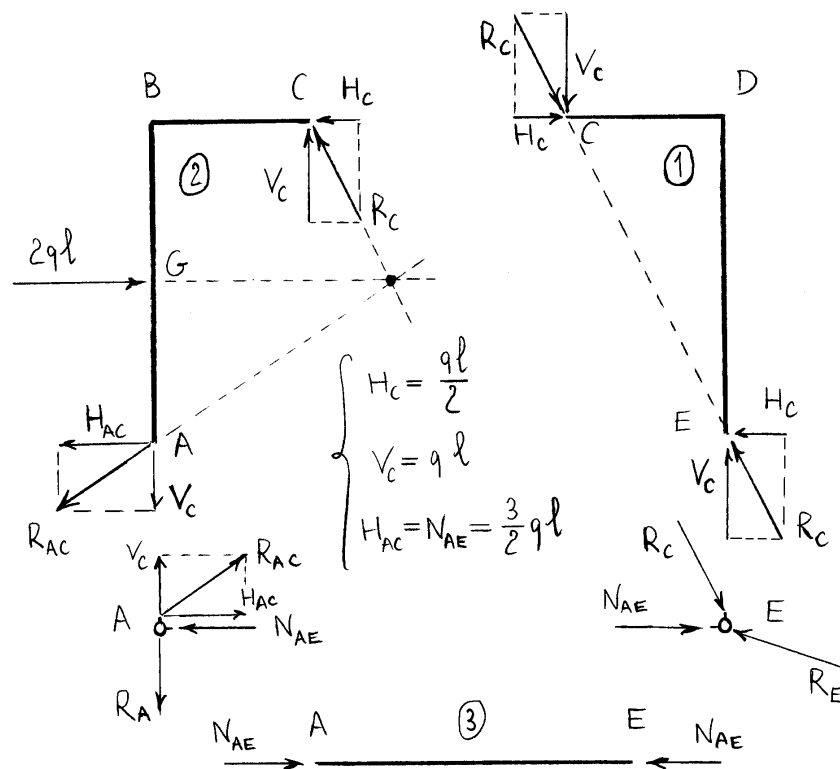
Equilibrio alla rotazione attorno al punto C :

$$V_c l - H_c 2l = 0 \Rightarrow V_c = 2H_c$$

Parte 2

Equilibrio alla traslazione orizzontale :

$$2ql - H_c - H_{AC} = 0 \Rightarrow H_{AC} = 2ql - H_c$$



Equilibrio alla rotazione attorno al punto A:

$$H_c \cdot 2l + V_c \cdot l - 2ql \cdot l = 0$$

$$2H_c l + 2H_c l - 2ql^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_c = \frac{1}{2}ql \\ H_{Ac} = \frac{3}{2}ql \end{cases}$$

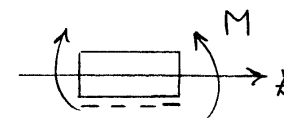
Nodo A

Traslazione orizzontale:

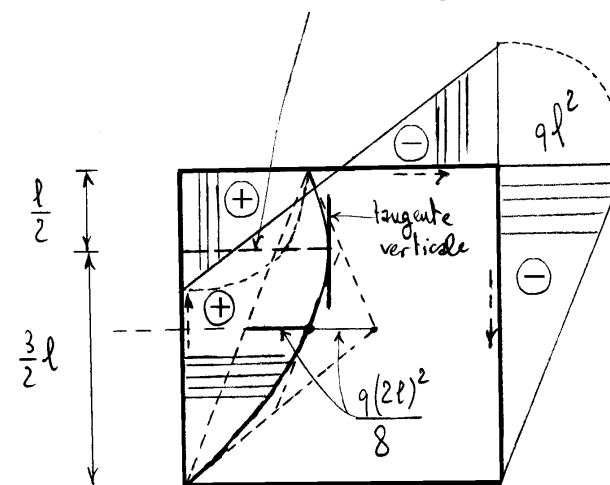
$$H_{Ac} - N_{AE} = 0 \Rightarrow N_{AE} = H_{Ac}$$

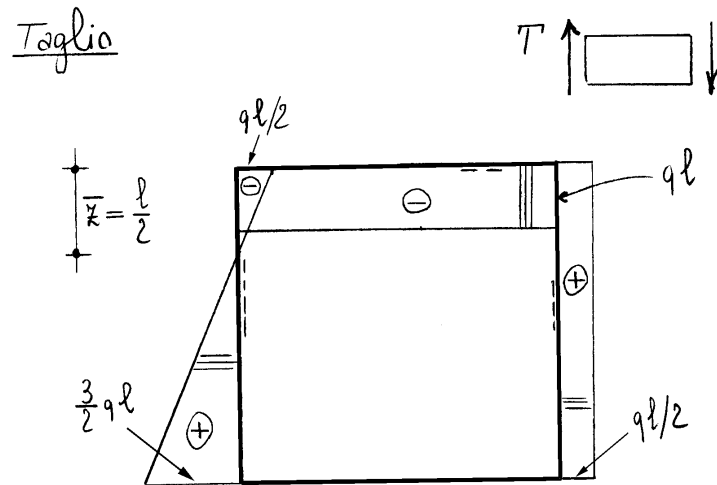
Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

Momento flettente



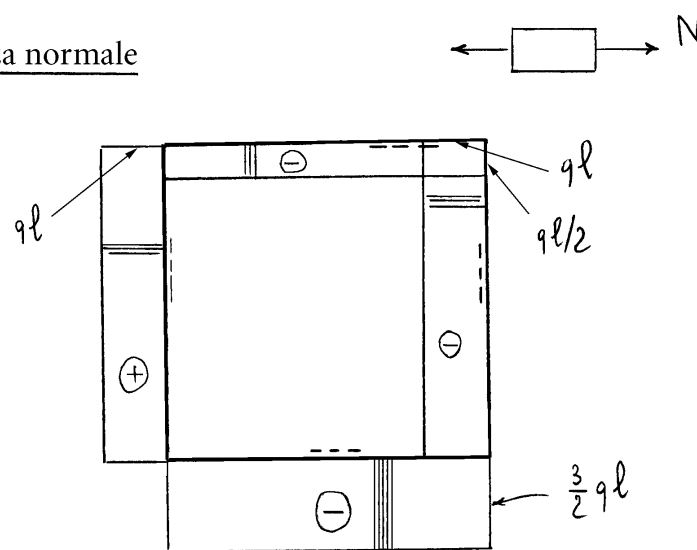
$$M_{max} = H_{Ac} \cdot \frac{3}{2}l - q \left(\frac{3}{2}l \right) \left(\frac{3}{4}l \right) = \frac{9}{8}ql^2$$





$$\frac{\bar{x}}{q l / 2} = \frac{2 l - \bar{x}}{\frac{3}{2} q l} \rightarrow 3 \bar{x} = 2 l - \bar{x}$$

Forza normale



2.4.2 Maglia chiusa triangolare

Si consideri ora il sistema chiuso di fig. 2.13, soggetto ad una coppia

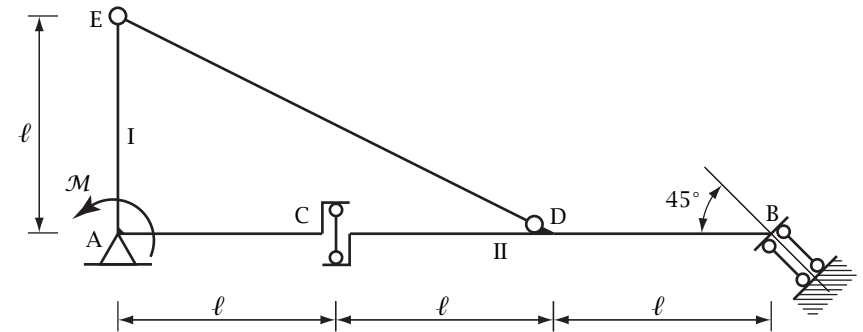
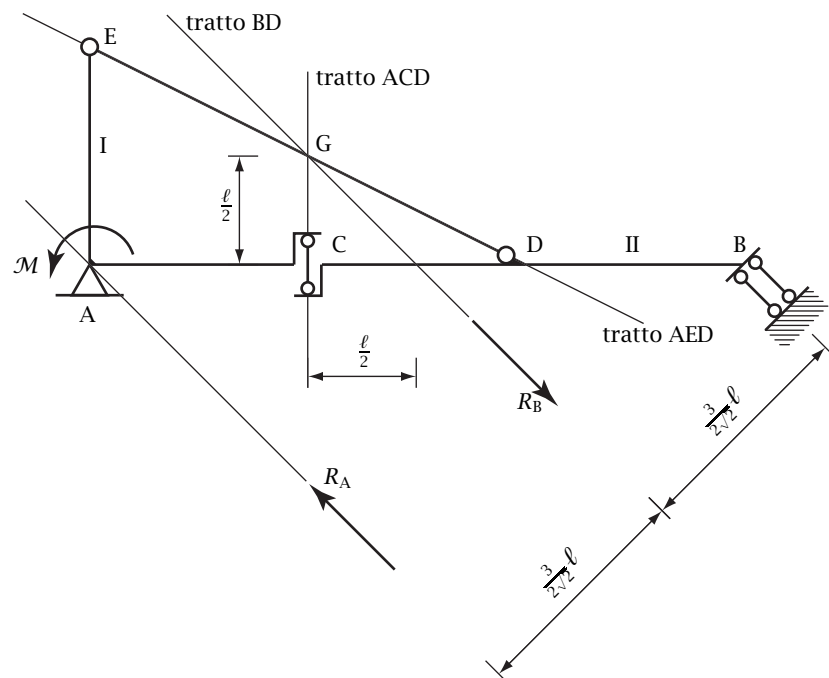


Figura 2.13: Sistema di travi chiuso soggetto ad una coppia

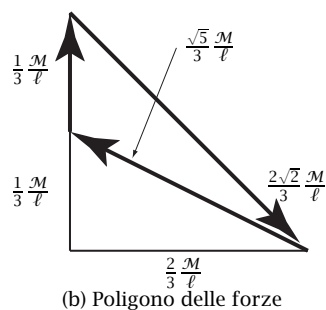
antioraria applicata nel nodo rigido A.

Isostaticità Il sistema di travi di fig. 2.13, contenente una parte chiusa, può essere considerato composto delle due parti rigide I e II connesse dal pendolo ED e dal pendolino interno in C. Essendo esternamente vincolata dall'appoggio in A e dal doppio pendolo in B, il numero globale dei vincoli semplici è quindi 6, pari al numero dei gradi di libertà delle due parti svincolate. Il sistema soddisfa allora la condizione necessaria di isostaticità.

Se la parte II subisse un moto rigido, causa il doppio pendolo questi sarebbe di traslazione. Supponiamo una traslazione che abbassa e sposta verso sinistra della stessa quantità, diciamo a , tutti i suoi punti, compresi quindi i punti C e D. Se il punto C si abbassa, per la continuità dello spostamento verticale imposto dal pendolo la parte I deve ruotare in senso orario attorno al punto fisso A. Il punto E si sposta allora verso destra di a . Eseguendo tale traslazione al pendolo ED il punto D si sposta verso destra di a . Si imponga ora una rotazione oraria di tale pendolo attorno alla cerniera in E in modo tale da rispettare la continuità dello spostamento verticale in D, e quindi tale da abbassare il punto D di a . Poiché il braccio verticale è la metà di quello orizzontale, ne risulta uno spostamento orizzontale pari a $a/2$ verso sinistra e quindi uno spostamento complessivo di D verso



(a) Poligono delle pressioni



(b) Poligono delle forze

Figura 2.14: Poligoni delle pressioni e delle forze

destra di $a/2$, in contrasto con la traslazione di a verso sinistra dovuto alla traslazione della parte II. La contraddizione dimostra che il sistema di travi non può subire moti rigidi e che quindi non è labile e di conseguenza è isostatico.

Reazioni interne ed esterne Per determinare le reazioni interne ed esterne, si consideri l'equilibrio della parte II. Le reazioni in corrispondenza

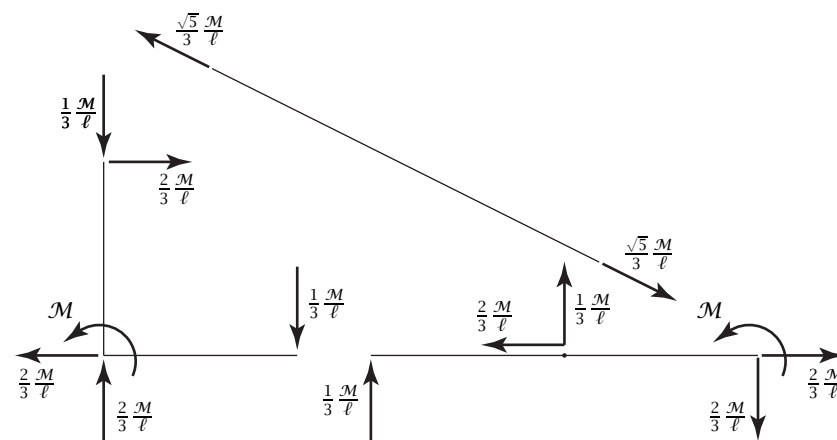


Figura 2.15: Reazioni interne ed esterne

delle sconnessioni in C, D e B hanno quali rette d'azione, rispettivamente, la verticale per C, la retta per E e D, e una retta parallela agli assi dei pendoli del doppio pendolo in B. Con riferimento allo schema di fig. 2.14a, le prime due si incontrano nel punto G da dove deve passare anche la retta d'azione della reazione del doppio pendolo. Resta così completamente determinato il poligono delle pressioni del sistema di travi.

Ciò stabilito, si consideri ora l'equilibrio globale. Dovendo equilibrare la coppia antioraria M , le reazioni dell'appoggio in A e del doppio pendolo in B devono costituire una coppia oraria, di forze parallele agli assi dei pendoli del doppio pendolo e di braccio $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ell$. Risulta quindi:

$$R_A = R_B = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{M}{\ell}. \quad (2.4)$$

Il poligono delle forze riportato in fig. 2.14b determina le reazioni del pendolo in C e del pendolo ED, completando così il calcolo delle reazioni interne ed esterne. Tale soluzione è riportata nello schema di fig. 2.15, dove risulta anche semplice la verifica dell'equilibrio.³

In fig. 2.16 è poi riportato il diagramma del momento flettente. Sempre

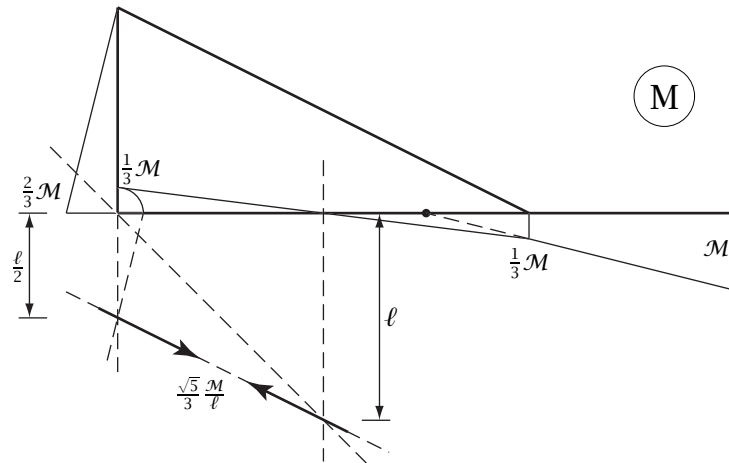
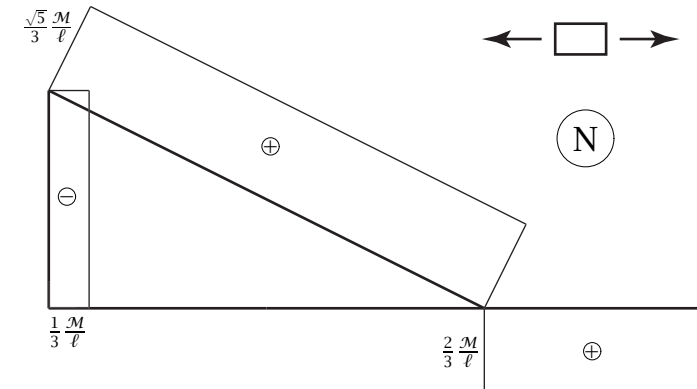


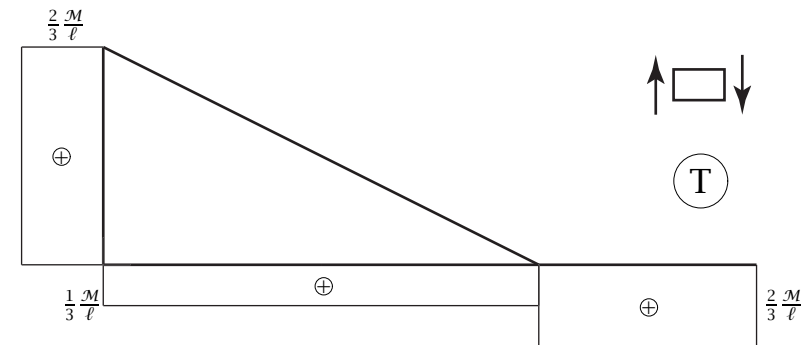
Figura 2.16: Diagramma del momento flettente

nella fig. 2.16 sono anche mostrate a sinistra la risultante della reazione del pendolo ED e della coppia applicata in A, e a destra la risultante della reazione del pendolo in C e della reazione in A, risultanti che devono essere uguali ed opposte. Mandando dall'intersezione della retta d'azione di tali risultanti con il prolungamento del tratto EA una retta parallela al diagramma del momento nel tratto EA, si ottiene in A il valore che il momento flettente ha immediatamente a destra di A nel tratto AC.

Nelle fig. 2.17a e 2.17b sono infine riportati i diagrammi della forza normale e del taglio rispettivamente.



(a) Forza normale



(b) Taglio

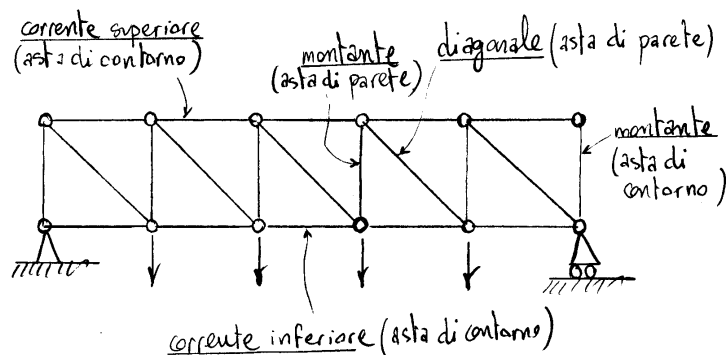
Figura 2.17: Diagrammi della forza normale e del taglio

³È sempre consigliabile di riportare la soluzione, comunque ottenuta, in uno schema riassuntivo del tipo di quello di fig. 2.15, che tra l'altro permette un semplice controllo dell'equilibrio e quindi della validità della stessa soluzione.

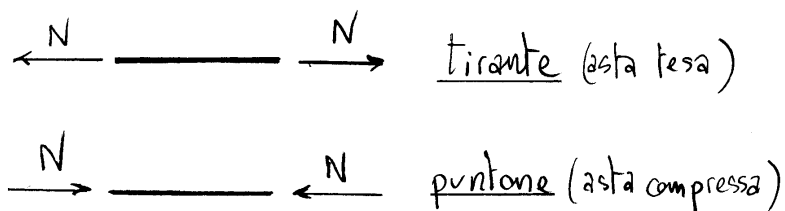
2.5 Travature reticolari isostatiche

Si consideri un sistema composto di travi ad asse rettilineo incerniate nei nodi. Se il sistema non è labile internamente, viene detto *travatura reticolare*. Le travi che compongono le travature reticolari sono tradizionalmente denominate *aste*.

Se una travatura reticolare è caricata solo nei nodi, è soggetta internamente alla sola forza normale.



Le aste di una travatura reticolare, soggetta a date forze, sono distinte in tiranti e puntoni a seconda che siano rispettivamente tese oppure compresse.



Si consideri una travatura reticolare piana con nodi cerniera. Ogni singolo nodo se considerato libero nel piano possiede due gradi di libertà per cui l'insieme dei nodi della travatura, considerati liberi, possiede $2n$ gradi di libertà, se n è il numero dei nodi. Ogni asta, considerata rigida, introduce un grado di vincolo per cui i gradi di libertà dei nodi vincolati dalle aste risultano almeno $2n - a$, se a è il numero delle aste. Condizione necessaria affinché la travatura reticolare sia internamente isostatica è dunque:

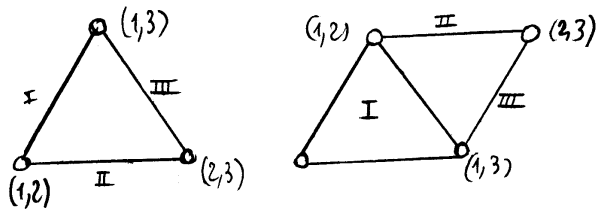
$$2n - a = 3,$$

poiché 3 devono essere i suoi gradi di libertà nel piano.

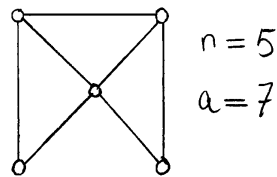
Se la travatura reticolare è di tipo triangolato, cioè se è possibile generarla a partire da un triangolo per successiva aggiunta di due aste ed un nodo costituenti un ulteriore triangolo, essa è senz'altro

isostatica internamente.

Infatti sia dato un sistema di tre aste costituenti un triangolo e in cernierate alle estremità. Con riferimento alla figura, le aste II e III, per poter subire un moto relativo rispetto all'asta I, devono ruotare attorno ai punti (1,2) e (1,3) rispettivamente. Ma in tal caso il punto (2,3) subirebbe un diverso spostamento nei due moti rigidi relativi che pertanto non sono ammissibili. Se si aggiungono due aste generando un ulteriore triangolo, si può ripetere il ragionamento considerando i moti rigidi delle due aste aggiunte rispetto al triangolo di partenza, e così via.

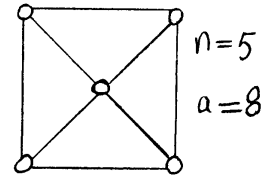


Se si genera un triangolo aggiungendo una sola asta la struttura diventa una volta iperstatica internamente.



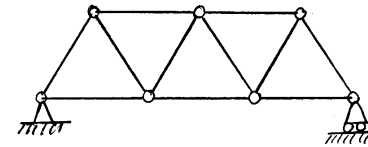
isostatica internamente

$$2n - a = 3$$

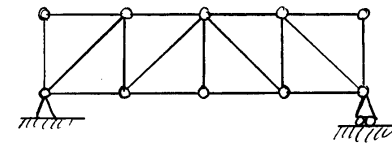


una volta iperstatica internamente

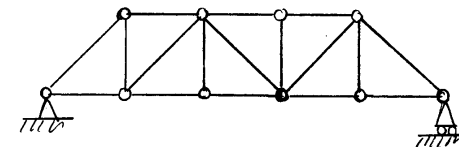
$$2n - a = 2$$



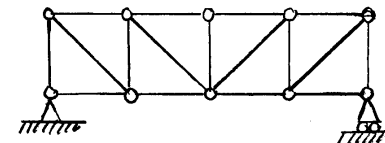
Travatura Neville



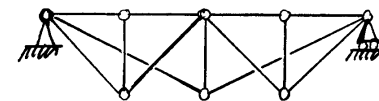
Travatura Howe



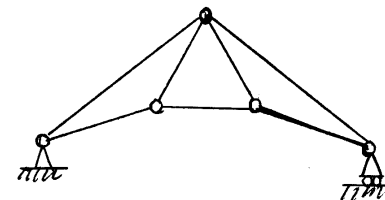
Travatura Pratt



Travatura Mohnie



Travatura Fink



Capriata semplice

2.5.1 Metodo dell'equilibrio dei nodi

Si scrivono due equazioni di equilibrio alla traslazione per ogni nodo. Si hanno così a disposizione $2n$ equazioni. Le incognite sono le 3 reazioni dei vincoli esterni e gli a sforzi normali nelle aste. Se la struttura è isostatica risulta

$2n = a + 3$, cioè il numero delle equazioni uguale al numero delle incognite. Non solo, se la struttura è isostatica, cioè se le aste sono anche ben disposte, allora la matrice dei coefficienti del sistema di equazioni è senz'altro invertibile e il sistema risolvibile in modo unico. È anche possibile

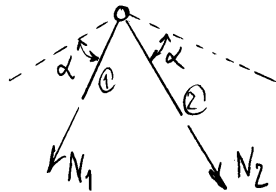
procedere predeterminando le reazioni dei vincoli esterni tramite le equazioni di equilibrio globale procedendo poi via equilibrio dei nodi. In tal caso tre delle $2n$ equazioni diventano identicamente soddisfatte e permettono un controllo dei risultati.

Se in un nodo convergono solo due aste di cui siano incogniti gli sforzi normali, le due equazioni di equilibrio permettono di determinare tali sforzi indipendentemente dalle altre equazioni di equilibrio. Se, una volta predeterminate le reazioni dei vincoli esterni, risulta possibile risolvere la struttura reticolare partendo da un nodo in cui convergono solo due aste e procedendo poi via equilibrio di nodi in cui convergono solo due aste con sforzi incogniti, si dice

che la trave è a nodi canonici. In tal caso è possibile risolvere graficamente ogni singolo nodo tracciando un poligono delle forze.

Casi particolari

Se in un nodo non soggetto a carichi esterni (nodo scarico) convergono solo due aste, lo sforzo normale nelle due aste è nullo (aste scariche):



Oppure:

L'equilibrio sotto due forze sussiste se e solo se le due forze hanno stessa retta d'azione, modulo uguale e verso opposto.

Infatti:

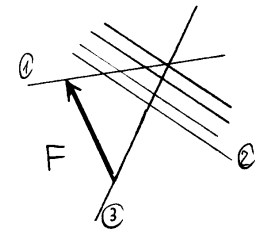
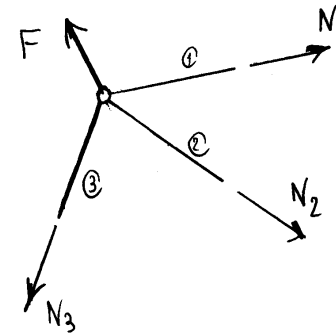
Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ②:

$$N_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = 0$$

Equilibrio alla traslazione del nodo nella direzione ortogonale all'asta ①:

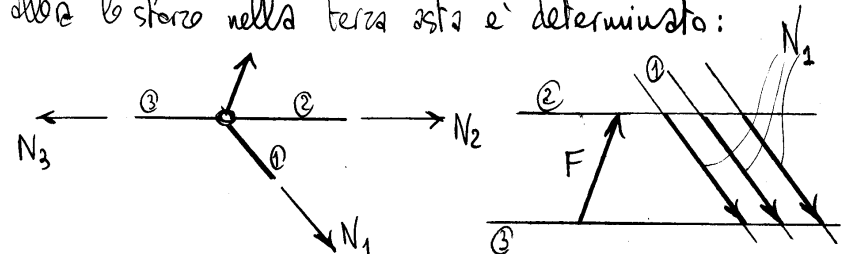
$$N_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_2 = 0$$

Se in un nodo convergono tre aste resta una indeterminazione:

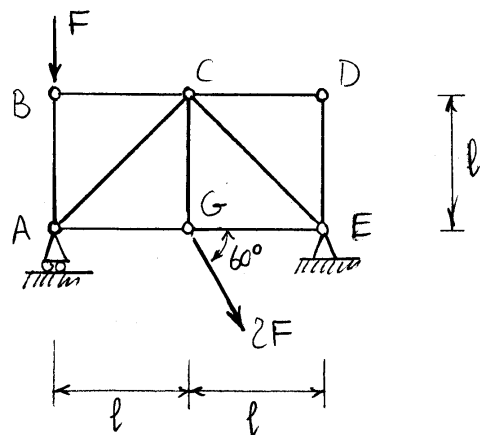


Tracciata due parallele alle aste dalle due estremità della forza F è possibile tracciare infinite parallele alla terza asta in modo che l'equilibrio di nodo sia soddisfatto.

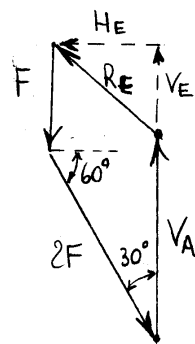
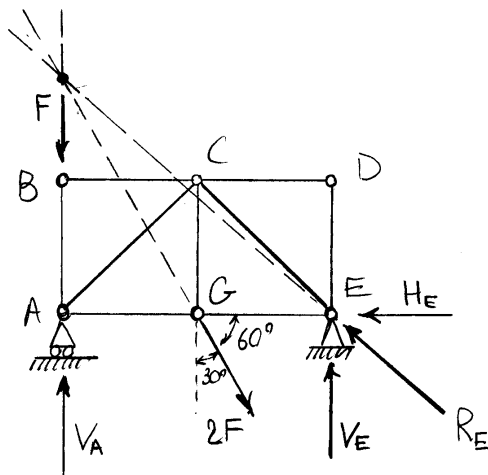
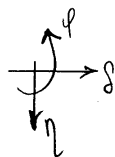
Se due di tre aste convergenti in un nodo sono allineate allora lo sforzo nella terza asta è determinato:



Esempio



$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2 \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$



Equilibrio globale (3 incognite):

$$-H_E + 2F \sin 30^\circ = 0 \quad (\text{traslazione orizzontale})$$

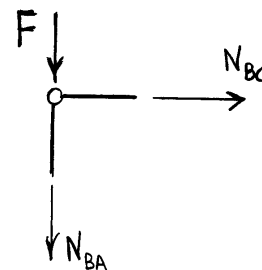
$$V_E 2l - 2F \cos 30^\circ l = 0 \quad (\text{rotazione attorno ad A})$$

$$\begin{cases} H_E = F \\ V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} F \end{cases} \Rightarrow R_E = \frac{\sqrt{7}}{2} F$$

$$-V_A + 2F \cos 30^\circ + F - V_E = 0 \quad (\text{traslazione verticale})$$

$$V_A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$$

Equilibrio nodo B (due incognite):

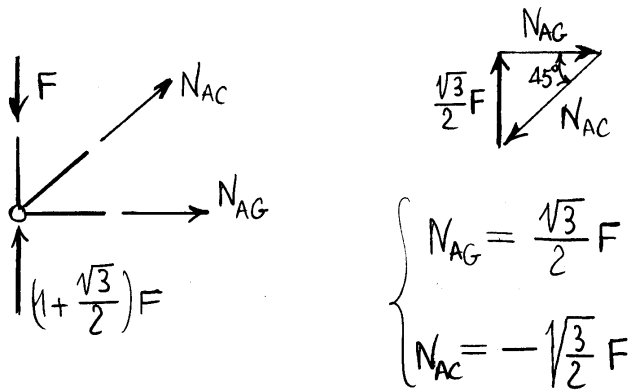


$$\begin{cases} N_{BC} = 0 \\ N_{BA} = -F \end{cases}$$

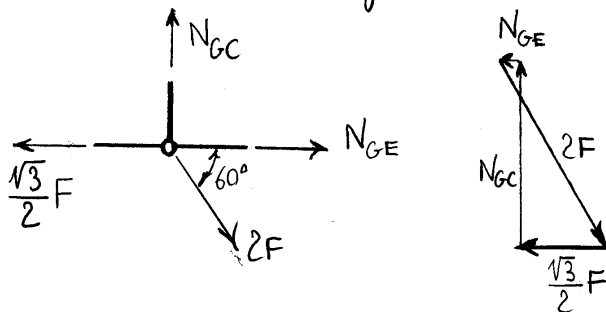
Equilibrio nodo D (due incognite):

$$\begin{cases} N_{DC} = 0 \\ N_{DE} = 0 \end{cases} \quad (\text{Nodo scario})$$

Equilibrio nodo A (due incognite):

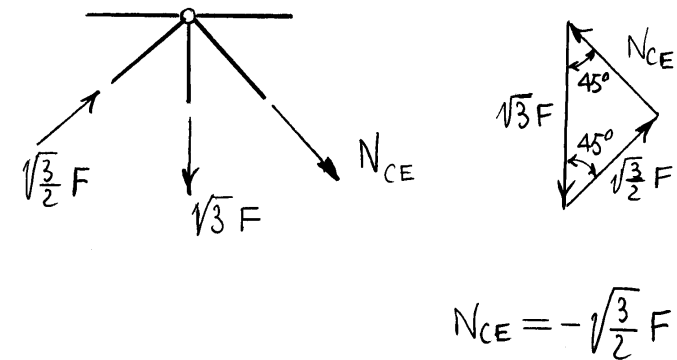


Equilibrio nodo G (due incognite):

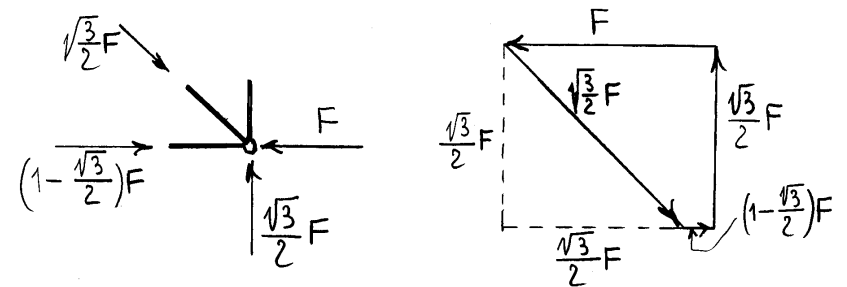


$$\begin{cases} N_{GE} = -(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})F \\ N_{GC} = \sqrt{3}F \end{cases}$$

Equilibrio nodo C (una sola incognita)



Equilibrio nodo E (nessuna incognita)

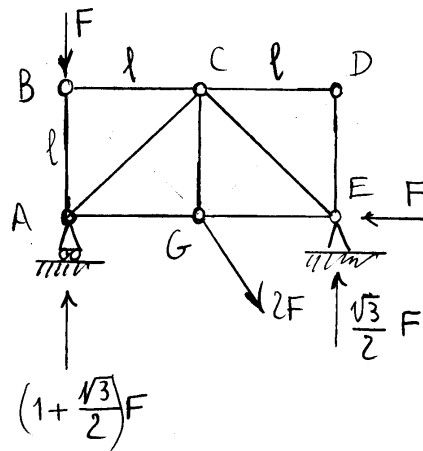


Aste		Tipo	Forza normale
Corrente inferiore	AG	tirante	$\frac{\sqrt{3}}{2} F$
	GE	puntone	$(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) F$
Corrente superiore	BC	scarica	0
	CD	scarica	0
Montanti	AB	puntone	F
	GC	tirante	$\sqrt{3} F$
	ED	scarica	0
Diagonali	AC	puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2} F$
	EC	puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2} F$

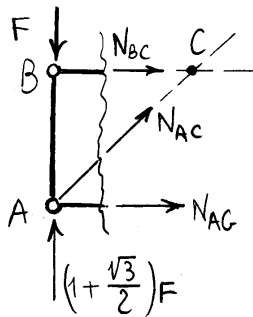
2.5.2 Metodo delle sezioni di Ritter

È un metodo che, se applicabile, permette di determinare la forza normale in un'asta se sono note le reazioni dei vincoli esterni. Per fare ciò basta, se possibile, dividere in due parti la travata reticolare sezionando tre aste, tra le quali quella di cui si vuole determinare la forza normale. Le due restanti aste o si incontrano in un punto, e quindi è possibile determinare la forza normale richiesto scrivendo l'equilibrio alla rotazione rispetto a tale punto di una delle due parti della travata reticolare, oppure sono parallele ed è quindi possibile scrivere l'equilibrio alla traslazione nella direzione perpendicolare all'asse delle due aste.

Esempio



Determiniamo, via metodo delle sezioni, la forza normale N_{AG} nell'asta AG:

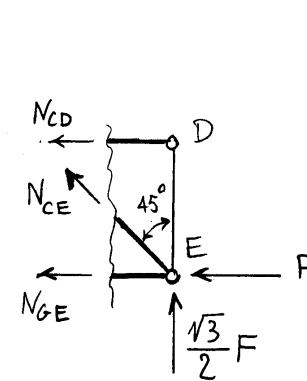


Equilibrio alla rotazione
attorno al punto C:

$$N_{AG} l - \frac{\sqrt{3}}{2} F l = 0$$

$$N_{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} F$$

Determiniamo ora, sempre via metodo delle sezioni, la forza normale N_{CE} nell'asta CE:



Equilibrio alla
trazione verticale:

$$N_{CE} \cos 45^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} F = 0$$

$$N_{CE} = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

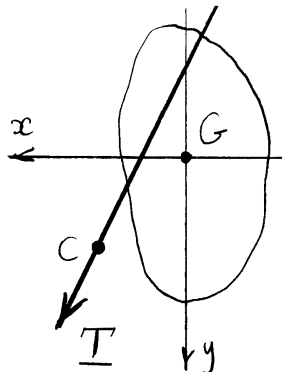
TRAVI ELASTICHE LINEARI

3.1 Equazioni della teoria tecnica delle travi

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \Theta \underline{e}_z + \underline{\kappa}_f = \frac{d\varphi}{ds} \\ \underline{\varepsilon} \underline{e}_z + \underline{\gamma}_c - \Theta \underline{e}_z \times (C - G) = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \varphi \times \underline{e}_z \end{cases},$$

poichè $\mathbf{y} = \mathbf{y}_C - \Theta \mathbf{e}_z \times (C - G)$.



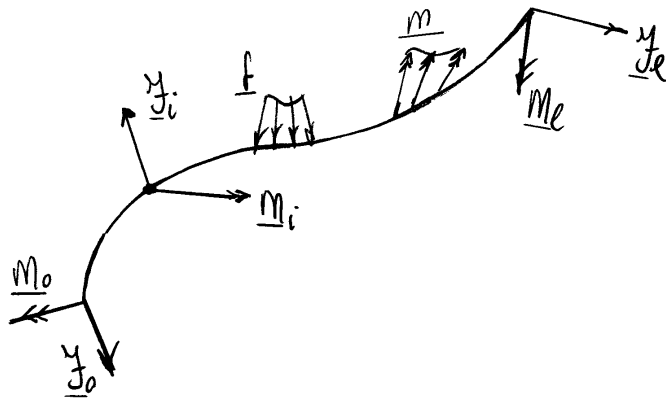
Si ottiene:

$$\begin{cases} \Theta = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\kappa}_f = \frac{d\varphi}{ds} - \left(\frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \\ \underline{\varepsilon} = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_z \\ \underline{\gamma}_c = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z - \varphi \times \underline{e}_z + \left(\frac{d\varphi}{ds} \cdot \underline{e}_z \right) \underline{e}_z \times (C - G) \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} (N \underline{e}_z + T) + \underline{f} = \underline{Q} \\ \frac{d}{ds} (M_C \underline{e}_z + (C - G) \times T + M_f) + \underline{m} + \underline{e}_z \times T = \underline{Q} \end{cases},$$

poichè $M_C \underline{e}_z = M_C \underline{e}_z + (C - G) \times T$.



Equazioni di equilibrio al contorno

$$\begin{cases} N e_x + T \Big|_{s=0} = - y_0 \\ M_c e_x + (C-G) \times T + M_f \Big|_{s=0} = - m_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N e_x + T \Big|_{s=l} = y_l \\ M_c e_x + (C-G) \times T + M_f \Big|_{s=l} = m_l \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N e_x + \Delta T)_i + y_i = 0 \\ (\Delta M_c e_x + (C-G) \times \Delta T + \Delta M_f)_i + m_i = 0 \end{cases}$$

Legami costitutivi

$$\begin{cases} N = EA \epsilon \\ M_f = EJ \kappa_f \end{cases} \quad \begin{cases} M_c = GJ_t \Theta \\ T = GA \chi^{-1} \chi_c \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{cases} L_{ve} = \int_l (f \cdot u + m \cdot \varphi) ds + y_0 \cdot u_0 + m_0 \cdot \varphi_0 \\ \quad + y_l \cdot u_l + m_l \cdot \varphi_l + \sum_i (y_i \cdot u_i + m_i \cdot \varphi_i) \\ L_{vi} = \int_l (N \epsilon + M_f \cdot \kappa_f + M_c \Theta + T \cdot \chi_c) ds \end{cases}$$

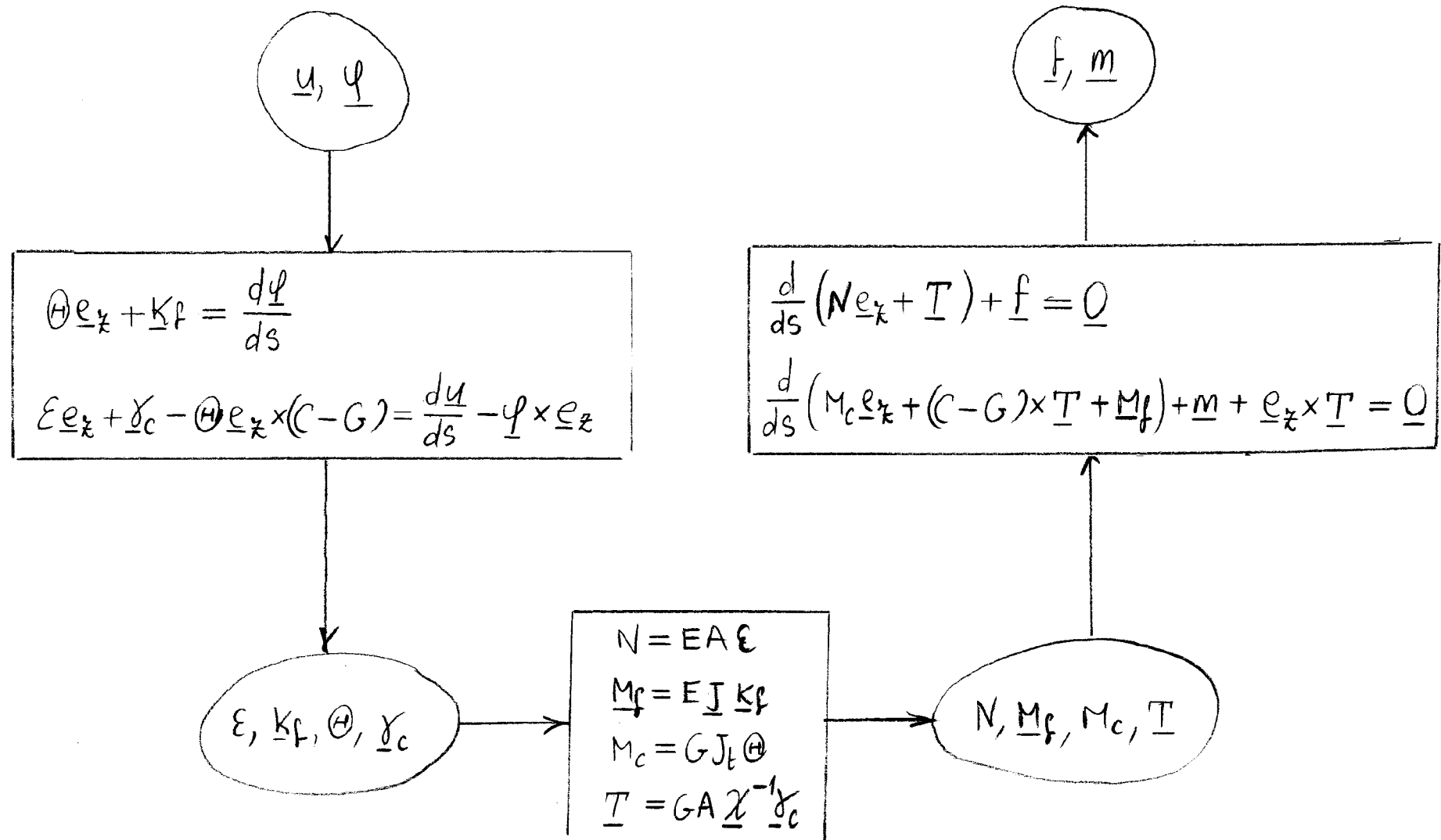
Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} (EA \epsilon^2 + EJ \kappa_f^2 + GJ_t \Theta^2 + GA \chi_c \cdot \chi^{-1} \chi_c)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{1}{E} M_f \cdot J^{-1} M_f + \frac{M_c^2}{GJ_t} + \frac{1}{GA} T \cdot \chi T \right)$$

Diagramma teoria tecnica delle travi



3.1.1 Trave di Timoshenko

Trave piana elastica lineare ad asse rettilineo.

Forze esterne

Forze distribuite : q, p

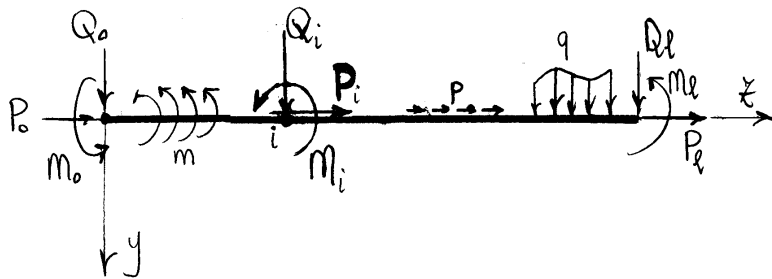
Momenti distribuiti : m

Forze concentrate: Q, P

Momenti concentrati: M

Forze e momenti alle due estremità:

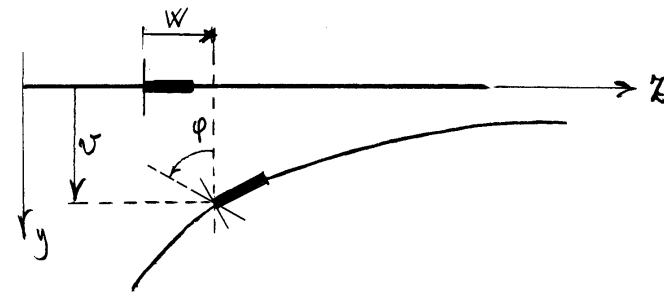
$Q_0, P_0, M_0; Q_\ell, P_\ell, M_\ell$



Variabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse: v, w

Rotazione della sezione: φ



Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse: ε

Curvatura flessionale: κ

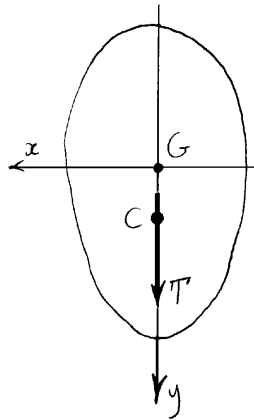
Scorrimento tra linea d'asse e sezione retta: γ

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{dz} \\ \gamma = \varphi + \frac{dv}{dz} \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 \\ \frac{dM}{dz} + m = 0 \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio al contorno:

$$\begin{cases} N(0) = -P_0 \\ T(0) = -Q_0 \\ M(0) = -M_0 \end{cases} \quad \begin{cases} N(l) = P_l \\ T(l) = Q_l \\ M(l) = M_l \end{cases}$$

Equazioni di discontinuità

$$\begin{cases} (\Delta N)_i + P_i = 0 \\ (\Delta T)_i + Q_i = 0 \\ (\Delta M)_i + M_i = 0 \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$L_e = \int_0^l (p w + q v + m \varphi) dz \\ + P_0 w_0 + Q_0 v_0 + M_0 \varphi_0 + P_l w_l + Q_l v_l + M_l \varphi_l \\ + \sum_i (P_i w_i + Q_i v_i + M_i \varphi_i)$$

$$L_i = \int_0^l (N \varepsilon + M \kappa + T \gamma) dz$$

Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} \left(EA \varepsilon^2 + EJ \kappa^2 + \frac{GA}{\chi} \gamma^2 \right)$$

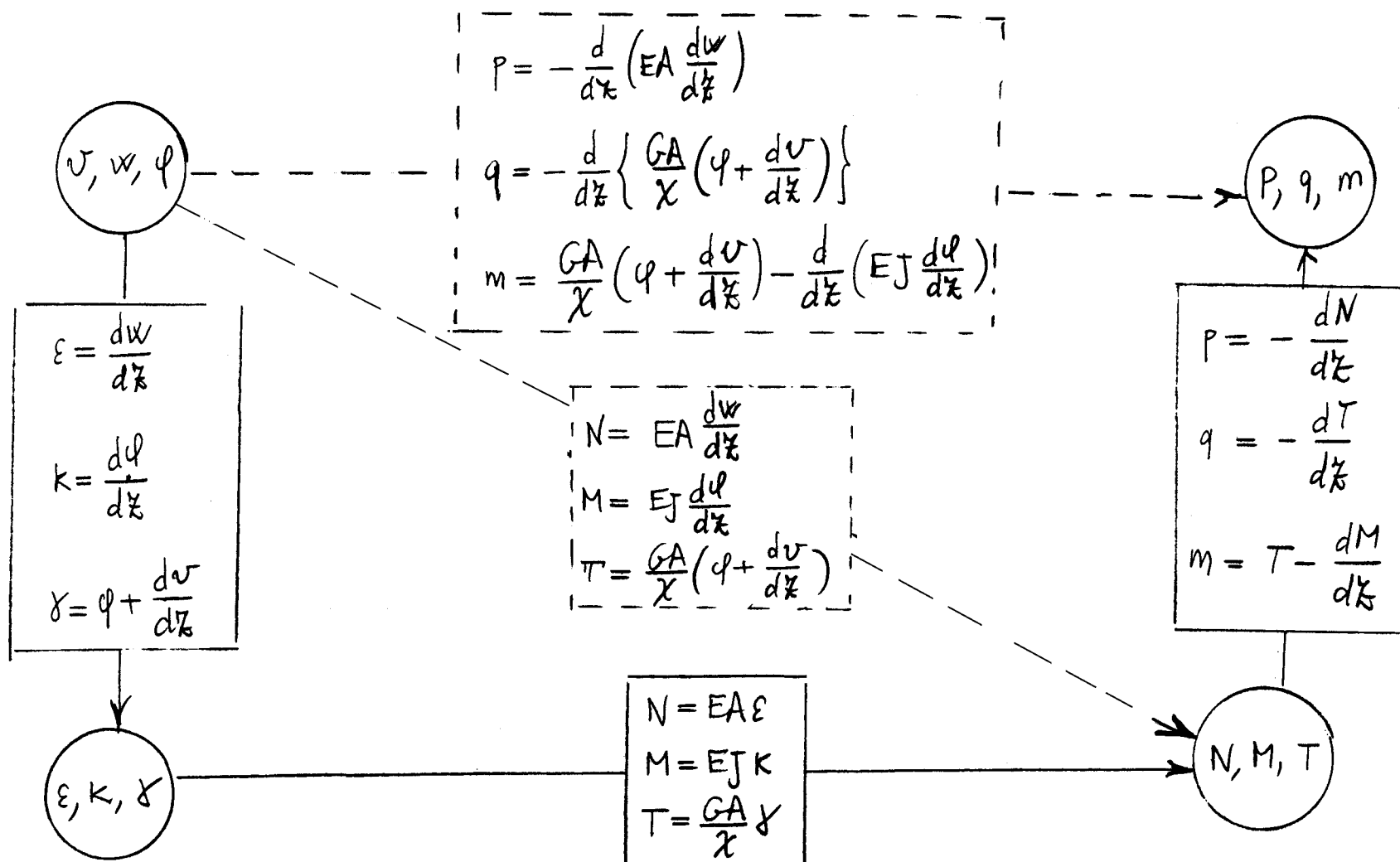
Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} + \chi \frac{T^2}{GA} \right)$$

Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon \\ M = EJ \kappa \\ T = \frac{GA}{\chi} \gamma \end{cases}$$

Diagramma trave di Timoshenko



Equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d}{dz} \left\{ \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) \right\} + q = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) + m = 0 \end{cases}$$

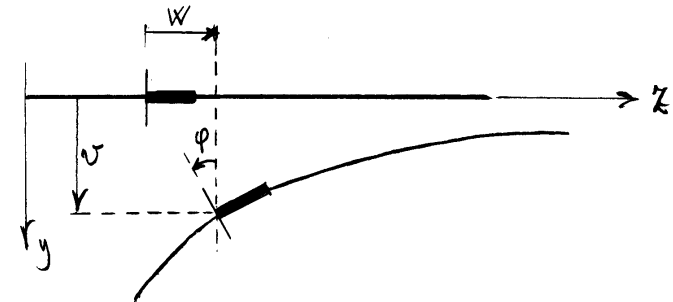
Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ M = EJ \frac{d\varphi}{dz} \\ T = \frac{GA}{\chi} \left(\varphi + \frac{dv}{dz} \right) \end{cases}$$

3.1.2 Trave piana inflessa

Variabili cinematiche

Spostamenti dei punti della linea d'asse: v, w



Vincolo interno sulla rotazione φ della sezione

$$\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = - \frac{dv}{dz}$$

Deformazioni

Dilatazione della linea d'asse: ϵ

Curvatura flessionale: κ

Equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{dw}{dz} \\ \kappa = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2} \end{cases}$$

Taglio in funzione dei momenti esterni ed interni

$$T = m + \frac{dM}{dz} \Rightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{dm}{dz} + \frac{d^2M}{dz^2}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + p = 0 \\ \frac{d^2M}{dz^2} + \frac{dm}{dz} + q = 0 \end{cases}$$

Principio dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} \int_0^l m \varphi \, dz &= - \int_0^l m \frac{dv}{dz} \, dz \\ &= \int_0^l \frac{dm}{dz} v \, dz - [m v]_0^l \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^l (q v + m \varphi) \, dz + Q_0 v(0) + Q_l v(l) &= \\ &= \int_0^l \left(q + \frac{dm}{dz} \right) v \, dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + (Q_l - m(l)) v(l) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^l (q v + p w + m \varphi) \, dz \\ &\quad + Q_0 v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) + Q_l v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i) = \\ &= \int_0^l \left\{ \left(q + \frac{dm}{dz} \right) v + p w \right\} \, dz \\ &\quad + (Q_0 + m(0)) v(0) + P_0 w(0) + M_0 \varphi(0) \\ &\quad + (Q_l - m(l)) v(l) + P_l w(l) + M_l \varphi(l) \\ &\quad + \sum_i (Q_i v_i + P_i w_i + M_i \varphi_i) , \end{aligned}$$

$$L_i = \int_0^l (N \varepsilon + M \kappa) \, dz$$

Energia elastica di deformazione

$$\phi = \frac{1}{2} (EA \varepsilon^2 + EJ \kappa^2)$$

Energia elastica complementare

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} \right)$$

Equazioni di legame

$$\begin{cases} N = EA \varepsilon \\ M = EJ \kappa \end{cases}$$

Tali equazioni impongono $N=0$ e $M=0$

se $\varepsilon=0$ e $\kappa=0$, cioè se la trave è indeformata.

Questo significa che tali equazioni sono valide sotto

l'ipotesi che la configurazione di riferimento coincida

con la configurazione naturale della trave, che

rappresenta appunto quella configurazione in corrispondenza

della quale le sollecitazioni interne si annullano.

Equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = \left(q + \frac{dm}{dz} \right) \end{cases}$$

Equazioni che permettono di imporre le condizioni al contorno

$$\begin{cases} T - m = - \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

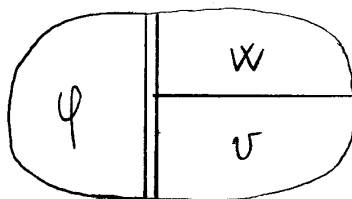
condizioni al contorno

$$\begin{cases} EA w'(0) = -P_0 \\ EJ v''(0) = M_0 \\ (EJ v'')'(0) = Q_0 + m_0 \\ EA w'(\ell) = P_\ell \\ EJ v''(\ell) = -M_\ell \\ (EJ v'')'(\ell) = -(Q_\ell - m_\ell) \end{cases}$$

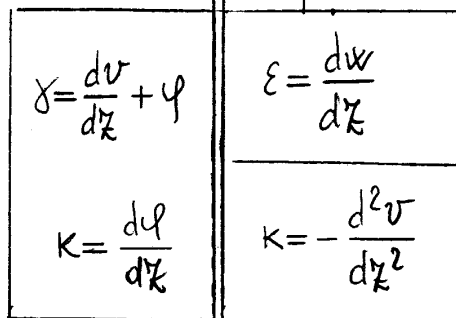
Diagramma trave piana inflessa ad asse rettilineo

VARIABILI CINEMATICHE

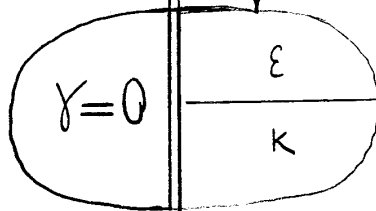
spostamenti
generalizzati:



Equazioni
di
congruenza



caratteristiche
della
deformazione



$$\frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) = -p$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = -q - \frac{dm}{dz}$$

Equazioni fondamentali

$$EA \frac{dw}{dz} = N$$

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi$$

$$EJ \frac{d^2v}{dz^2} = -M$$

$$\frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) = -T + m$$

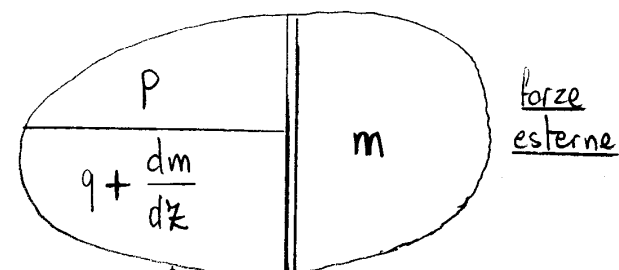
Condizioni al contorno

$$N = EA \epsilon$$

$$M = EJ \kappa$$

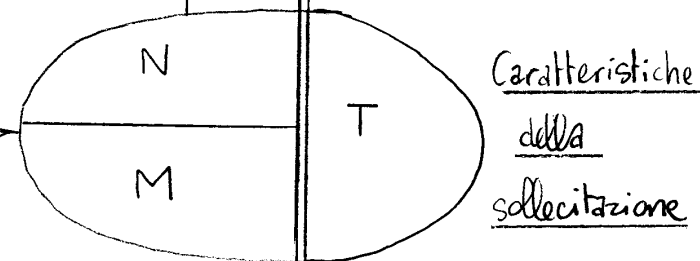
legami costitutivi

VARIABILI STATICHE



Equazioni di equilibrio

$\frac{dN}{dz} = -p$	$\frac{dM}{dz} - T = -m$
$\frac{d^2M}{dz^2} = -q - \frac{dm}{dz}$	$\frac{dT}{dz} = -q$



Se $m=0$ le equazioni divergono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + p = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = - \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \right) \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ N = EA \frac{dw}{dz} \end{cases}$$

Travi elastiche inflesse omogenee a sezione costante ($m=0$)

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 w}{dz^2} + p = 0 \\ EJ \frac{d^4 v}{dz^4} = q \end{cases}$$

Se $p=q=0$

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \\ \frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \end{cases}$$

In entrambi i casi :

$$\begin{cases} N = EA \frac{dw}{dz} \\ \varphi = - \frac{dv}{dz} \\ M = - EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \\ T = - EJ \frac{d^3 v}{dz^3} \end{cases}$$

Diagramma relativo al problema dello sforzo assiale

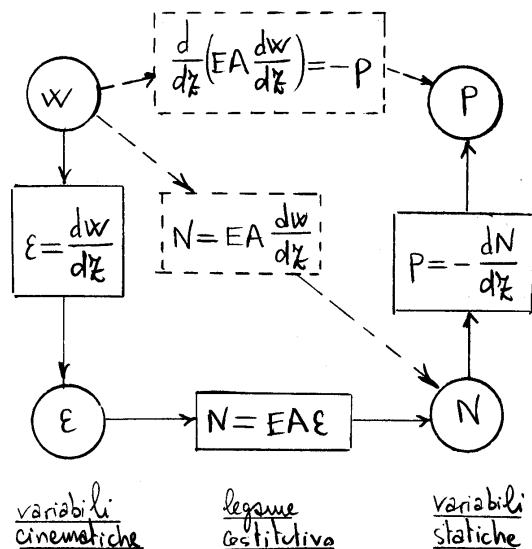
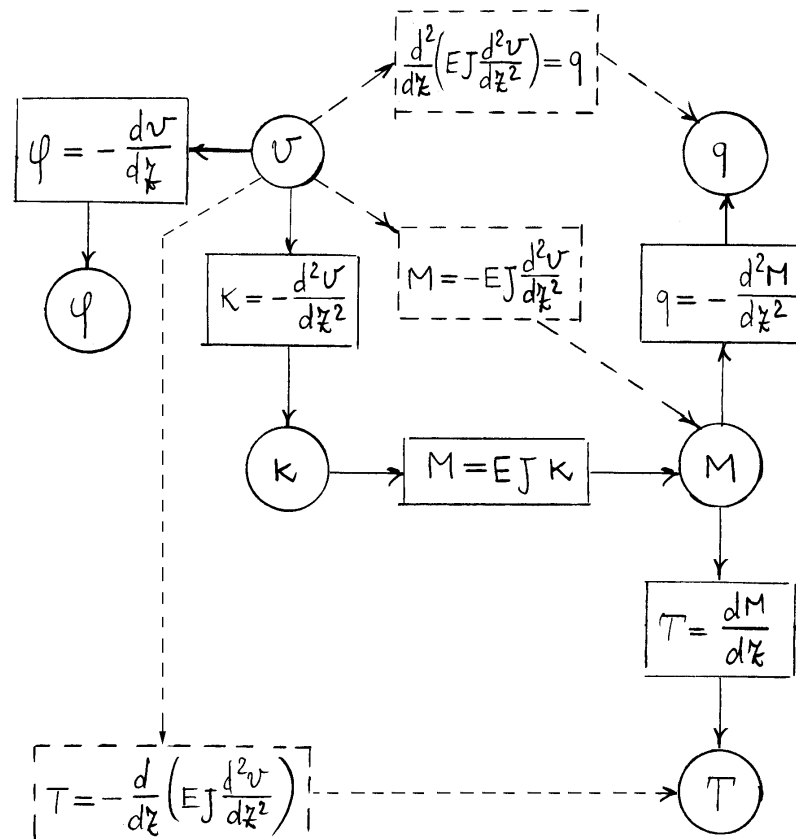


Diagramma relativo al problema flessionale ($m=0$)



3.1.3 Sovrapposizione degli effetti

Sia data una trave, un primo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno e infine un secondo sistema di forze applicate e di condizioni al contorno. La soluzione (in termini delle caratteristiche della sollecitazione, delle caratteristiche della deformazione e degli spostamenti) corrispondente ai due sistemi di forze agenti contemporaneamente e alla somma delle condizioni al contorno è uguale alla somma delle soluzioni corrispondenti ai due sistemi di forze agenti separatamente, ognuno con le proprie condizioni al contorno (additività).

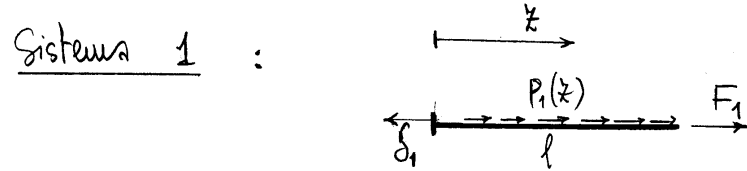
Inoltre, la soluzione corrispondente a un sistema di forze e condizioni al contorno, amplificate

entrambe da uno scalare α arbitrario, si ottiene amplificando, sempre tramite α , la soluzione che corrisponde al sistema di forze e condizioni al contorno non amplificate (omogeneità di grado 1).

Queste due proprietà sono la conseguenza della linearità delle equazioni che reggono il problema e del fatto che le equazioni indefinite di equilibrio sono scritte (per l'ipotesi delle piccole deformazioni) nella configurazione indeformata, che dunque non cambia al variare del sistema di forze applicate.

È chiaro che le condizioni al contorno, nei due sistemi, devono essere dello stesso tipo per poter essere sommate.

Come esempio, verifichiamo le due proprietà nel caso di trave rettilinea soggetta a sole forze di tipo assiale.

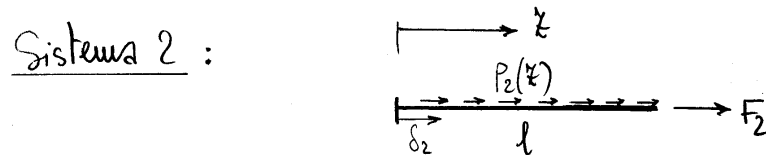


La soluzione $w_1(z)$, $\varepsilon_1(z)$, $N_1(z)$ soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_1}{dz} = \varepsilon_1, \quad N_1 = EA\varepsilon_1, \quad \frac{dN_1}{dz} + p_1 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_1(0) = -\delta_1, \quad N(l) = F_1$$



La soluzione $w_2(z)$, $\varepsilon_2(z)$, $N_2(z)$ soddisfa le equazioni :

$$\frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_2, \quad N_2 = EA\varepsilon_2, \quad \frac{dN_2}{dz} + p_2 = 0,$$

e le condizioni al contorno :

$$w_2(0) = \delta_2, \quad N_2(l) = F_2.$$

Sistema 1 + Sistema 2

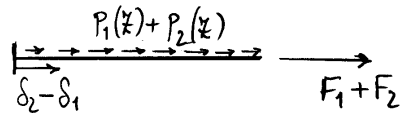
Le funzioni $w_1(z) + w_2(z)$, $\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z)$, $N_1(z) + N_2(z)$ soddisfano le equazioni :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(w_1 + w_2) = \frac{dw_1}{dz} + \frac{dw_2}{dz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ N_1 + N_2 = EA\varepsilon_1 + EA\varepsilon_2 = EA(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \frac{d}{dz}(N_1 + N_2) + (p_1 + p_2) = \left(\frac{dN_1}{dz} + p_1\right) + \left(\frac{dN_2}{dz} + p_2\right) = 0 \end{cases},$$

e le condizioni al contorno :

$$\begin{cases} (w_1 + w_2)_{z=0} = w_1(0) + w_2(0) = \delta_2 - \delta_1 \\ (N_1 + N_2)_{z=l} = N_1(l) + N_2(l) = F_1 + F_2 \end{cases},$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al sistema di forze e condizioni al contorno somma dei due sistemi:



Sistema 1 amplificato di α

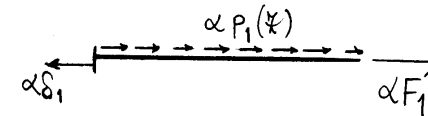
Le funzioni $\alpha w_1(z)$, $\alpha \varepsilon_1(z)$, $\alpha N_1(z)$ soddisfanno le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\alpha w_1) = \alpha \frac{dw_1}{dz} = \alpha \varepsilon_1 \\ \alpha N_1 = \alpha EA \varepsilon_1 = EA(\alpha \varepsilon_1) \\ \frac{d}{dz}(\alpha N_1) + \alpha p_1 = \alpha \left(\frac{dN_1}{dz} + p_1 \right) = 0 \end{cases}$$

e le condizioni al contorno:

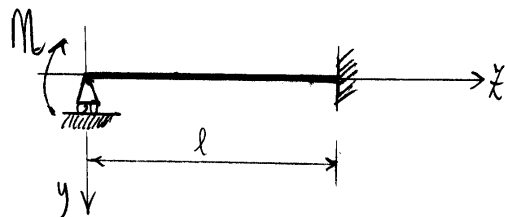
$$\begin{cases} (\alpha w_1)_{z=0} = \alpha w_1(0) = -\alpha \delta_1 \\ (\alpha N_1)_{z=l} = \alpha N_1(l) = \alpha F_1 \end{cases}$$

e dunque sono la soluzione corrispondente al primo sistema di forze e condizioni al contorno amplificato tramite lo scalare α :



3.2 Integrazione dell'equazione della linea elastica

3.2.1 Trave incastro appoggio



$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 & \Rightarrow w = a_1 x + a_2 \\ \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 & \Rightarrow \begin{cases} v = b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 \\ \varphi = -3b_1 x^2 - 2b_2 x - b_3 \\ M = -EJ(6b_1 x + 2b_2) \\ T = -6b_1 EJ \end{cases} \end{cases}$$

Condizioni al contorno geometriche (essenziali):

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ \varphi(l) = 0 \\ w(l) = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno statiche (naturali):

$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ M(0) = M \end{cases}$$

$$N(0) = 0 \Rightarrow EA \frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow b_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow b_1 l^3 + b_2 l^2 + b_3 l = 0$$

$$\varphi(l) = 0 \Rightarrow -3b_1 l^2 - 2b_2 l - b_3 = 0$$

$$M(0) = M \Rightarrow -2b_2 EJ = M \Rightarrow b_2 = -\frac{M}{2EJ}$$

$$\begin{cases} b_1 l^2 + b_3 = \frac{1}{2} \frac{Ml}{EJ} \\ 3b_1 l^2 + b_3 = \frac{Ml}{EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \frac{M}{EJl} \\ b_3 = \frac{1}{4} \frac{Ml}{EJ} \end{cases}$$

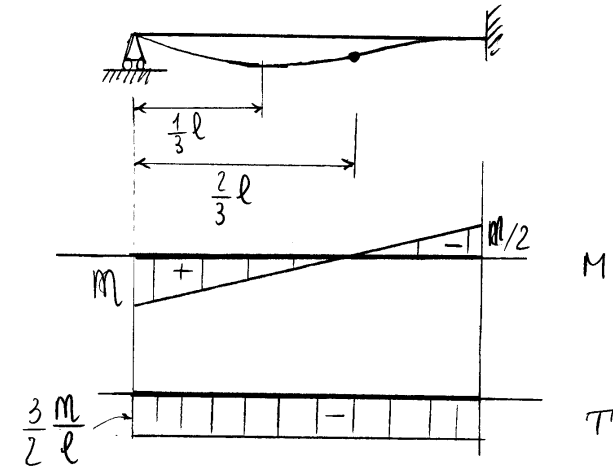
Soluzione del problema assiale:

$$\begin{cases} w=0 \\ N=0 \end{cases}$$

Soluzione del problema flessionale:

$$\begin{cases} v = \frac{Mz^3}{4EJl} - \frac{Mz^2}{2EJ} + \frac{Mlz}{4EJ} \\ \varphi = -\frac{3}{4} \frac{Mz^2}{EJl} + \frac{Mz}{EJ} - \frac{Ml}{4EJ} \\ M = -\frac{3Mz}{2l} + M \\ T = -\frac{3}{2} \frac{M}{l} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0 &\Rightarrow z^2 - 2\left(\frac{2}{3}l\right)z + \frac{l^2}{3} = 0 \\ &\Rightarrow z = \frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{4}{9}l^2 - \frac{1}{3}l^2} \\ &= \frac{2}{3}l \pm \frac{1}{3}l = \begin{cases} l \\ \frac{1}{3}l \end{cases} \end{aligned}$$



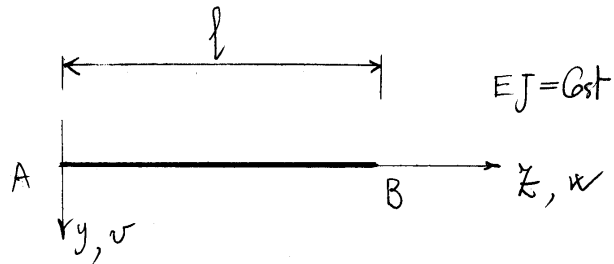
$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{2}{3}l$$

$$v_{\max} = v\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{Ml^2}{27EJ}$$

$$\varphi(0) = -\frac{Ml}{4EJ}$$

3.2.2 Trave soggetta a sole condizioni cinematiche al contorno

Integrazione della linea elastica nel caso in cui non agiscano forze distribuite e le condizioni al contorno sono tutte sugli spostamenti:



$$\frac{d^4 v}{dz^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \\ \varphi = -3a_1 z^2 - 2a_2 z - a_3 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0 \Rightarrow w = a_5 z + a_6$$

$$\begin{cases} a_3 = -\varphi_A \\ a_4 = v_A \\ a_6 = w_A \end{cases}$$

$$w_B = a_5 l + w_A \Rightarrow a_5 = \frac{w_B - w_A}{l}$$

$$\begin{cases} v_B = a_1 l^3 + a_2 l^2 - \varphi_A l + v_A \\ \varphi_B = -3a_1 l^2 - 2a_2 l + \varphi_A \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 l^2 + a_2 l = \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_A \\ -3a_1 l^2 - 2a_2 l = \varphi_B - \varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 l^2 = 2 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + \varphi_A \\ a_2 l = 3 \frac{v_B - v_A}{l} + \varphi_B + 2\varphi_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \frac{v_B - v_A}{l^3} - \frac{\varphi_B + \varphi_A}{l^2} \\ a_2 = 3 \frac{v_B - v_A}{l^2} + \frac{\varphi_B + 2\varphi_A}{l} \end{cases}$$

Quindi, dati gli spostamenti v_A, w_A, φ_A del punto A e v_B, w_B, φ_B del punto B, la situazione statica e cinematica della trave è definita. Ovverossia, noti gli spostamenti delle

estremità della trave sono note la deformata e le caratteristiche della sollecitazione.

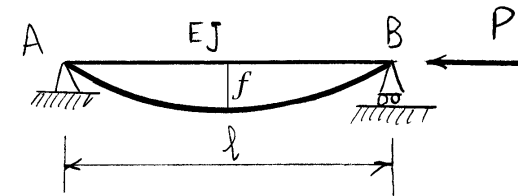
Si osservi che imporre degli spostamenti significa vincolare la trave: la trave è obbligata a subire tali spostamenti.

Per quanto precede, una trave elastica piana non soggetta a forze lungo l'asse della trave risulta un sistema a 6 gradi di libertà.

3.3 Aste snelle compresse

È esperienza comune che un'asta flessibile compressa non resti rettilinea ma subisca invece un'inflexione laterale. Questa inflessione compare fin dall'inizio dell'applicazione del carico e aumenta all'aumentare del carico. Questo tipo di problemi si inquadra nell'ambito degli studi sulla *biforcazione dell'equilibrio* e sull'*instabilità dell'equilibrio* delle strutture.

Lo schema tipico di riferimento è quello dell'*asta di Eulero*, un'asta elastica lineare con un appoggio fisso ad una estremità e un carrello all'altra estremità e soggetta ad una forza normale P di compressione in corrispondenza del carrello.



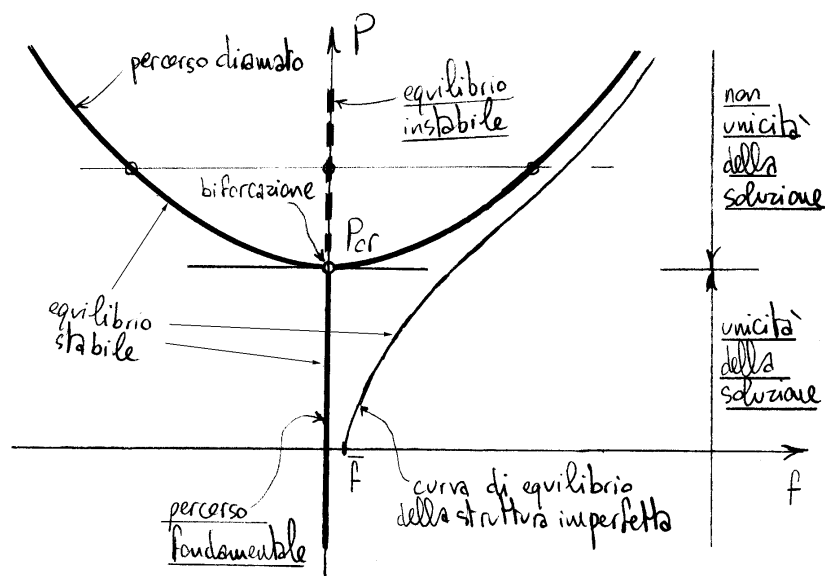
3.3.1 Biforcazione dell'equilibrio

Si consideri allora un'asta elastica lineare soggetta ad una forza normale P di compressione, per esempio l'asta di Eulero. Nell'analisi di questo tipo di problemi viene normalmente trascurata la deformabilità assiale dell'asta. In tale ipotesi la configurazione indeformata è equilibrata sotto l'azione del carico, qualunque sia il valore del carico. Viene così definito un *percorso di equilibrio fondamentale o naturale* nello spazio delle soluzioni che si ottiene aggiungendo la dimensione P del carico allo spazio (infinito dimensionale) delle configurazioni.

Il percorso di equilibrio fondamentale o naturale è l'unico percorso di equilibrio determinabile dalla teoria lineare, nell'ambito della quale la soluzione è unica. Se il problema dell'equilibrio di un'asta compressa, ancora considerata elastica lineare, viene affrontato mettendo in conto una cinematica finita, le teorie che si ottengono non sono lineari e si ottengono altri percorsi di equilibrio alcuni dei quali, se non tutti, intersecano il percorso fondamentale e per questo sono detti *percorsi di equilibrio biforcati o diramati*. Il valore del carico corrispondente alla intersezione di un percorso diramato con quello fondamentale è detto *carico critico*. Dal punto di vista strutturale il carico critico più importante è il primo carico critico, ovvero quello più piccolo, poiché all'aumentare del carico a partire dalla configurazione naturale è il primo che si raggiunge e quindi il primo che segnala la comparsa di un nuovo fenomeno, nel caso oggetto di studio l'inflexione laterale. Il *comportamento post critico* dell'asta è individuato dalle caratteristiche del percorso di equilibrio che si dirama a partire dal carico critico più piccolo, la più importante delle quali è rappresentata dal fatto che lungo il percorso diramato il carico sia crescente oppure decrescente.

Senza entrare in complessi dettagli, si segnala semplicemente che il post critico di un'asta compressa, tipo l'asta di Eulero, è a carico crescente e questo significa che un'asta indefinitamente elastica (che quindi non si

plasticizza e non si frattura) può raggiungere stati di equilibrio corrispondenti ad un carico superiore al primo carico critico, anche se al prezzo di grandi spostamenti. Per disegnare in un piano il percorso di equilibrio fondamentale si scelga uno spostamento significativo dovuto alla flessione, per esempio la freccia f in mezzzeria della trave nel caso dell'asta di Eulero, per rappresentare lo spazio delle configurazioni.

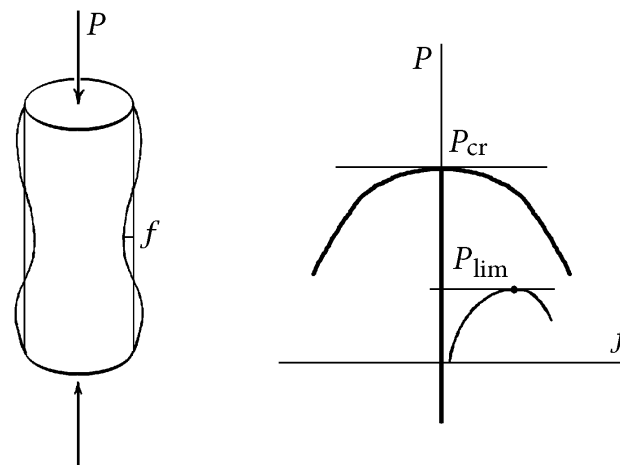


Dal punto di vista della stabilità dell'equilibrio, il percorso di equilibrio naturale viene separato in due parti dal primo carico critico, la parte inferiore comprendente stati di equilibrio stabili e la parte superiore instabili, mentre il percorso di equilibrio post critico è invece stabile, almeno nella prima parte, che poi è l'unica importante dal punto di vista strutturale.

Si tenga poi conto del fatto che una struttura "reale" presenta sempre delle "imperfezioni" rispetto al modello "perfetto", preso come base per i calcoli e per la realizzazione della struttura. Risulta quindi importante la valutazione del comportamento della struttura "imperfetta", sia che queste imperfezioni riguardino la configurazione geometrica della struttura oppure le forze applicate. La configurazione naturale della struttura imperfetta differisce da quella della struttura perfetta se l'imperfezione riguarda la

geometria della struttura, come la presenza di una freccia iniziale nel caso dell'asta di Eulero. Il percorso di equilibrio della struttura imperfetta presenta fin dall'inizio le caratteristiche del percorso diramato post critico della struttura perfetta, dove invece compaiono solo all'atto della biforcazione dell'equilibrio. Per questo motivo tale percorso si presenta normalmente regolare, a differenza del passaggio tra il percorso fondamentale e quello diramato attraverso il punto di biforcazione dell'equilibrio. Poiché il percorso della struttura imperfetta si schiaccia al limite su quello della struttura perfetta, nel caso di piccole imperfezioni la qualità del percorso imperfetto è decisa dal percorso post critico. Per tale motivo strutture che come l'asta di Eulero hanno un post critico a carico crescente e stabile sono dette *non sensibili alle imperfezioni*.

Se invece il post critico di una struttura è decrescente, e quindi instabile, si dice che la struttura stessa è *sensibile alle imperfezioni*, poiché in tal caso il valore del carico critico non può essere raggiunto, sul percorso di equilibrio imperfetto, nemmeno teoricamente. Tale situazione non si presenta nel caso oggetto di studio, che è quello di aste compresse che subiscono una flessione laterale, ma si presenta invece in altri casi tecnicamente molto importanti come, per esempio, quello dei cilindri cavi sottili compressi che possono subire, oltre alla inflessione laterale come una qualunque asta compressa, una deformazione ad onde lungo l'asse del cilindro, asse che resta rettilineo.



3.3.2 Calcolo dei carichi critici

Metodo statico

Un carico critico è caratterizzato dall'esistenza di configurazioni equilibrate inflesse nella vicinanza della configurazione equilibrata indeformata. L'intorno di tale configurazione può quindi essere esplorato tramite una cinematica linearizzata, ma l'equilibrio deve essere scritto nella configurazione deformata.

Tale metodo di calcolo dei carichi critici è detto *metodo statico*, mentre una configurazione nell'intorno della configurazione equilibrata indeformata, descritta relativamente a questa da una cinematica linearizzata, è detta essere una configurazione *adiacente* la configurazione equilibrata indeformata stessa.

Metodo energetico

In corrispondenza di una configurazione equilibrata la variazione prima dell'energia potenziale totale è nulla:

$$\delta\pi = 0. \quad (3.1)$$

Affinché tale configurazione equilibrata sia anche stabile, la variazione seconda deve essere positiva:

$$\delta^2\pi > 0,$$

in corrispondenza di ogni variazione $\delta u \neq 0$ data al sistema (condizione di minimo dell'energia potenziale totale). Una configurazione di equilibrio critica

è dunque individuata dalla condizione:

$$\begin{cases} \delta^2\pi \geq 0 & \text{per ogni } \delta u \\ \delta^2\pi = 0 & \text{per almeno un } \delta u \end{cases}$$

La variazione δu che rende nulla la variazione seconda $\delta^2\pi$ dell'energia potenziale totale viene detta modo critico. È evidente che la forma quadratica $\delta^2\pi$ ha un minimo in corrispondenza di un modo critico e la ricerca di tale minimo può condursi annullando la sua variazione prima:

$$\delta(\delta^2\pi) = 0.$$

Questa equazione rappresenta un problema agli autovalori ed autovettori, dove gli autovalori sono i carichi critici e gli autovettori i modi critici.

Equivalenza tra il metodo energetico e quello statico

Nell'intorno di una configurazione equilibrata l'energia potenziale totale si può rappresentare nella forma:

$$\pi = \delta\pi + \delta^2\pi + \dots \cong \delta^2\pi,$$

poiché $\delta\pi = 0$ ed avendo trascurato i termini di ordine superiore. Imporre l'equilibrio in tale intorno richiede di annullare la variazione prima della variazione seconda:

$$\delta(\delta^2\pi) = 0,$$

e, quindi, tale condizione è equivalente al metodo statico. Ciò dimostra l'equivalenza tra metodo energetico e metodo statico.

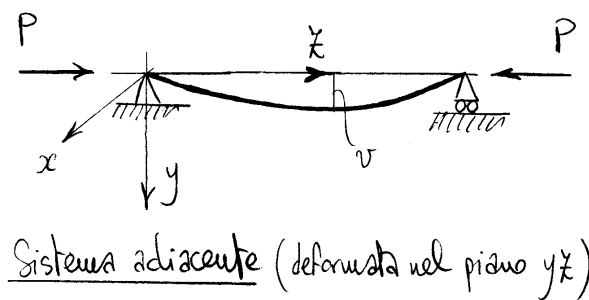
Occorre comunque notare che il metodo statico è applicabile anche in difetto di esistenza dell'energia potenziale totale, per esempio nel caso di

forze applicate non conservative. Non essendo però in tal caso equivalente alla condizione di minimo dell'energia potenziale, che quando esiste determina tutti i valori critici che instabilizzano la struttura, assicura la ricerca dei soli carichi critici associati ad eventuali punti di biforcazione, essenzialmente di tipo statico. Tale metodo non può però dire nulla su livelli critici del carico di tipo dinamico, associati al fatto che in assenza di conservazione dell'energia non è possibile escludere la possibilità, che in tanti casi concreti si realizza effettivamente, di oscillazioni capaci di aumentare progressivamente la propria ampiezza tramite l'estrazione di energia dall'esterno.

3.3.3 Asta di Eulero

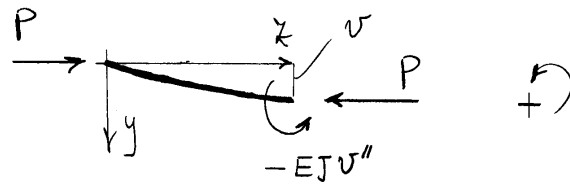
Applicazione del metodo statico

Si sceglie una configurazione deformata generica di tipo flessionale, adiacente la configurazione indeformata equilibrata. La configurazione deformata definisce il piano di flessione che viene fatto coincidere col piano yz . Per gli equilibri globali delle forze verticali e delle coppie le reazioni



verticali degli appoggi sono nulle. Sezionando la trave in corrispondenza dell'ascissa z generica si mette in evidenza un momento flettente proporzionale alla curvatura della trave, di asse momento in direzione x se e solo se y è principale di inerzia.

La forza verticale risulta nulla, per equilibrio alla traslazione verticale di una delle due parti in cui si è divisa la trave.



L'equilibrio alla rotazione della stessa parte è possibile solo se y è principale di inerzia, ed in tal caso si scrive:

$$-EJ v'' - P v = 0.$$

Applicazione del metodo energetico

Procedendo con il metodo energetico, occorre innanzitutto calcolare la variazione seconda $\delta^2 \Pi$ dell'energia potenziale totale associata ad una variazione $v(z)$ a partire dalla configurazione indeformata.

$$= \frac{1}{2} \int_0^l (EJ v''^2 - P v'^2) dz.$$

La variazione prima di $\delta^2 \Pi$, associata ad una variazione δv , calcolata in corrispondenza della variazione v , vale:

$$\delta(\delta^2 \Pi) = \int_0^l (EJ v'' \delta v'' - P v' \delta v') dz,$$

Integrando per parti ed uguagliando a zero si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^l (EJ v'' + P v) \delta v'' dz - [P v \delta v']_0^l &= \\ &= \int_0^l (EJ v'' + P v) \delta v'' dz = 0. \end{aligned}$$

Dovendo tale identità valere per ogni $\delta v''$ se ne deduce l'equazione differenziale:

$$EJ v'' + P v = 0.$$

Valutazione dei carichi e dei modi critici

Posto :

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} ,$$

si ottiene:

$$v'' + \alpha^2 v = 0 . \quad (1)$$

L'equazione differenziale ottenuta è omogenea e quindi ammette la soluzione banale $v=0$.

Si è così ottenuto un problema agli autovalori ed autovettori. Gli autovalori sono i carichi critici, che saranno determinati richiedendo che l'equazione omogenea ammetta soluzioni $v \neq 0$. Sostituendo un valore critico nell'equazione differenziale si

ottengono poi i modi critici, cioè gli autovettori corrispondenti.

L'equazione algebrica associata all'equazione differenziale a coefficienti costanti (1) risulta:

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\alpha ,$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x .$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin \alpha l = 0 \end{cases} .$$

Volendo ottenere delle soluzioni $v \neq 0$ occorre che sia $C_1 \neq 0$. Dunque, l'equazione determinante dei carichi critici risulta:

$$\sin \alpha l = 0 ,$$

ovverossia :

$$\alpha l = n\pi \quad (n \text{ intero}),$$

da cui, tenendo conto della definizione di α :

$$P_{cr} = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Si hanno quindi infiniti carichi critici, uno per ogni valore di n . Il carico critico minimo, detto carico critico di Eulero o euleriano, si ottiene ponendo $n=1$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

In sua corrispondenza, il modo critico risulta:

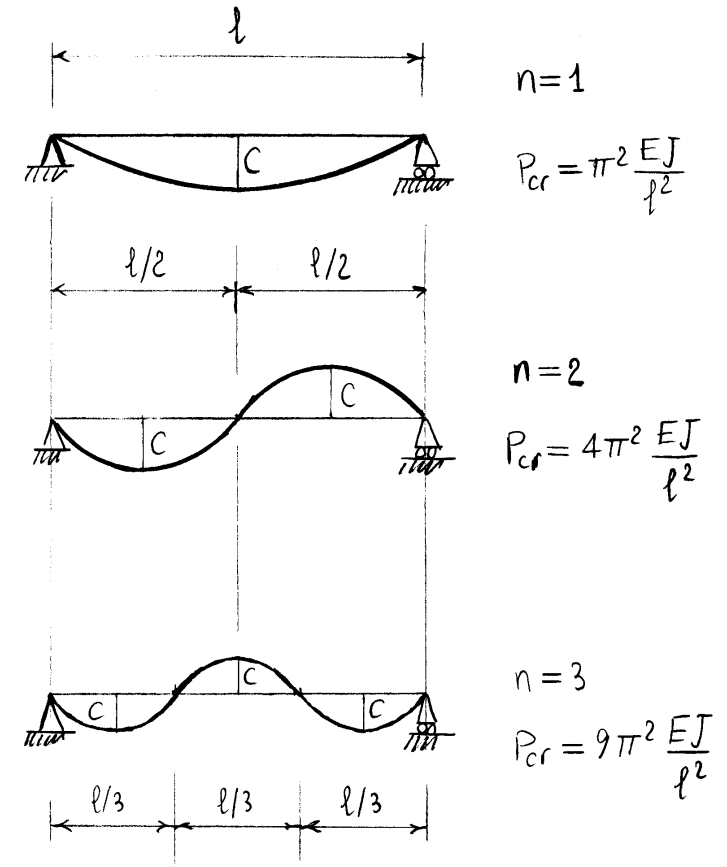
$$v = C \sin \frac{\pi}{l} x,$$

poiché, per $n=1$, $\alpha l = \pi$. Ponendo poi $\alpha l = 2\pi$, $\alpha l = 3\pi$ e così via, si hanno i modi critici corrispondenti ai successivi carichi critici:

$$v = C \sin \frac{2\pi}{l} x \quad (n=2),$$

$$v = C \sin \frac{3\pi}{l} x \quad (n=3),$$

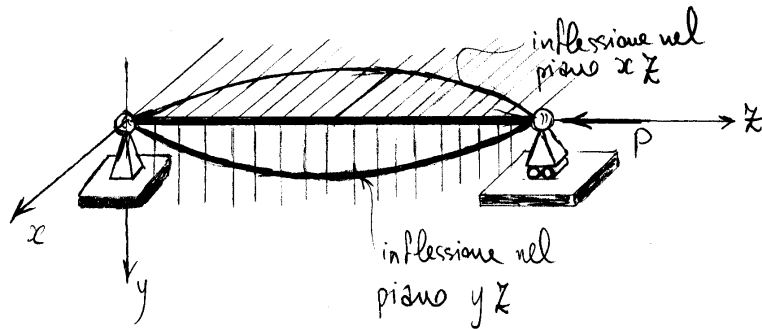
e così via.



In generale il modo critico risulta:

$$v = C \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Se l'asta è libera di inflettersi in ogni piano e se le cerniere alle due estremità sono sferiche, l'asta può inflettersi in uno qualunque dei due piani longitudinali contenenti un'asse principale di inerzia della sezione.



In tal caso il minimo carico critico dell'asta è quello relativo alla inflessione nel piano di

minima rigidità, normale all'asse principale di inerzia di minimo momento di inerzia:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{E J_{min}}{l^2},$$

dove:

$$J_{min} = \min \{ J_x, J_y \}.$$

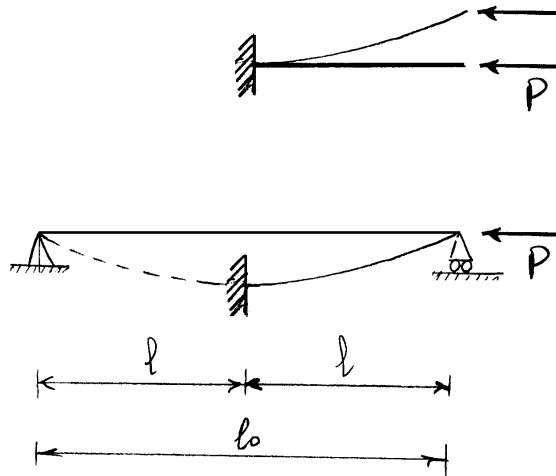
Se, invece, le cerniere sono cilindriche, con l'asse del cilindro nella direzione x , per l'inflessione nel piano yz continua a valere la formula $P_{cr} = \pi^2 E J_x / l^2$, mentre per l'inflessione nel piano xz occorre considerare le sezioni di estremità impedite di ruotare attorno all'asse y , e quindi come se fossero incastate.

3.3.4 Altri casi di vincolo

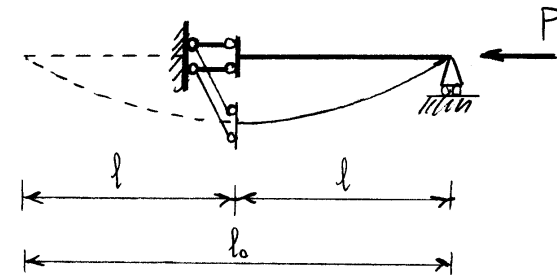
Mensola

Per simmetria, la sezione di mezz'asta incerniata alle due estremità non ruota durante l'inflessione laterale. Questo significa che la mensola si comporta, a meno di una traslazione verticale, come una trave appoggiata di lunghezza $l_0 = 2l$:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} = \pi^2 \frac{EJ}{4l^2}.$$



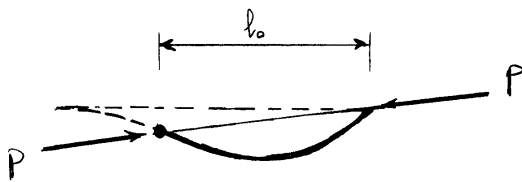
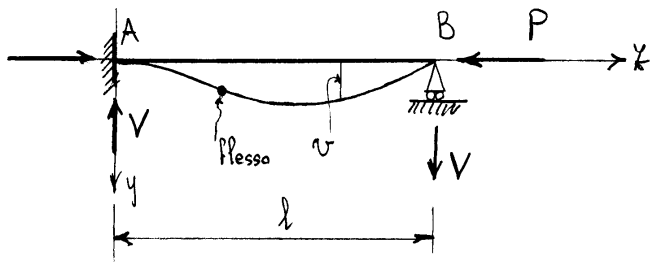
Analogia alla mensola e l'asta incerniata ad una estremità e con incastro scorrevole all'altra estremità.



La lunghezza l_0 della trave appoggiata equivalente, che poi coincide con la distanza tra due flessi consecutivi della deformata critica, è detta luce libera di inflessione.

Trave incastro-appoggio

La configurazione adiacente presenta almeno un punto di flesso intermedio, oltre al punto B in corrispondenza dell'appoggio. La parte di trave compresa tra i due flessi è

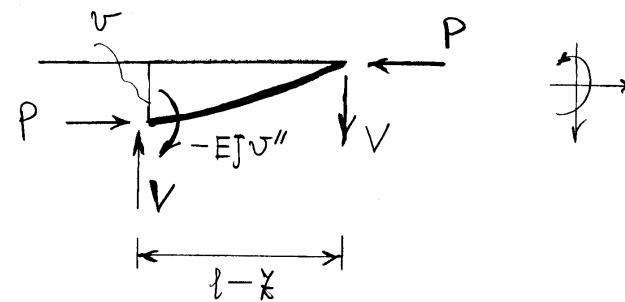


equivalente (nella cinematica linearizzata) alla trave appoggiata alle estremità. Se l_0 indica la luce

libera di inflessione della trave, ovvero la distanza tra i due flessi, risulta quindi:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

La distanza l_0 non è però nota a priori. Per risolvere il problema,



consideriamo l'equilibrio alla rotazione di un tratto di trave:

$$EJ v''' + P v - V(l - x) = 0,$$

e cioè:

$$(1) \quad v''' + \alpha^2 v - \frac{V}{EJ}(l - x) = 0,$$

avendo ancora posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Un integrale particolare della (1) risulta:

$$v = \frac{V}{P} (l - x),$$

e quindi si ha il seguente integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{V}{P} (l - x).$$

Le condizioni al contorno impongono:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{V}{P} l = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{V}{P} l$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow \alpha C_1 - \frac{V}{P} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{V}{\alpha P}$$

$$v(l) = 0 \Rightarrow \frac{V}{\alpha P} \sin \alpha l - \frac{V}{P} l \cos \alpha l = 0$$

L'equazione determinatrice dei carichi critici risulta dunque:

$$\sin(\alpha l) - \alpha l \cos(\alpha l) = 0,$$

Si noti che se $\cos \alpha l = 0$ allora $\sin \alpha l \neq 0$ e l'equazione non è soddisfatta. Dividendo allora l'equazione per $\cos \alpha l$ si ottiene la condizione

equivalente:

$$\tan(\alpha l) = \alpha l.$$

Limitandosi a riportare cinque cifre significative, la soluzione più piccola risulta:

$$\alpha_{cr} l = 4.49341 = 1.43030 \pi.$$

Tenendo conto che $(1.43030)^2 = 2.04575$, il più piccolo carico critico vale:

$$P_{cr} = 2.04575 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Il modo critico corrispondente risulta poi:

$$v = \frac{V}{\alpha_{cr} P_{cr}} \left\{ \sin(\alpha_{cr} x) - \alpha_{cr} l \cos(\alpha_{cr} x) + \alpha_{cr} (l - x) \right\}$$

dove:

$$\alpha_{cr} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EJ}} = 1.43030 \frac{\pi}{l}.$$

I punti di flesso sono definiti dalla condizione

$v'' = 0$, che risulta:

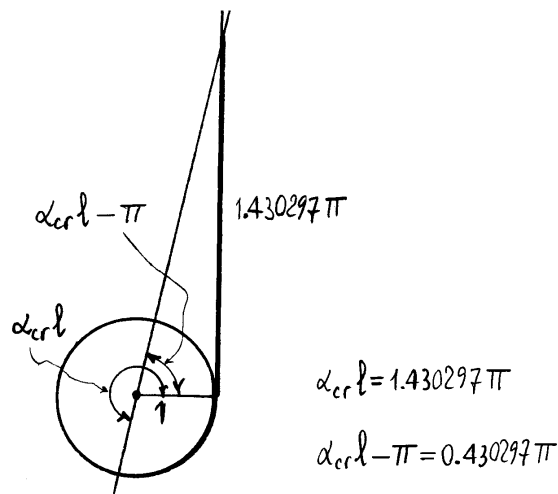
$$\tan(\alpha_{cr} \bar{x}) = \alpha_{cr} \bar{l}.$$

Dato che α_{cr} soddisfa l'uguaglianza:

$$\tan(\alpha_{cr} l) = \alpha_{cr} l,$$

è evidente che $\bar{x} = l$ rappresenta una radice. La seconda radice (contenuta nell'intervallo $0 \leq \bar{x} \leq l$) la si ottiene osservando che $\tan(\alpha - \pi) = \tan \alpha$ e che dunque:

$$\tan(\alpha_{cr} l - \pi) = \alpha_{cr} l.$$



Quindi:

$$\alpha_{cr} \bar{x} = \alpha_{cr} l - \pi = (1.43030 - 1)\pi,$$

oppure, in definitiva:

$$\bar{x} = \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l = 0.30084 l.$$

Riassumendo, le soluzioni risultano:

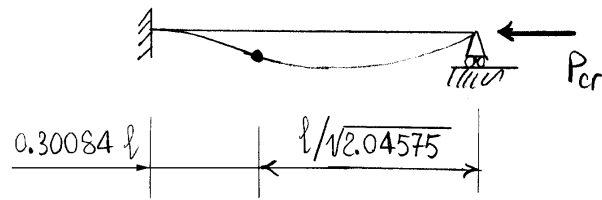
$$\bar{x} = \begin{cases} l \\ \frac{1.43030 - 1}{1.43030} l \end{cases} \Rightarrow l - \bar{x} = \frac{l}{1.43030}.$$

Poiché $(1.43030)^2 = 2.04575$, la luce libera di inflessione (distanza tra due flessi) risulta:

$$l_0 = l / \sqrt{2.04575},$$

e quindi il carico critico risulta:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(l / \sqrt{2.04575})^2}.$$

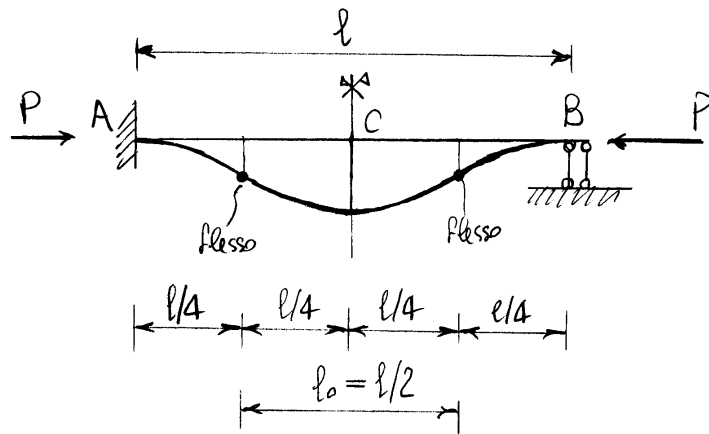


Una soluzione sufficientemente approssimata (2 sole cifre significative) la si ha ponendo:

$$l_0 = l/\sqrt{2}.$$

Trave doppiamente incastrata

La simmetria rispetto all'asse verticale per la sezione C di mezzaria della trave impone che le reazioni



verticali degli incastri siano nulle e che la sezione di mezzaria non ruoti. Inoltre il numero minimo di flessi della configurazione adiacente è due, in posizione simmetrica. La sezione di mezzaria e i due flessi dividono la luce della trave in 4 parti equivalenti ad una configurazione adiacente ad una mensola.

Il carico critico della trave deve coincidere quindi con il carico critico delle mensole. Ciò impone che i punti di flesso e la sezione di mezzaria dividano la luce della trave in 4 parti uguali e che risulti:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{\left(2 \frac{l}{4}\right)^2} = 4\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

La luce libera di inflessione risulta $l_0 = l/2$

ed ancora può scriversi:

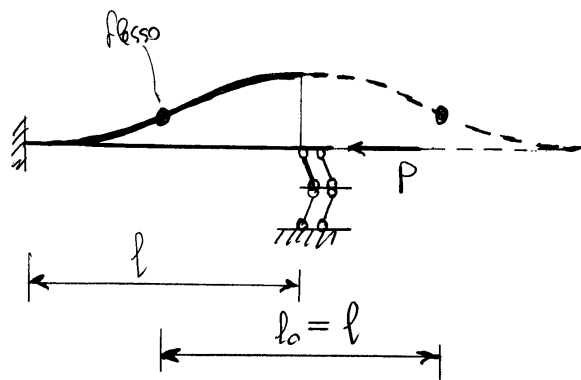
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}.$$

Trave incastro-doppio pendolo

Tale trave risulta equivalente ad una trave incastata alle due estremità di luce doppia:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2},$$

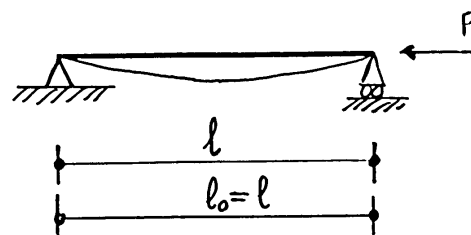
e la luce libera di inflessione coincide con la luce della trave.



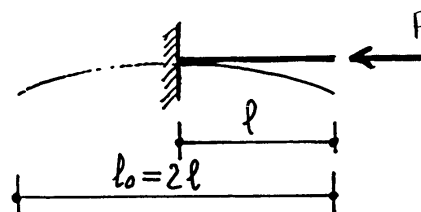
Schemi riassuntivi

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}$$

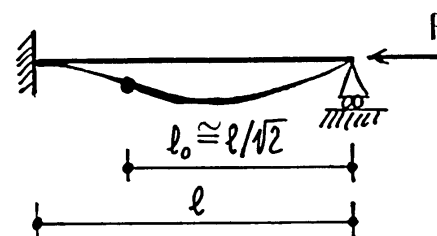
$l_0 \equiv$ luce libera di inflessione



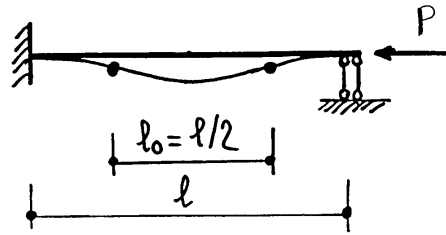
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



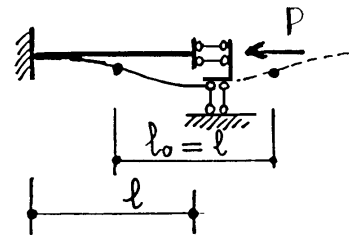
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$



$$P_{cr} \approx \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

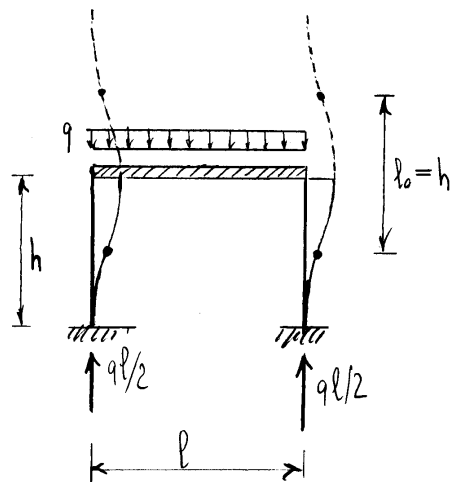


$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$



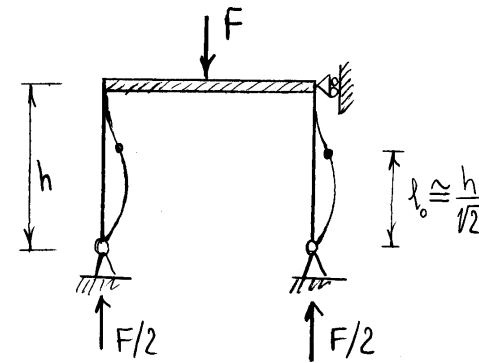
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Portali con traversi infinitamente rigidi



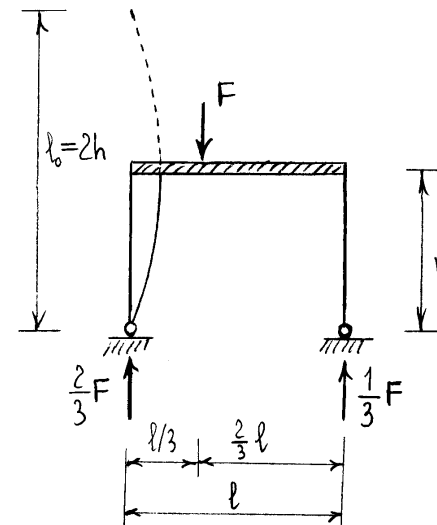
$$\frac{q_{cr} l}{2} = \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

$$q_{cr} = 2\pi^2 \frac{EJ}{l h^2}$$



$$\frac{F_{cr}}{2} \approx \pi^2 \frac{EJ}{(h/\sqrt{2})^2}$$

$$F_{cr} \approx 4\pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$



$$\frac{2}{3} F_{cr} = \pi^2 \frac{EJ}{(2h)^2}$$

$$F_{cr} = \frac{3}{8} \pi^2 \frac{EJ}{h^2}$$

3.3.5 Limiti di validità della formula di Eulero

La formula di Eulero:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{l_0^2},$$

può essere posta nella forma:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{Al_0^2} = \pi^2 E \frac{I_{min}^2}{l_0^2},$$

dove σ_{cr} è la tensione normale corrispondente al carico critico. Posto:

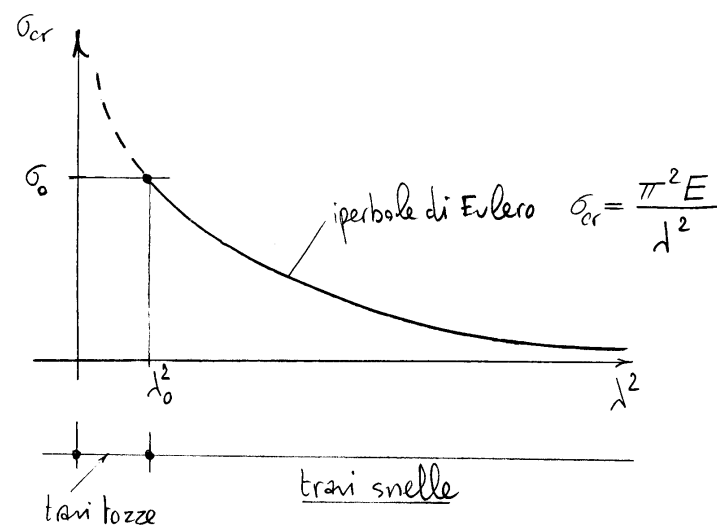
$$\lambda = l_0 / I_{min},$$

dove λ è detta snellezza dell'asta, la formula di Eulero diviene:

$$(1) \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Se si riportano in ascissa λ^2 ed in ordinata σ_{cr}

l'equazione (1) descrive un'iperbole detta iperbole di Eulero.



La formula di Eulero è limitata in validità dalla richiesta che la σ_{cr} non superi il valore σ_0 della tensione normale al limite di proporzionalità. Il valore della snellezza corrispondente, λ_0 , detta snellezza limite, si ottiene imponendo che sia:

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2},$$

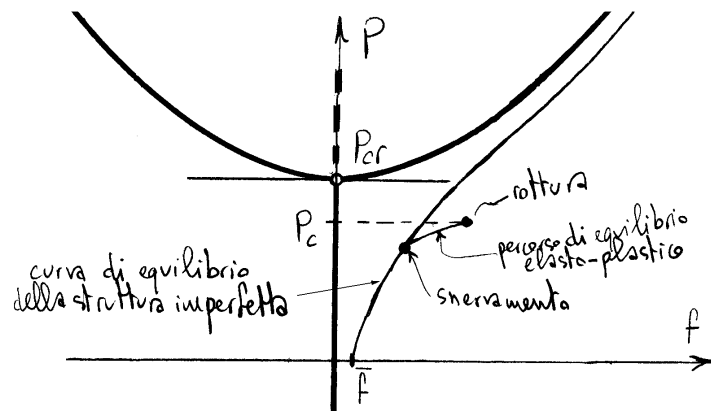
da cui:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}}.$$

Se $\lambda > \lambda_0$ si dice che la trave è snecca altrimenti che è tozza.

3.3.6 Verifica di sicurezza di profilati metallici compressi

Se si sottopone a prova di compressione un profilato metallico standard, le inevitabili imperfezioni geometriche insieme con le inevitabili imperfezioni nell'applicazione dello sforzo normale centrato, fanno sì che il profilato, se snello, si infletta fin dall'inizio del caricamento. Questo fatto ha come conseguenza la circostanza che lo snervamento prima e la rottura poi si sviluppano ad un livello inferiore del carico critico P_{cr} . Il livello P_c raggiunto a rottura viene assunto dalla normativa europea quale base per la verifica dei profilati metallici compressi. I carichi di rottura P_c sono stati determinati per vari tipi di profilati metallici da ricerche sperimentali i cui risultati sono riportati nella normativa internazionale, tra cui quella italiana, e in particolare nella parte 1-1 "Regole generali e regole per gli edifici" dell'eurocodice 3 "UNI EN 1993 (2014) Progettazione delle



strutture di acciaio”, in termini del rapporto χ tra la tensione normale massima σ_b e la tensione di snervamento f_y

$$\chi = \frac{\sigma_b}{f_y}.$$

dove il pedice “b” è l’iniziale del termine inglese “buckling” che significa instabilità e il simbolo f_y per tensione di snervamento è quello attualmente utilizzato dalla normativa.

La verifica di resistenza nei confronti della instabilità per flessione laterale richiede allora:

$$\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_b}{\gamma},$$

dove N è la forza normale di progetto e γ un opportuno coefficiente di sicurezza.

I valori del rapporto χ vengono fatti dipendere dalla forma geometrica della sezione e da una variabile adimensionale $\bar{\lambda}$. Escluso il caso di sezioni di classe 4 (cioè di quelle sezioni in cui avviene una instabilità locale per imbozzamento prima che la sezione stessa inizi a plasticizzarsi), la variabile $\bar{\lambda}$ è definita dal rapporto:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1},$$

tra la snellezza dell'asta λ e la snellezza convenzionale di proporzionalità λ_1 , calcolata utilizzando la tensione di snervamento f_y (che nel caso di acciaio per carpenteria metallica coincide praticamente con la tensione al limite di proporzionalità):

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}.$$

Ai vari tipi di sezione vengono fatte corrispondere, tramite un opportuno coefficiente numerico α , delle opportune curve di instabilità, cioè delle curve del tipo $\chi(\bar{\lambda})$:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}},$$

dove:

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \alpha \left(\bar{\lambda} - \frac{1}{5} \right) + \bar{\lambda}^2 \right\}.$$

Le curve di instabilità sono 5:

curva	ao	a	b	c	d
α	0.13	0.21	0.34	0.49	0.76

Si noti che il rapporto $\gamma_i = \sigma_{cr} / \sigma_b$ tra tensione critica euleriana e tensione massima sperimentale può essere interpretato come un coefficiente di sicurezza, richiesto dalle inevitabili imperfezioni, rispetto al valore ideale σ_{cr} .

Metodo omega

Il metodo omega non è altro che la precedente verifica di sicurezza di aste metalliche snelle compresse, però rivista in modo tale da essere applicabile in un contesto di verifica di sicurezza alle tensioni ammissibili.

Posto :

$$\omega = \frac{1}{\chi} = \frac{f_y}{\sigma_b} ,$$

la verifica di sicurezza impone :

$$\omega \frac{N}{A} \leq \frac{f_y}{\gamma} = \sigma_{adm} ,$$

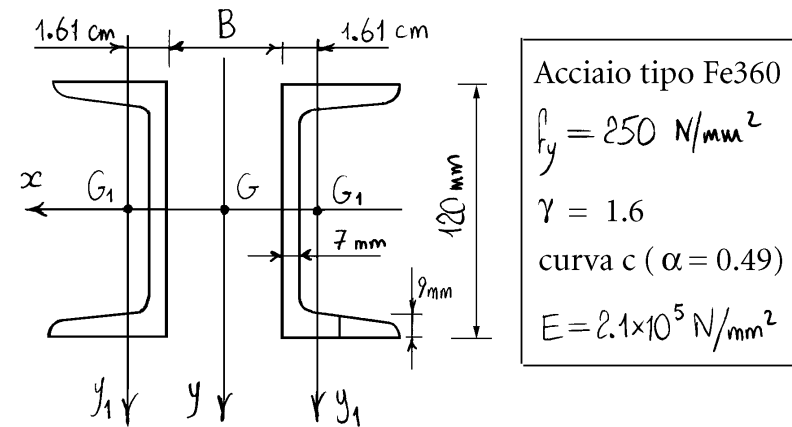
dove σ_{adm} indica la tensione ammissibile.

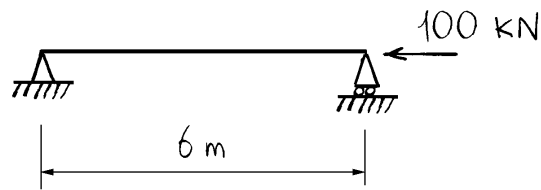
Esercizio

Eseguire la verifica di una trave composta da due profilati UPN 120, accoppiati in modo da avere i due momenti principali coincidenti, di lunghezza 6 m, incernierata alle estremità e soggetta ad un carico normale di compressione pari a 100 kN.

I profilati UPN sono di sezione sottile a C, che è la stessa cosa di una sezione sottile a U, da cui la iniziale della sigla UPN.

Il resto della sigla sta per profilo normale.





I dati inerziali relativi al singolo profilo, tratti dalle apposite tabelle riguardanti i profilati tipo UPN, sono:

$$\begin{cases} J_x = 364 \text{ cm}^4 \\ J_y = 43.1 \text{ cm}^4 \\ A = 17 \text{ cm}^2 \end{cases}.$$

Si ottengono quindi i dati dovuti ai due profilati accoppiati in funzione della distanza B tra gli estradossi delle due anime:

$$\begin{cases} J_x = 364 \text{ cm}^4 \times 2 = 728 \text{ cm}^4 \\ J_y = 2 \times \left\{ 43.1 \text{ cm}^4 + 17 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{B}{2} + 1.61 \text{ cm} \right)^2 \right\} \\ A = 2 \times 17 \text{ cm}^2 = 34 \text{ cm}^2 \end{cases}.$$

Volendo che sia $J_y = J_x = 728 \text{ cm}^4$ deve risultare:

$$2 \times \left\{ 43.1 \text{ cm}^4 + 17 \text{ cm}^2 \times \left(\frac{B}{2} + 1.61 \text{ cm} \right)^2 \right\} = 728 \text{ cm}^4,$$

e quindi:

$$\begin{cases} B = 2 \times \left(-1.61 \text{ cm} + \sqrt{\frac{364 \text{ cm}^4 - 43.1 \text{ cm}^4}{17 \text{ cm}^2}} \right) = 5.47 \text{ cm}, \\ J_y = 728 \text{ cm}^4. \end{cases}$$

L'ellisse centrale d'inerzia si riduce ad una circonferenza. Il raggio di inerzia, costante, vale:

$$j = \sqrt{\frac{728 \text{ cm}^4}{34 \text{ cm}^2}} = 4.63 \text{ cm}.$$

La luce libera di inflessione coincide con la luce della trave e quindi la snellezza vale:

$$\lambda = \frac{600 \text{ cm}}{4.63 \text{ cm}} = 130.$$

Si ottiene poi:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2}{250 \text{ N/mm}^2}} = 91.0520,$$

$$\bar{\lambda} = \frac{130}{91.0520} = 1.4241,$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left\{ 1 + 0.49 \left(1.4241 - \frac{1}{5} \right) + 1.4241^2 \right\} = 1.8139,$$

$$\chi = \frac{1}{1.8139 + \sqrt{1.8139^2 - 1.4241^2}} = 0.3404.$$

Risulta quindi:

$$\frac{N}{A} = \frac{100000 \text{ N}}{3400 \text{ mm}^2} = 29.41 \text{ N/mm}^2.$$

$$\frac{\chi f_y}{\gamma} = \frac{0.3404 \times 250 \text{ N/mm}^2}{1.6} = 53.1932 \text{ N/mm}^2,$$

e la verifica è di conseguenza soddisfatta.

Il carico critico euleriano vale:

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \pi^2 \frac{E J_x}{l^2} = \pi^2 \frac{2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \times 7.28 \times 10^6 \text{ mm}^4}{6^2 \times 10^6 \text{ mm}^2} \\ &= 419100 \text{ N} = 419.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = 123.3 \text{ N/mm}^2.$$

La tensione massima σ_b vale invece:

$$\sigma_b = \chi f_y = 0.3404 \times 250 \text{ N/mm}^2 = 85.1091 \text{ N/mm}^2,$$

e dunque il coefficiente di sicurezza rispetto alla σ_{cr} vale:

$$\gamma_i = \sigma_{cr} / \sigma_b = 1.45.$$

Lo sforzo normale massimo a cui è assoggettabile l'asta risulta poi:

$$\begin{aligned} N_{max} &= \frac{\chi f_y}{\gamma} A = \\ &= 53.1932 \text{ N/mm}^2 \times 3400 \text{ mm}^2 = 180860 \text{ N}. \end{aligned}$$

Infine, il coefficiente di sicurezza relativo al carico euleriano vale:

$$P_{cr} / N_{max} = \sigma_{cr} / \sigma_{max} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_b} \frac{\sigma_b}{\sigma_{max}} = \gamma_i \gamma = 2.32.$$

Risulta:

$$N_{max} = 1.943 \times 10^5 \text{ N}.$$

Il coefficiente di sicurezza risulta quindi:

$$c = \frac{\sigma_c A}{N_{\max}} = 1.563,$$

e coincide con il rapporto:

$$f_y / \sigma_{adm} = 1.563.$$

Infine, il coefficiente di sicurezza relativo al carico euleriano vale:

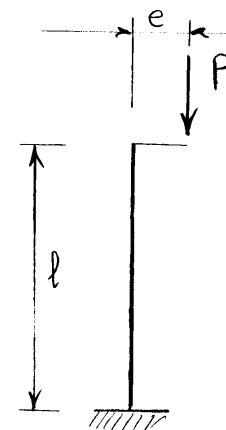
$$P_{cr} / N_{\max} = \sigma_{cr} / \sigma_{\max} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_c} \frac{\sigma_c}{\sigma_{\max}} = c; c = 2.16.$$

3.4 Pressoflessione di travi snelle

Se una trave è molto snella, e quindi sensibilmente flessibile, ed è soggetta a pressoflessione, gli spostamenti della linea d'asse non sono trascurabili nella scrittura delle equazioni di equilibrio.

Utilizzando la teoria del secondo ordine, si farà ancora riferimento ad una cinematica linearizzata scrivendo però le condizioni di equilibrio nella configurazione deformata.

Mensola



l'equilibrio richiede:

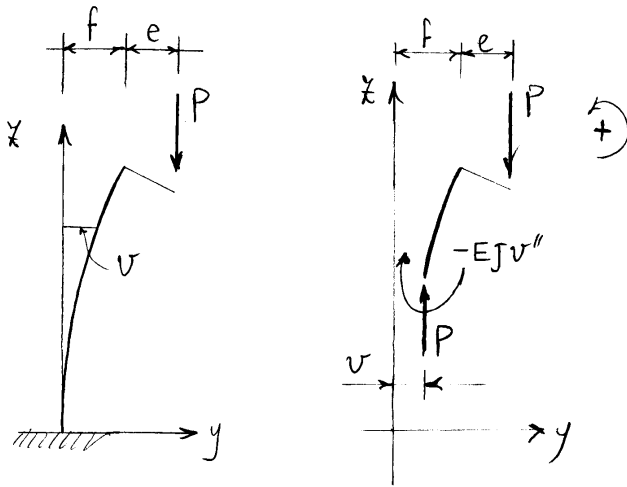
$$EJ v'' - P(e + f - v) = 0,$$

cioè:

$$v'' + \alpha^2 v = \alpha^2 (e + f),$$

dove, al solito:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$



Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + e + f.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -(e+f) \end{cases}.$$

Soluzione:

$$v = (e+f)(1 - \cos \alpha x).$$

Inoltre:

$$v(l) = f \Rightarrow (e+f)(1 - \cos \alpha l) = f,$$

e dunque:

$$e + (e+f)(1 - \cos \alpha l) = e + f,$$

da cui infine:

$$e + f = \frac{e}{\cos \alpha l}.$$

In definitiva:

$$v = \frac{e}{\cos \alpha l} (1 - \cos \alpha x).$$

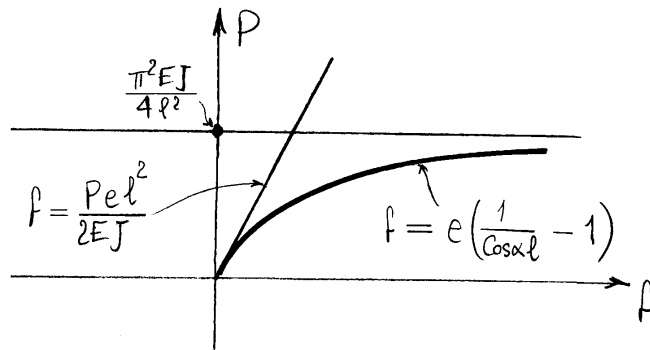
$$\text{Se } P = P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \text{ risulta } \cos \alpha l = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

e ne consegue:

$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(z) = \infty, \quad (0 < z \leq l).$$

Inoltre risulta, se $0 \leq P < P_{cr}$:

$$\frac{df}{dP} = e l \frac{d\alpha}{dP} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} = \frac{e l}{2EJ} \frac{\sin \alpha l}{\cos^2 \alpha l} > 0.$$



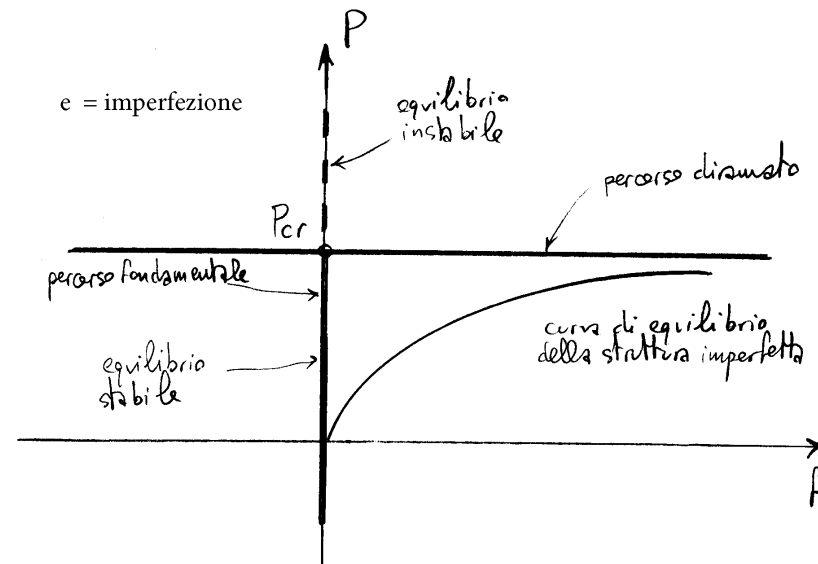
Si noti che per $\alpha \rightarrow 0$ $\frac{df}{dP} \rightarrow \frac{e l^2}{2EJ}$.

Nel caso delle travi inflesse elastiche lineari, la freccia vale:

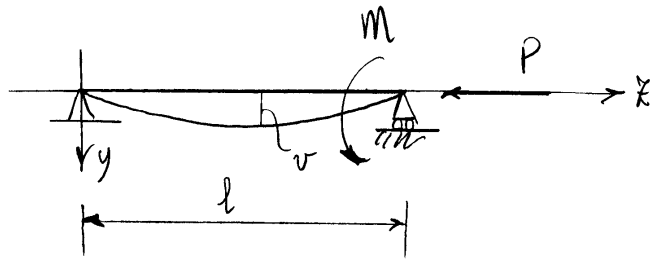
$$f = \frac{(Pe) l^2}{2EJ} = P \frac{e l^2}{2EJ},$$

avendo tenuto conto che la mensola è sollecitata da una coppia Pe . Quindi, come ci si poteva aspettare, la pendenza iniziale coincide con quella, costante, che si aveva nel caso di travi inflesse elastiche lineari.

Se l'eccentricità e viene interpretata alla stregua di una imperfezione rispetto alla perfetta centratura del carico, il grafico precedente assume l'interpretazione riportata nel grafico seguente, valida nei limiti della teoria del secondo ordine.

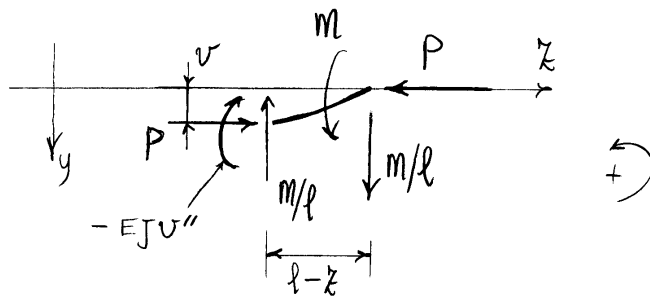


Trave appoggiata



L'equilibrio alla rotazione si scrive:

$$EJ v'' + Pv + M - \frac{M}{l}(l-z) = 0,$$



e quindi:

$$v'' + \alpha^2 v = -\frac{M}{EJl} z,$$

avendo posto:

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Integrale generale:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z - \frac{M}{Pl} z.$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(l) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{M}{P \sin \alpha l} \end{cases}.$$

Soluzione:

$$v = \frac{M}{P} \left(\frac{\sin \alpha z}{\sin \alpha l} - \frac{z}{l} \right).$$

Se $P = P_{cr}$ risulta $\sin \alpha l = \sin \pi$

e dunque:

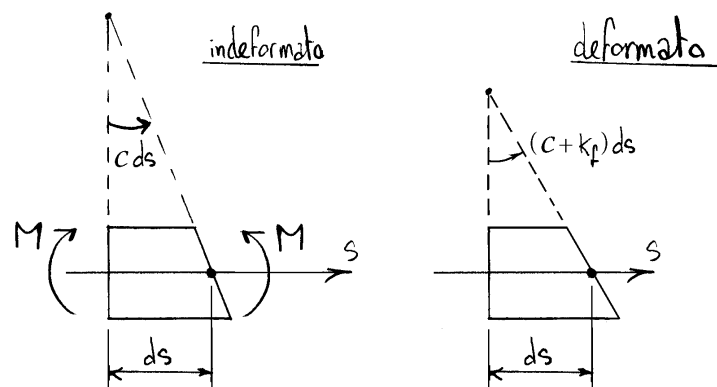
$$\lim_{P \rightarrow P_{cr}} v(z) = \infty. \quad (0 < z < l)$$

SPOSTAMENTI E ROTAZIONI IN SISTEMI PIANI ISOSTATICI

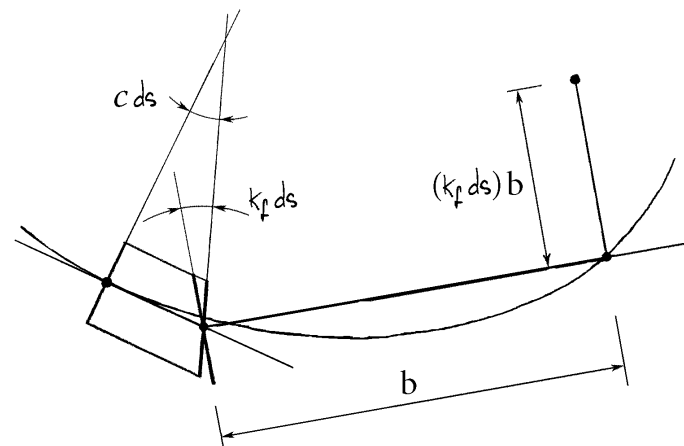
4.1 Deformata della linea d'asse

4.1.1 Momento flettente

Se una sezione è soggetta ad un momento flettente M si ha una rotazione relativa per unità di linea $k_f = M/EJ$ attorno all'asse neutro (baricentrico).

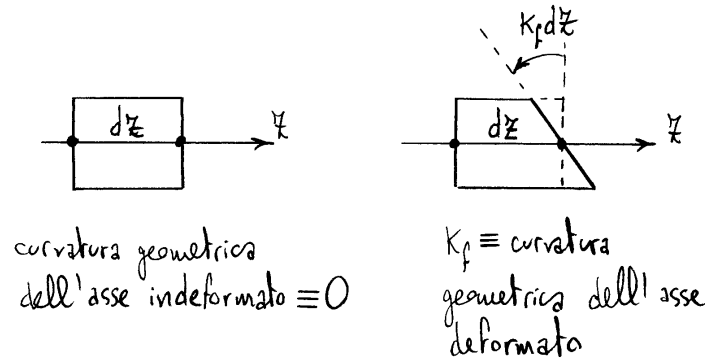


Se la curvatura geometrica della linea d'asse indeformata vale c , la curvatura geometrica della linea d'asse deformata vale $c + k_f$. La dilatazione della linea d'asse è invece nulla.

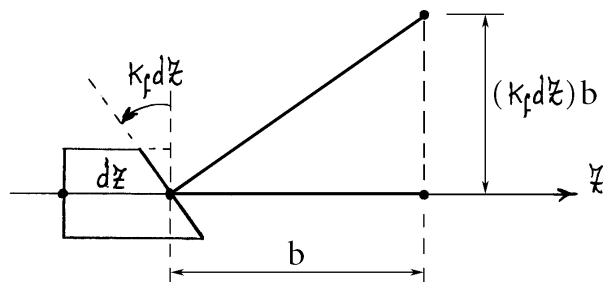


In tal caso lo spostamento di un punto dell'asse dovuto alla deformazione di un elemento di trave avviene in direzione perpendicolare alla retta che unisce tale punto con il baricentro della sezione di cui l'elemento di trave è intorno.

Nel caso di linea d'asse indeformata rettilinea la curvatura geometrica iniziale è nulla.

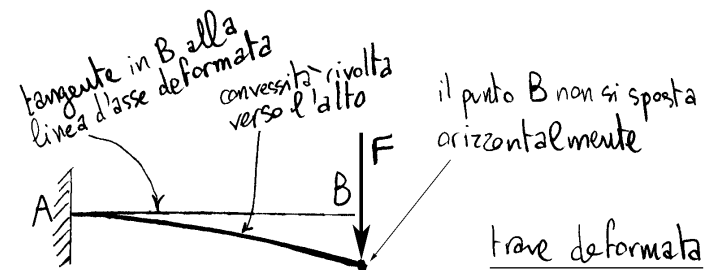
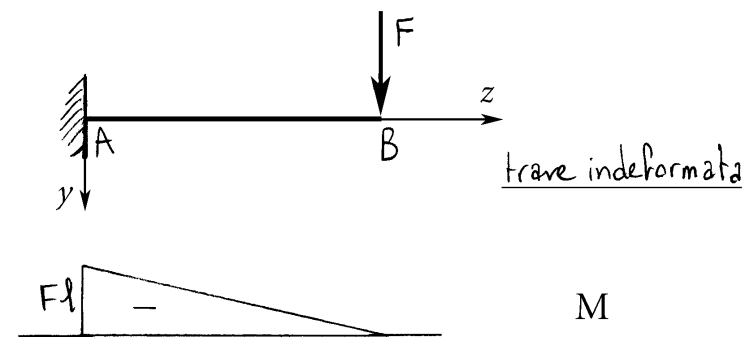


Inoltre, in tal caso, lo spostamento di un punto qualunque dell'asse dovuto alla deformazione di un qualunque elemento di trave avviene in direzione perpendicolare.



Si noti anche che se la linea d'asse iniziale è rettilinea, la linea d'asse deformata ha la convessità dalla parte delle fibre che si allungano, cioè dalla parte delle fibre tese. Poiché è prassi disegnare il diagramma del momento dalla parte delle fibre tese allora la convessità è dalla parte in cui è tracciato il momento.

Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.



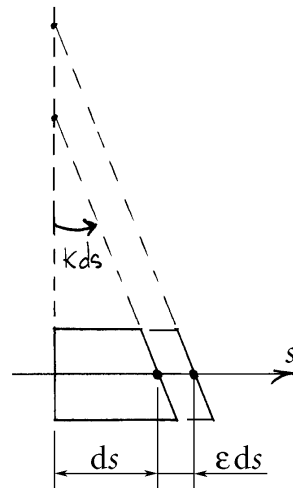
4.1.2 Forza normale

Se una sezione è soggetta ad una forza normale N , nell'elemento di trave si ha una traslazione relativa per unità di linea $\varepsilon = N/EA$ nella direzione della tangente alla linea d'asse. La curvatura flessionale è invece nulla.

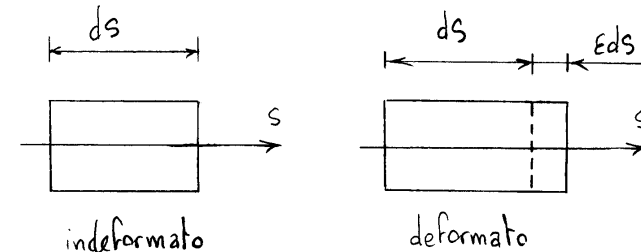
Se la curvatura geometrica iniziale vale k tale è anche la curvatura finale:

$$\frac{k ds}{(1 + \varepsilon) ds} = \frac{k}{(1 + \varepsilon)} \approx k(1 - \varepsilon) \approx k,$$

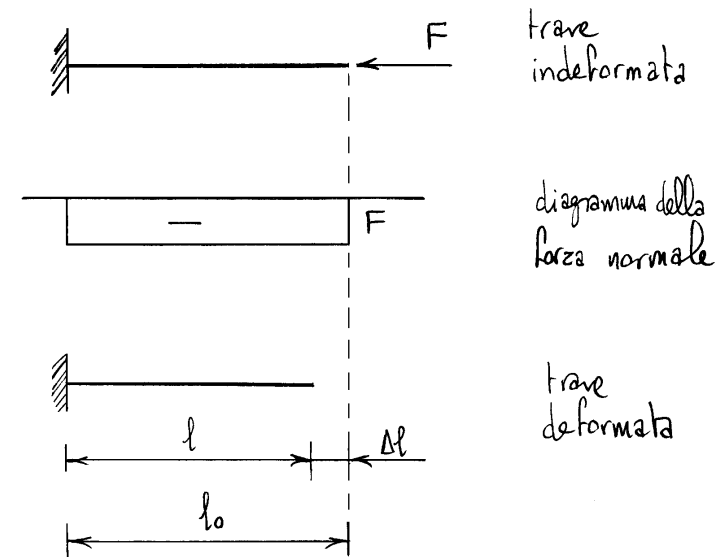
per l'ipotesi di piccoli spostamenti.



Se la linea d'asse indeformata è rettilinea, tale resta anche dopo la deformazione.



Si consideri quale esempio una mensola soggetta ad una forza concentrata all'estremità.

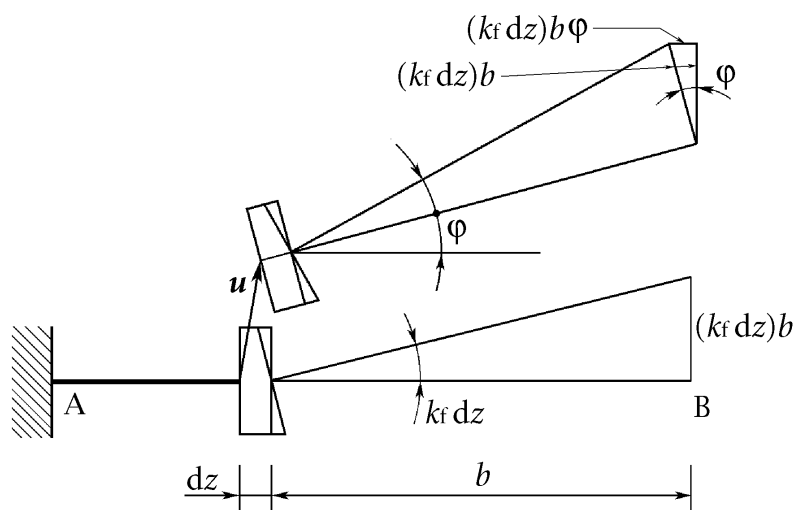


4.2 Metodo cinematico

Per valutare spostamenti o rotazioni col *metodo cinematico*, detto anche *composizione cinematica degli spostamenti*, si deforma un elemento di trave per volta, si calcola il suo effetto sullo spostamento che si vuole calcolare e si sommano i contributi di tutti gli elementi, cioè si integra sulla linea d'asse.

In generale, se la cinematica non fosse linearizzata, occorrerebbe sommare anche il contributo dovuto alle trasformazioni rigide che ricompongono la continuità della deformata, ma tali contributi sono di un ordine superiore al primo negli spostamenti e vengono pertanto trascurati. In altre parole, per l'ipotesi di piccoli spostamenti il contributo di un elemento è indipendente dal fatto che gli altri elementi siano già deformati oppure no.

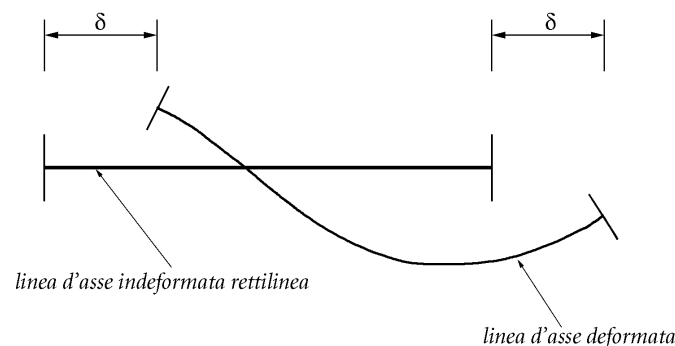
Per esempio, si verifichi tale fatto nel calcolo dello spostamento dell'estremità B della mensola AB di figura, supponendo che la mensola sia soggetta a solo momento flettente.



Si deformi la mensola partendo dall'incastro A e muovendosi verso l'estremità B. Per effetto della deformazione del tratto che precede un elemento

generico, questi si trova traslato e ruotato e la sua deformazione viene ad agire in tale nuova configurazione. Nella figura sono riportati i contributi allo spostamento del punto B che si hanno deformando l'elemento sia nella configurazione deformata che in quella indeformata. Si può quindi facilmente verificare che i contributi allo spostamento del punto B nei due casi differiscono di termini di ordine superiore al primo negli spostamenti.

Si noti infine che se la trave è ad asse rettilineo e soggetta a solo momento flettente allora lo spostamento relativo tra due punti della linea d'asse avviene in direzione ortogonale alla linea d'asse. Infatti gli spostamenti dovuti alla deformazione degli elementi della trave avvengono perpendicolarmente alla linea d'asse mentre una trasformazione rigida infinitesima di tutta la trave provoca uno spostamento nella direzione della linea d'asse uguale per tutti i punti della trave. In nessun caso è quindi possibile generare uno spostamento relativo nella direzione della linea d'asse.

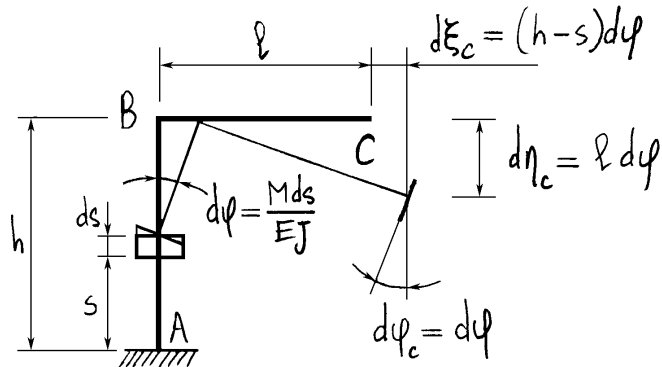


È chiaro che questa proprietà non vale per le travi ad asse curvo così come per le travi ad asse rettilineo soggette anche a forza normale, almeno nel caso non si trascuri l'effetto di tale forza.

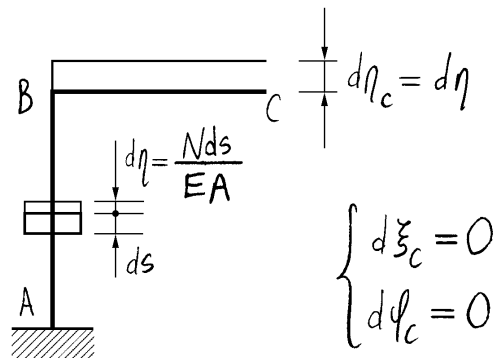
4.2.1 Sistemi di travi prevalentemente inflesse

Se la curva delle pressioni si discosta “sufficientemente”, nel problema in esame, dall'asse geometrico delle travi del sistema e se le travi sono “snelle”, è possibile trascurare il contributo della forza normale al fine del calcolo di spostamenti e rotazioni.

Infatti, il contributo ad uno spostamento dovuto alla deformazione di un elemento di trave



associata al momento flettente dipende dalla distanza dell'elemento dalla sezione di cui si sta valutando lo spostamento. Tale effetto amplificante è invece

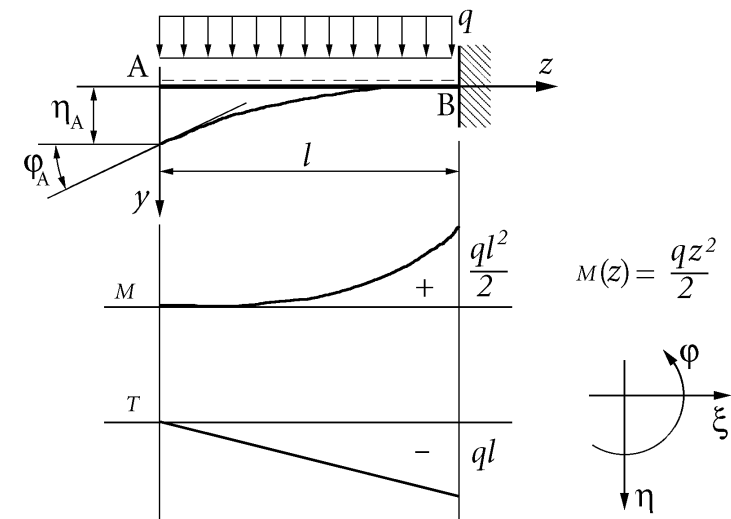


assente nel caso della deformazione associata alla forza normale.

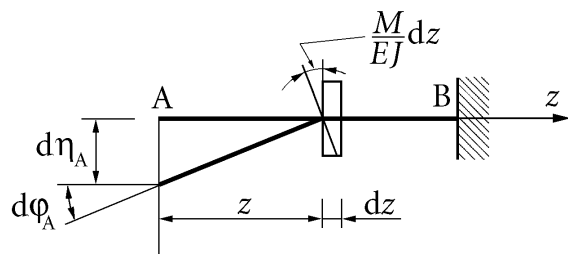
Inoltre, il contributo della deformazione associata alla forza normale non dà alcun contributo alla rotazione di una sezione retta.

4.2.2 Mensola soggetta ad un carico ripartito

Le convenzioni di segno sugli spostamenti e sul momento flettente sono indicati in figura. Si noti che il segno del momento, indicato dal tratteggio nella parte superiore (il momento positivo tende le fibre superiori), è stato sganciato dall'orientazione dell'asse z .



Per calcolare gli spostamenti relativi dell'estremità A rispetto alla estre-



mità B occorre sommare (cioè integrare) i contributi di tutti gli elementi che compongono la trave, contributi valutati tenendo fissa l'estremità B. Tenendo conto che l'estremità B è incastrata, gli spostamenti relativi tra A e B forniscono direttamente gli spostamenti dell'estremità libera A.

Per quel che riguarda la rotazione globale φ_A dell'estremità A si ottiene:

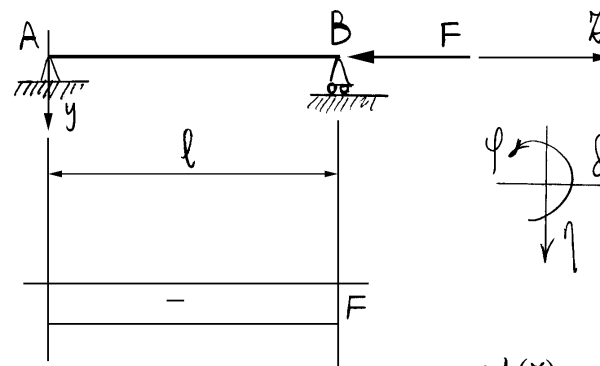
$$d\varphi_A = \frac{M}{EJ} dz \Rightarrow \varphi_A = \int_0^l \frac{qz^2}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Per lo spostamento verticale η_A dell'estremità A si ha invece:

$$d\eta_A = \left(\frac{M}{EJ} dz\right) z \Rightarrow \eta_A = \int_0^l \frac{qz^3}{2} \frac{dz}{EJ} = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

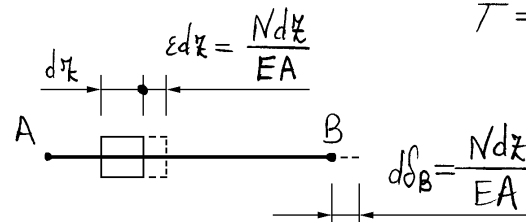
Si ricordi infine che, essendo la trave ad asse rettilineo, lo spostamento orizzontale ξ_A di A è nullo.

4.2.3 Trave appoggiata soggetta a forza normale



$$N(z) = -F$$

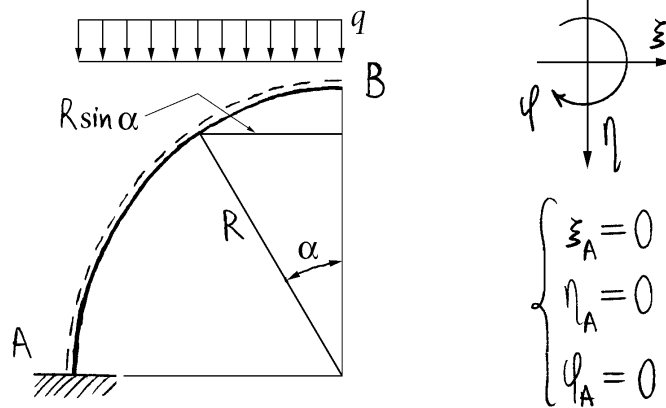
$$T = M = 0$$



$$\delta_B - \delta_A = \int_0^l \frac{Nd\xi}{EA} = - \int_0^l \frac{F d\xi}{EA}$$

$$\delta_A = 0 \Rightarrow \delta_B = - \frac{Fl}{EA}$$

4.2.4 Arco circolare soggetto ad un carico ripartito



Caratteristiche della sollecitazione:

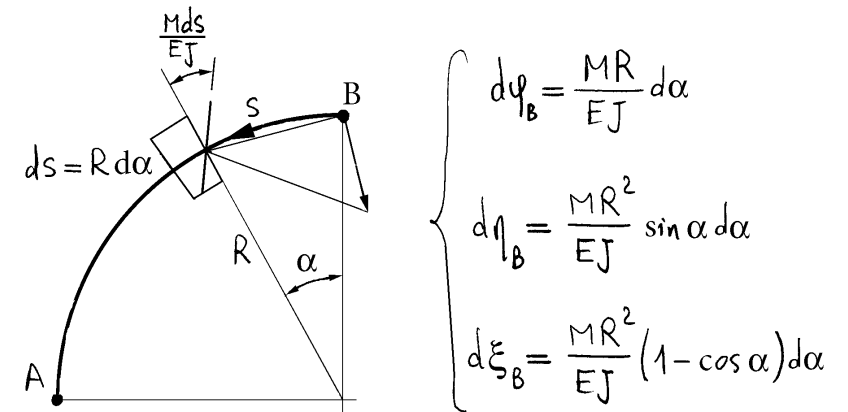
$$M(\alpha) = \frac{qR^2}{2} \sin^2 \alpha,$$

$$N(\alpha) = -qR \sin^2 \alpha,$$

$$T(\alpha) = qR \sin \alpha \cos \alpha.$$

Con riferimento allo schema di figura si ottiene:

$$\varphi_B = \varphi_A + \int_0^{\pi/2} \frac{MR}{EJ} d\alpha,$$



$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \varphi_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^3}{2EJ} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{8} \frac{qR^3}{EJ},$$

poiché:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Per quel che riguarda lo spostamento verticale di B si ottiene:

$$\eta_B = \eta_A + \varphi_A R + \int_0^{\pi/2} \frac{MR^2}{EJ} \sin \alpha d\alpha,$$

$$\eta_A = 0, \varphi_A = 0 \Rightarrow \eta_B = \int_0^{\pi/2} \frac{qR^4}{2EJ} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{qR^4}{3EJ},$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \, d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \, d\alpha = \\ &= \left[-\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Infine, lo spostamento orizzontale di B risulta:

$$\xi_B = \xi_A + \varphi_A R + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MR^2}{EJ} (1 - \cos \alpha) \, d\alpha,$$

$$\xi_A = 0, \quad \varphi_A = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{qR^4}{2EJ} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha = \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \frac{qR^4}{EJ}, \end{aligned}$$

poiché:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha &= \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4.3 Sistemi di travi con uguale deformazione

Si supponga che una trave, o una struttura senza sconnessioni interne, sia vincolata in due modi diversi e sia caricata nei due casi in modo tale da avere uguale deformazione. Uguale deformazione significa uguale curvatura, ed uguale dilatazione nel caso si tenga conto del contributo della forza normale. Uguale curvatura ed uguale dilatazione implicano uguali diagrammi del momento flettente e della forza normale rispettivamente. Se la deformazione è uguale, i campi di spostamento corrispondenti ai due casi possono differire solo di un campo di spostamenti rigidi. Se in uno dei due casi sono noti gli spostamenti (e le rotazioni), è sufficiente individuare il campo degli spostamenti rigidi differenza basandosi sul rispetto dei vincoli dell'altro caso, per determinarne gli spostamenti e le rotazioni.

4.3.1 Coefficienti elastici

Tenendo conto di quanto detto, una trave ad asse rettilineo parte di un sistema di travi può sempre essere risolta cinematicamente quale somma di uno schema semplice di cui si conosca la soluzione e di un opportuno campo di spostamenti rigidi. Nelle due tabelle che seguono sono forniti gli spostamenti e le rotazioni di alcune sezioni significative di mensole e di travi appoggio-carrello soggette ad alcune semplici forze esterne, spostamenti e rotazioni che possono servire per calcolare sistemi più complessi.

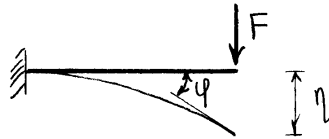
Come sarà visto nel seguito, le soluzioni riguardanti le travi appoggio-carrello possono essere ricavate da quelle riguardanti le mensole, dato che l'unica vera differenza riguarda il vincolamento e quindi i due casi differiscono solo di un campo di spostamenti rigidi. Le formule riguardanti i primi tre casi delle mensole, note con il nome di *formule di Myosotis*,¹ sono facili da ricostruire memorizzando la successione 1 2 2 3 6 8 e tenendo conto che l'esponente della luce della trave può essere determinato da considerazioni dimensionali.

Gli spostamenti e rotazioni sono linearmente dipendenti dal carico e il coefficiente del carico è noto con il nome di *coefficiente elastico*. È evidente che tali relazioni sono invertibili, permettendo così di fornire le forze o le coppie che provocano dati spostamenti o rotazioni. I coefficienti elasti-

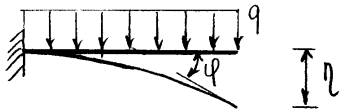
¹ *Myosotis formulae* nella letteratura inglese.



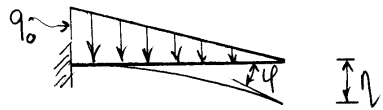
$$\varphi = \frac{Ml}{EJ}, \quad \eta = \frac{Ml^2}{2EJ}$$



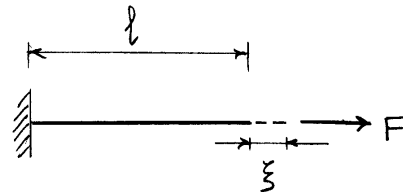
$$\varphi = \frac{Fl^2}{2EJ}, \quad \eta = \frac{Fl^3}{3EJ}$$



$$\varphi = \frac{ql^3}{6EJ}, \quad \eta = \frac{ql^4}{8EJ}$$

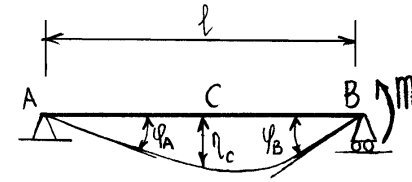


$$\varphi = \frac{q_0 l^3}{24EJ}, \quad \eta = \frac{q_0 l^4}{30EJ}$$

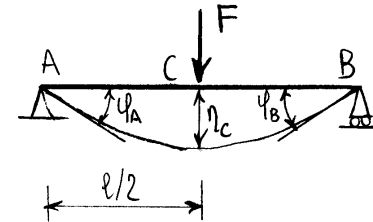


$$\xi = \frac{Fl}{EA}$$

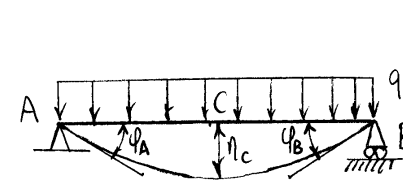
Coefficienti elastici di mensola



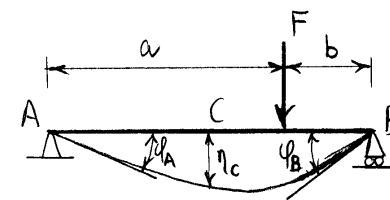
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{Ml}{6EJ}, \quad \varphi_B = \frac{Ml}{3EJ} \\ \eta_c &= \frac{Ml^2}{16EJ} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_B = \frac{Fl^2}{16EJ} \\ \eta_c &= \frac{Fl^3}{48EJ} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ} \\ \eta_c &= \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} \end{aligned} \right.$$



$$b \leq a$$

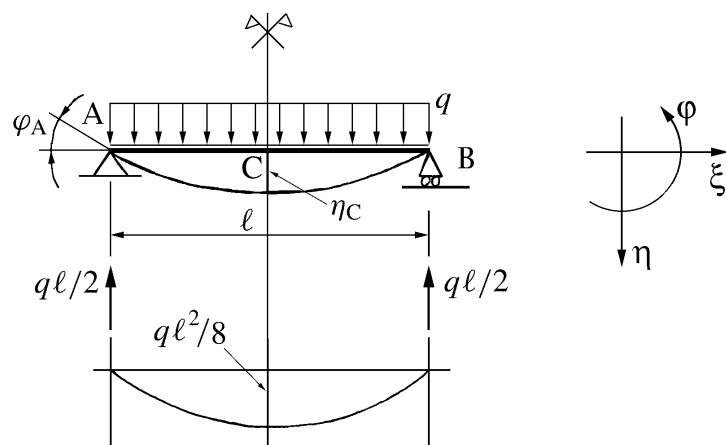
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A &= \frac{Fb(l^2 - b^2)}{6EJl} \\ \varphi_B &= \frac{Fa(l^2 - a^2)}{6EJl} \\ \eta_c &= \frac{Fb}{48EJ} (3l^2 - 4b^2) \end{aligned} \right.$$

Coefficienti elastici di travi appoggio-carrello

ci diretti sono noti con il termine di *cedevolezza*, spostamenti o rotazioni provocati da forze o coppie unitarie. I coefficienti elastici inversi sono noti con il termine di *rigidezze*, forze o coppie che provocano spostamenti o rotazioni unitarie. Le rigidezze più importanti, riportate nella tabella che segue, riguardano coppie per unità di rotazione, dette *rigidezze alla rotazione*, forze concentrate flessionali per unità di spostamento, dette *rigidezze taglianti* e forze concentrate assiali per unità di allungamento, dette *rigidezze assiali*.

4.3.2 Trave appoggio-carrello soggetta a carico distribuito

Come primo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad un carico ripartito costante q .



Se ne consideri il tratto AC incastrato nell'estremità C e soggetto, oltre al carico ripartito, ad un carico concentrato $q\ell/2$ nell'estremità A. In tal modo il momento flettente della mensola coincide con quello del tratto AC della trave appoggiata e di conseguenza coincide anche la loro curvatura flessionale. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di una trasformazione rigida. Poiché per simmetria la sezione C di mezzera della trave appoggiata non può ruotare e né traslare orizzontalmente, in accordo con l'incastro della mensola, il moto rigido coincide con una tra-

Rigidezze alla rotazione:

$$k = \frac{EJ}{l}$$

$$k = 3 \frac{EJ}{l}$$

Rigidezze taglianti:

$$k = 3 \frac{EJ}{l^3}$$

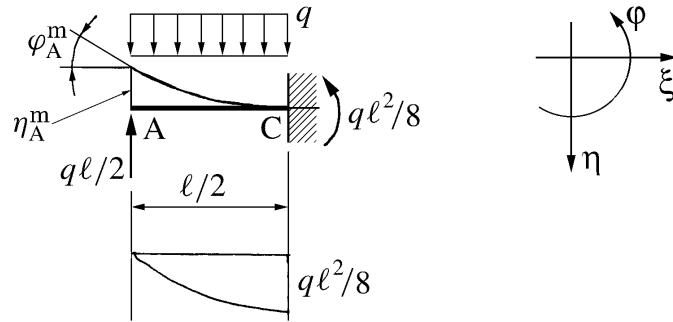
$$k = 48 \frac{EJ}{l^3}$$

Rigidezza assiale:

$$k = \frac{EA}{l}$$

Rigidezze di mensole e di travi appoggio-carrello

slazione verticale. L'ampiezza della traslazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.



Una traslazione non modifica le rotazioni e dunque la rotazione φ_A della sezione A nella trave appoggiata coincide con l'analoga rotazione $\varphi_A^{(m)}$ valutata nella mensola:

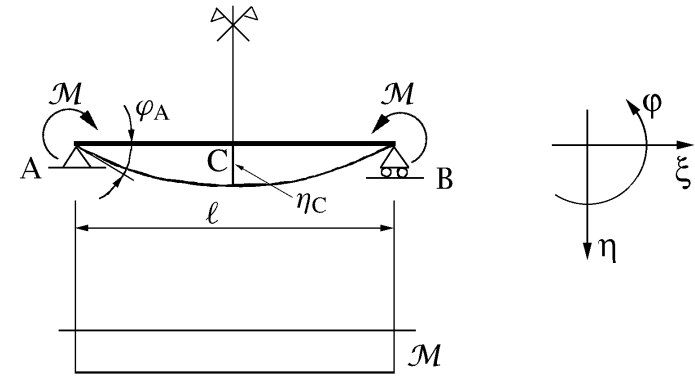
$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2EJ} + \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6EJ} = -\frac{q\ell^3}{24EJ}. \quad (4.1)$$

La freccia in mezzeria η_C della trave appoggiata coincide invece con la traslazione rigida $\bar{\eta}$ che, come detto, annulla lo spostamento $\eta_A^{(m)}$ dell'estremità A della mensola:

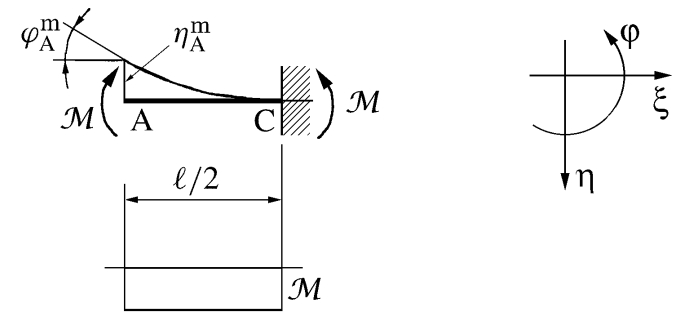
$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\left(\frac{q\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3EJ} - \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EJ}. \quad (4.2)$$

4.3.3 Trave appoggio-carrello soggetta a due coppie simmetriche

Il secondo esempio è analogo al precedente, con la differenza che la trave appoggiata è soggetta a due coppie simmetriche $\mathcal{M}$ applicate alle due estremità. Procedendo come prima, se ne consideri il tratto AC incastrato



nell'estremità C e soggetto alla coppia concentrata $\mathcal{M}$ nell'estremità libera A. Ne consegue che gli spostamenti nei due casi differiscono di una traslazione verticale, di ampiezza tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola.



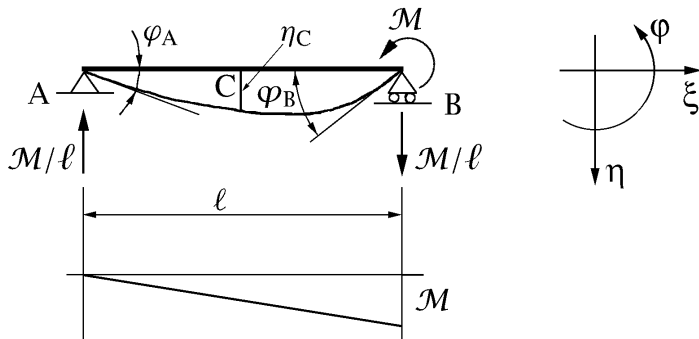
La rotazione φ_A della sezione A e la freccia in mezzeria η_C della trave appoggiata valgono quindi:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} = -\frac{\mathcal{M}\frac{\ell}{2}}{EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell}{2EJ}, \quad (4.3)$$

$$\eta_C = \bar{\eta} = -\eta_A^{(m)} = \frac{\mathcal{M} \left(\frac{\ell}{2} \right)^2}{2EJ} = \frac{\mathcal{M}\ell^2}{8EJ}. \quad (4.4)$$

4.3.4 Trave appoggio-carrello soggetta ad una coppia

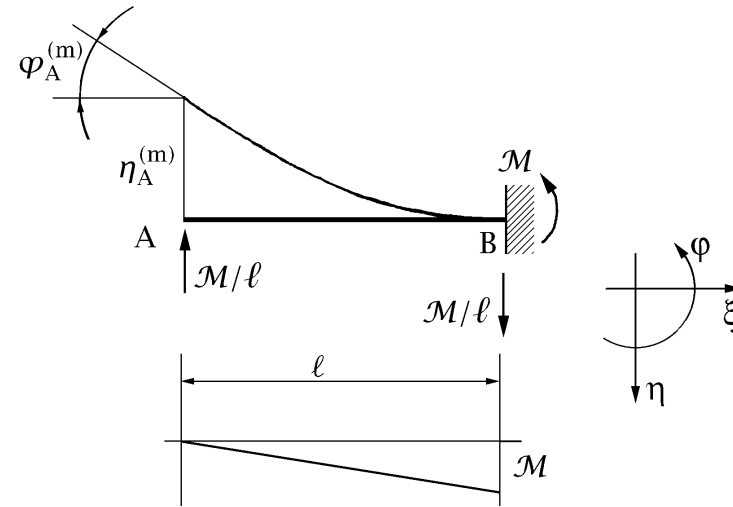
Come terzo esempio si consideri la trave appoggiata di figura, soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ applicata alla estremità B.



In tal caso non vi è simmetria. Si consideri allora l'intera trave AB incastrata nell'estremità B e soggetta ad un carico concentrato $\mathcal{M}/\ell$ nell'estremità A, in modo tale che il momento flettente della mensola coincida con quello della trave appoggiata e di conseguenza coincida anche la loro curvatura flessionale. Gli spostamenti nei due casi differiscono quindi di una trasformazione rigida. Poiché la sezione B di estremità della trave appoggiata non può traslare, in accordo con l'incastro della mensola, la trasformazione rigida differenzia deve coincidere con una rotazione attorno al punto B. L'ampiezza della rotazione deve essere tale da annullare lo spostamento verticale dell'estremità A della mensola, poiché nella trave appoggiata tale spostamento è nullo.

La traslazione dell'estremità A della mensola vale:

$$\eta_A^{(m)} = -\frac{\left(\frac{\mathcal{M}}{\ell} \right) \ell^3}{3EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell^2}{3EJ}, \quad (4.5)$$



e di conseguenza la rotazione rigida $\bar{\varphi}$ vale:

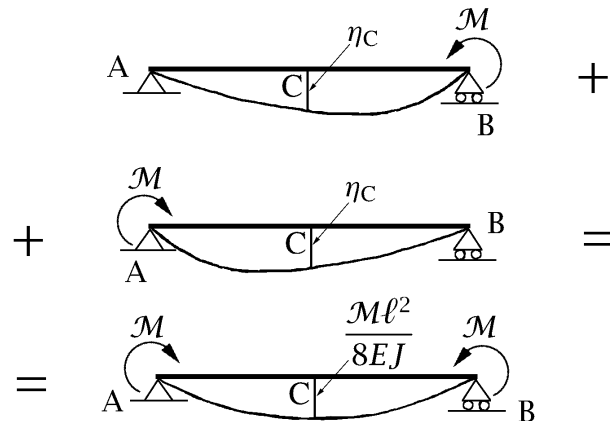
$$\bar{\varphi} = -\frac{\eta_A^{(m)}}{\ell} = \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ}. \quad (4.6)$$

Sovrapponendo i contributi della rotazione rigida a quelli valutati nella mensola si ottiene la rotazione φ_A dell'estremità A della trave appoggiata, mentre la rotazione φ_B dell'estremità B coincide con la rotazione rigida $\bar{\varphi}$:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(m)} + \bar{\varphi} = -\frac{\left(\frac{\mathcal{M}}{\ell} \right) \ell^2}{2EJ} + \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ} = -\frac{\mathcal{M}\ell}{6EJ}, \quad (4.7)$$

$$\varphi_B = \bar{\varphi} = \frac{\mathcal{M}\ell}{3EJ}. \quad (4.8)$$

Per calcolare infine la freccia in mezzera è sufficiente sommare i due casi simmetrici con la coppia applicata prima ad una estremità e poi nell'altra ottenendo così il caso della trave appoggiata soggetta, nelle estremità, a due coppie simmetriche. Poiché le due soluzioni devono essere l'una la simmetrica dell'altra e poiché la sezione di mezzera si trova sull'asse di simmetria, la freccia in mezzera coincide nei due casi. Sovrapponendo gli

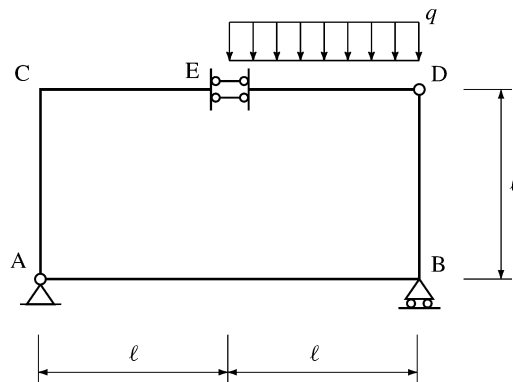


effetti si ottiene quindi:

$$\eta_C + \eta_C = \frac{M\ell^2}{8EJ}, \quad \Rightarrow \quad \eta_C = \frac{M\ell^2}{16EJ}. \quad (4.9)$$

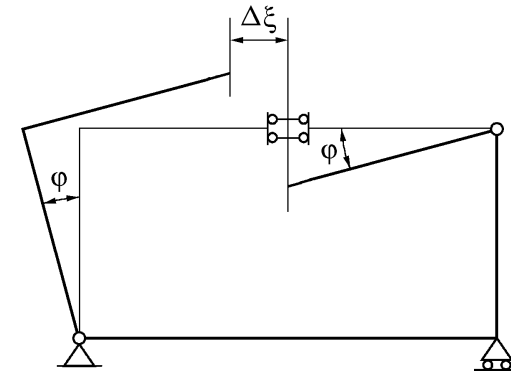
4.3.5 Struttura chiusa rettangolare

Della struttura chiusa di figura si vogliono determinare gli spostamenti dei nodi, le rotazioni dei nodi rigidi, le rotazioni delle sezioni di estremità

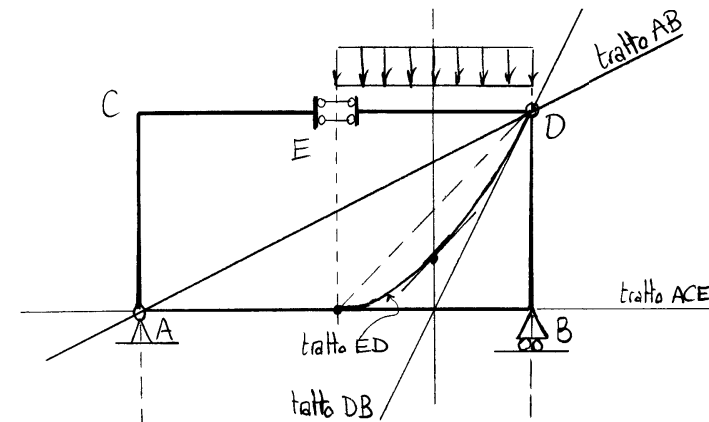


in corrispondenza dei nodi cerniera e in particolare si vuole determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo.

A tale scopo si verificherà innanzitutto l'isostaticità della struttura. Si di-



segnerà poi la curva delle pressioni e si determineranno le reazioni dei vincoli interni ed esterni. Si disegneranno infine i diagrammi quotati del mo-

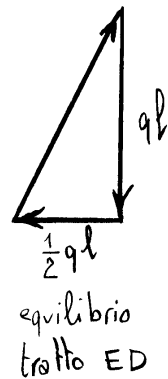
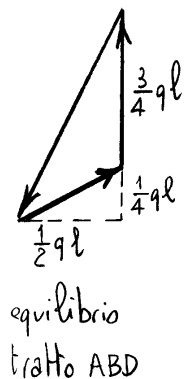
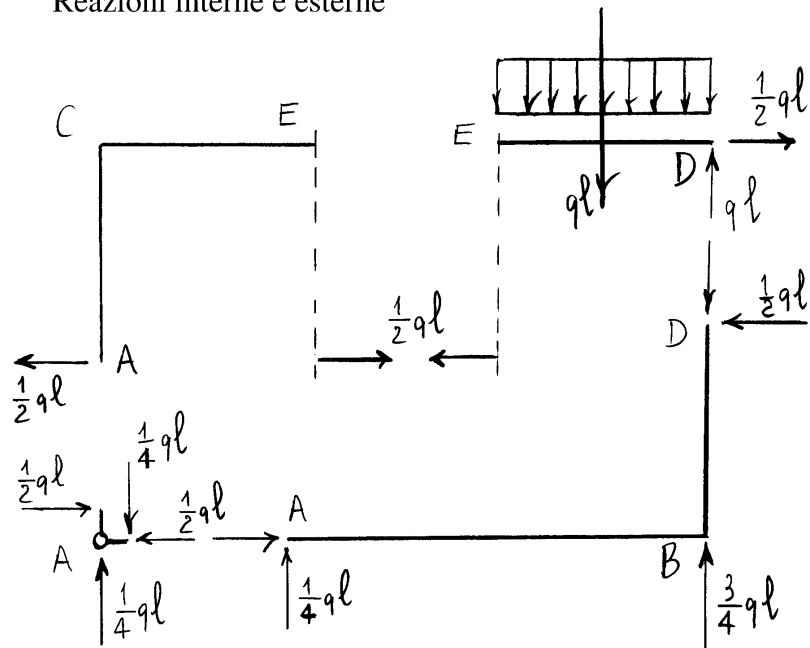


mento flettente, del taglio e della forza normale e si disegnerà la deformata della struttura.

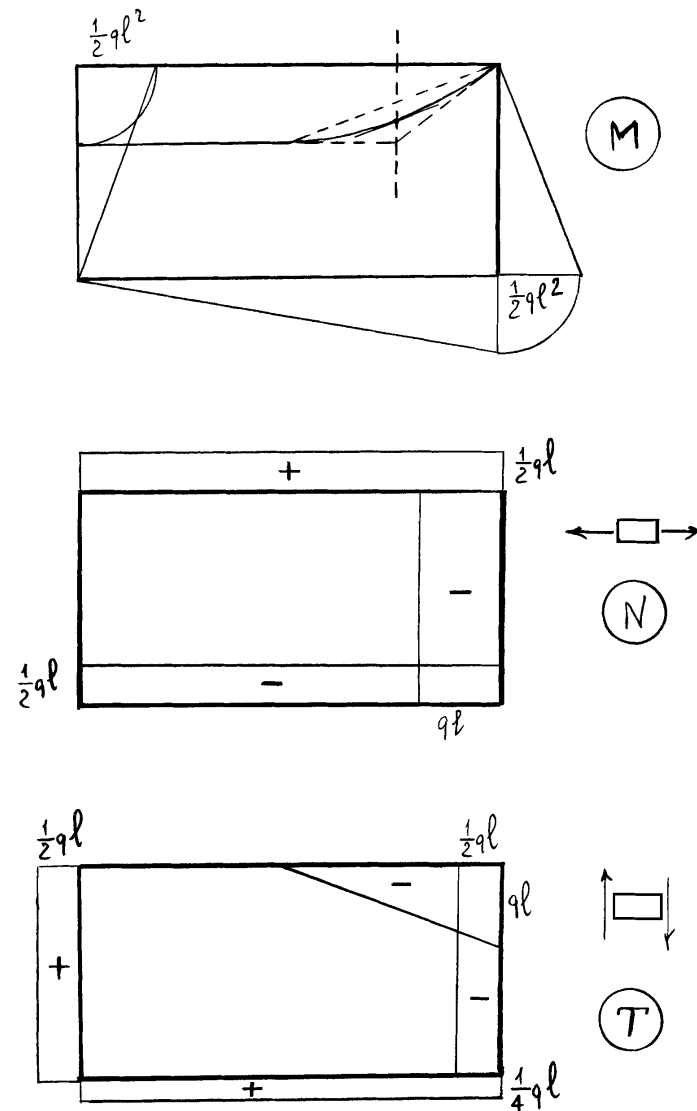
Basandosi sui diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione le travi del sistema saranno associate a delle mensole oppure a delle travi appog-

giate aventi la stessa deformazione. I campi di spostamenti rigidi differenzia saranno poi individuati per il tramite delle effettive condizioni di vincolo che le travi hanno nel sistema.

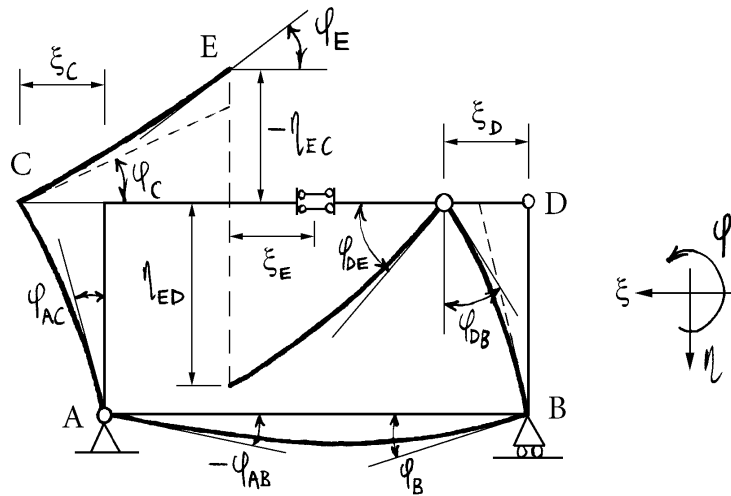
Reazioni interne e esterne



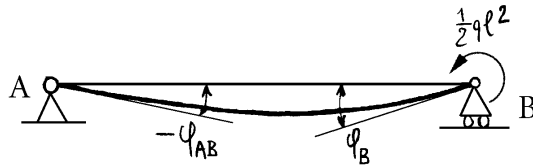
Diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale



Spostamenti e deformata della struttura



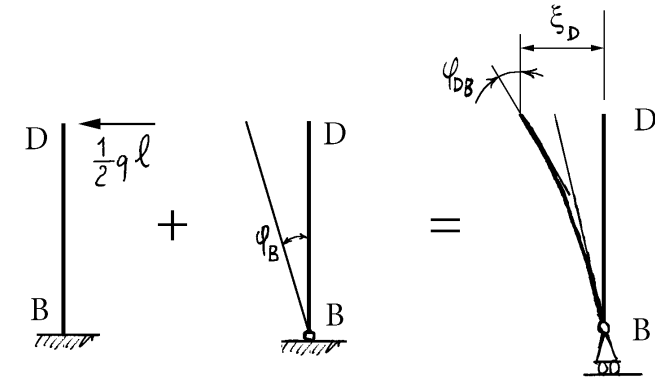
1. Tratto AB:



$$\varphi_{AB} = \frac{-\left(\frac{1}{2} q l^2\right)(2l)}{6 E J} = -\frac{q l^3}{6 E J}$$

$$\varphi_B = \frac{\left(\frac{1}{2} q l^2\right)(2l)}{3 E J} = \frac{q l^3}{3 E J}$$

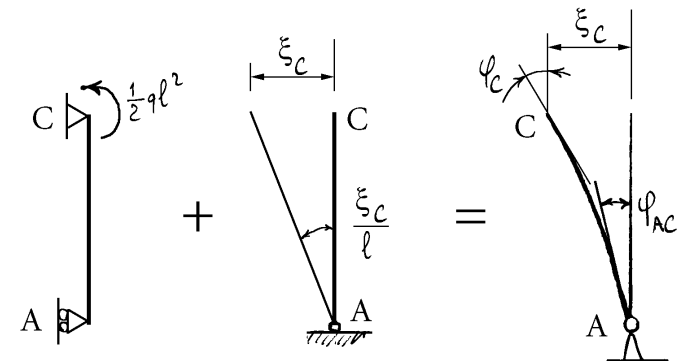
2. Tratto BD:



$$\xi_D = \xi_E = \xi_C = \frac{\left(\frac{1}{2} q l\right) l^3}{3 E J} + \varphi_B l = \frac{q l^4}{2 E J}$$

$$\varphi_{DB} = \frac{\left(\frac{1}{2} q l\right) l^2}{2 E J} + \varphi_B = \frac{7}{12} \frac{q l^3}{E J}$$

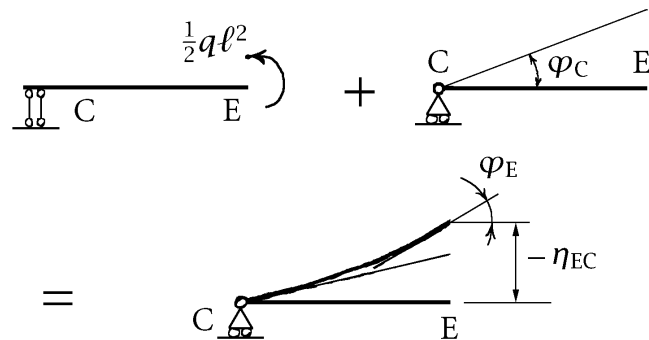
3. Tratto AC:



$$\varphi_{Ac} = \frac{\xi_c}{l} - \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{6EJ} = \frac{5}{12} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

$$\varphi_c = \frac{\xi_c}{l} + \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{3EJ} = \frac{7}{12} \frac{q\ell^3}{EJ}$$

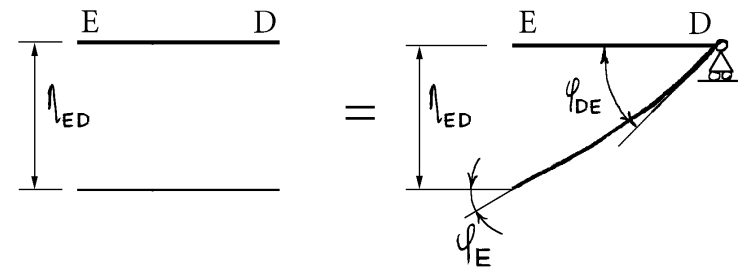
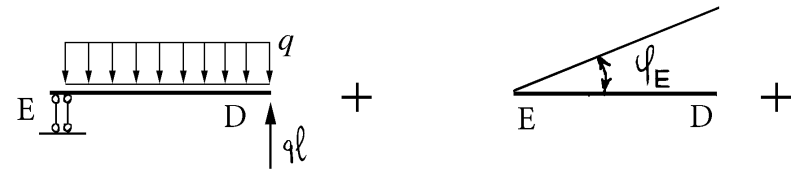
4. Tratto CE:



$$\varphi_E = \frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell}{EJ} + \varphi_C = \frac{7}{12} \frac{q\ell^3}{EJ},$$

$$\eta_{EC} = -\frac{\left(\frac{1}{2}q\ell^2\right)\ell^2}{2EJ} - \varphi_C \ell = -\frac{11}{12} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

5. Tratto ED:



$$\varphi_{DE} = \frac{(q\ell)\ell^2}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{6EJ} + \varphi_E = \frac{3}{2} \frac{q\ell^3}{EJ},$$

$$\eta_D = -\frac{(q\ell)\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} + \varphi_E \ell + \eta_{ED},$$

$$\eta_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{ED} = \frac{11}{8} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

Lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo vale allora:

$$\Delta\eta_E = \eta_{ED} - \eta_{EC} = \frac{55}{24} \frac{q\ell^4}{EJ}.$$

4.4 Principio dei lavori virtuali

Data una struttura isostatica comunque caricata si vuole utilizzare il principio dei lavori virtuali per calcolare una componente di spostamento (oppure la rotazione) di una qualunque delle sue sezioni rette, sotto il dato sistema di forze.

A tal fine si osservi che in una struttura isostatica soggetta a un qualunque sistema di forze l'equilibrio è sempre soddisfatto, ovvero sono sempre determinabili (in modo unico) delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione equilibrate. Si osservi inoltre che per l'ipotesi di piccoli spostamenti, i campi degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ai carichi applicati soddisfano le condizioni richieste ad un campo di spostamenti virtuali.

Se si vuole calcolare una componente di spostamento (o la rotazione) di una sezione, si scelga innanzitutto un sistema di forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrato ottenuto applicando una forza unitaria (una coppia unitaria) alla data sezione, forza avente la stessa direzione della componente di spostamento da determinare. Poiché l'equilibrio è soddisfatto ne consegue che $L_{ve} = L_{vi}$ per un qualunque campo di spostamenti virtuali, quindi anche per il campo di spostamenti e deformazioni dovuti ai carichi applicati. Con tale scelta il lavoro virtuale esterno coincide con lo spostamento incognito (oppure la rotazione incognita) che quindi coincide con il lavoro virtuale interno.

Il sistema isostatico soggetto ai dati carichi e del quale vuole determinarsi lo spostamento (o la rotazione) di una sezione viene detto *sistema degli spostamenti e delle deformazioni*, poiché fornisce il campo degli spostamenti virtuali, ma viene anche detto *sistema reale*, poiché rappresenta il sistema che effettivamente interessa e che si vuole risolvere. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (r).

Il sistema isostatico caricato da una forza (o da una coppia) unitaria viene invece detto *sistema delle forze e delle caratteristiche della sollecitazione*, poiché fornisce le forze e le caratteristiche della sollecitazione equilibrate, ma viene anche detto *sistema fittizio*, in quanto interessa solo quale mezzo per il calcolo del sistema reale. Nel seguito tale sistema e, se del caso, le quantità ad esso legate saranno indicate con il simbolo (f). Con le convenzioni indicate, il lavoro virtuale interno, che uguaglia lo spostamento (o la

rotazione) incognita, si scrive:

$$L_{vi} = \int_{\ell} (N^{(f)} \epsilon^{(r)} + M^{(f)} k_f^{(r)}) ds. \quad (4.10)$$

Si vedrà nel seguito che le deformazioni reali $\epsilon^{(r)}$ e $k_f^{(r)}$ oltre che ai carichi possono essere dovute anche a delle *distorsioni*. Finché le deformazioni reali sono dovute ai soli carichi, e quindi alle sole caratteristiche della sollecitazione reali $N^{(r)}$ e $M^{(r)}$:

$$\epsilon^{(r)} = \frac{N^{(r)}}{EA}, \quad k_f^{(r)} = \frac{M^{(r)}}{EJ}, \quad (4.11)$$

il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \left(\frac{N^{(f)} N^{(r)}}{EA} + \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} \right) ds. \quad (4.12)$$

Infine, nel caso di strutture inflesse, ovvero sia nel caso in cui sia trascurabile l'effetto della forza normale sulla deformazione, il termine $N^{(r)}/EA$ è trascurabile e il lavoro virtuale interno diventa:

$$L_{vi} = \int_{\ell} \frac{M^{(f)} M^{(r)}}{EJ} ds. \quad (4.13)$$

◇ ◇ ◇

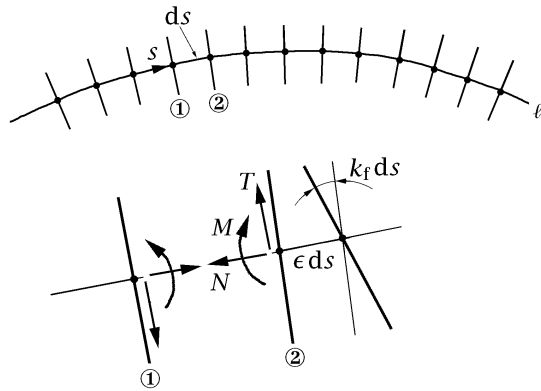
Deduzione alternativa del principio dei lavori virtuali per le travi piane inflesse.

Con il termine di *spostamenti virtuali* oppure di *campo di spostamenti virtuali* si intende un campo di spostamenti (e rotazioni) infinitesimi possibili, ovvero sia la parte prima di un campo di spostamenti (e rotazioni) che siano congruenti, cioè in accordo, con i vincoli sia interni che esterni del dato sistema di travi. Il lavoro di un sistema di forze per degli spostamenti virtuali viene poi detto *lavoro virtuale*.

Dato un sistema di travi vincolato con vincoli rigidi bilaterali, privi di attrito e indipendenti dal tempo e soggetto a date forze (esterne ed interne) il *principio dei lavori virtuali*, equivalente all'equilibrio, afferma che il lavoro virtuale L_v delle date forze per ogni campo di spostamenti virtuali è nullo:

$$L_v = 0. \quad (4.14)$$

Per rendere operativo il principio così enunciato, occorre valutare il lavoro delle forze interne, che nel caso in esame sono fornite dalle caratteristiche della sollecitazione. Si discretizzi allora una generica trave scegliendo un certo numero di punti sulla linea d'asse e le relative sezioni rette. Si consideri poi una di queste



sezioni, individuata dall'ascissa curvilinea s , e la sezione immediatamente successiva, posta alla distanza ds sulla tangente alla linea d'asse (a meno di infinitesimi di ordine superiore a ds). Le forze interne trasmesse sono lo sforzo normale N , lo sforzo di taglio T e il momento flettente M . Siano allora dati un campo di spostamenti virtuali v , w e φ e un campo di deformazioni virtuali ϵ e k_f congruenti con tali spostamenti. Lo spostamento della seconda sezione relativamente alla prima avviene nella direzione della tangente alla linea d'asse e vale ϵds . Poiché su tale sezione agisce uno sforzo normale opposto a tale spostamento il contributo al lavoro virtuale vale $-N\epsilon ds$. Inoltre, la seconda sezione ruota rispetto alla prima di $k_f ds$. Ancora, poiché su tale sezione agisce un momento flettente opposto a tale rotazione il contributo al lavoro virtuale vale $-Mk_f ds$.

Il contributo globale al lavoro virtuale delle forze interne si ottiene sommando il contributo di tutte le coppie di sezioni, al limite per $ds \rightarrow 0$, per cui il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$L_{ve} - \int_{\ell} (N\epsilon + Mk_f) ds = 0, \quad (4.15)$$

dove L_{ve} , detto *lavoro virtuale esterno*, rappresenta il lavoro virtuale delle sole forze esterne. Se si definisce quale *lavoro virtuale interno* L_{vi} il lavoro virtuale delle forze interne cambiato di segno:

$$L_{vi} = \int_{\ell} (N\epsilon + Mk_f) ds, \quad (4.16)$$

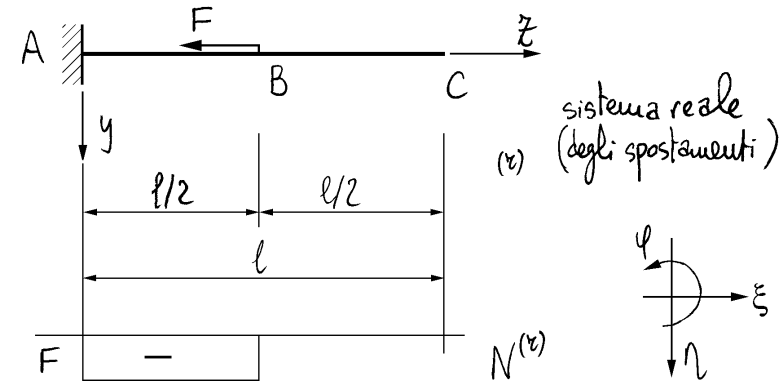
il principio dei lavori virtuali diventa:

$$L_{ve} = L_{vi}. \quad (4.17)$$

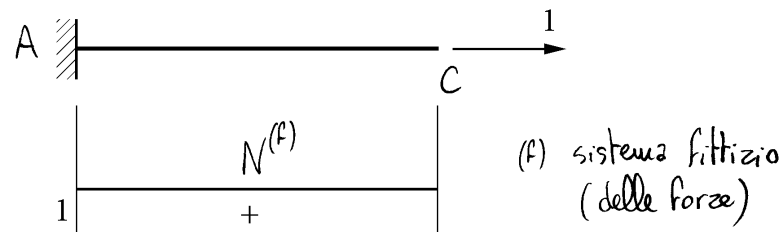
◇ ◇ ◇

4.4.1 Mensola soggetta ad una forza assiale

Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale dell'estremità libera C della mensola. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nell'estre-



mità C, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.



$$N^{(z)} = \begin{cases} -F & \text{per } z < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } z > \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \varepsilon^{(z)} = \begin{cases} -F/EA & \text{per } z < \frac{l}{2} \\ 0 & \text{per } z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$N^{(F)} = 1$$

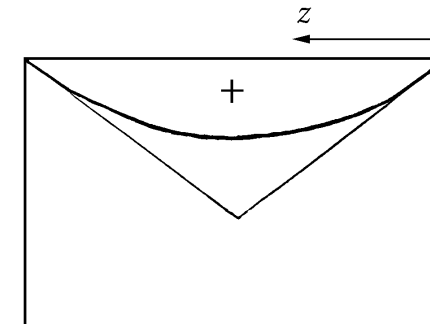
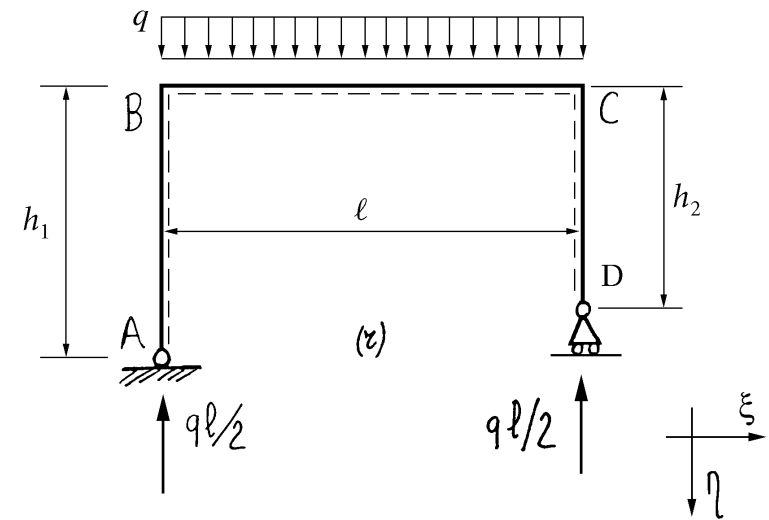
$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_c$$

$$L_{vi} = \int_0^l N^{(F)} \varepsilon^{(z)} dz = - \int_0^{l/2} \frac{1 \cdot F}{EA} dz = - \frac{Fl}{2EA}$$

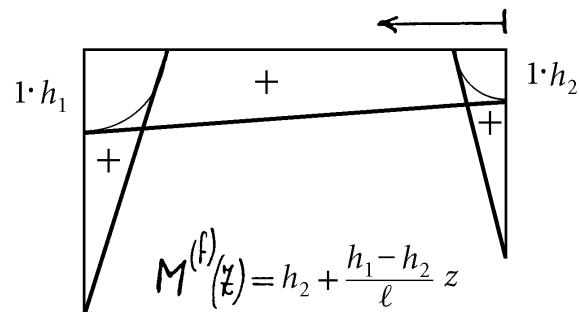
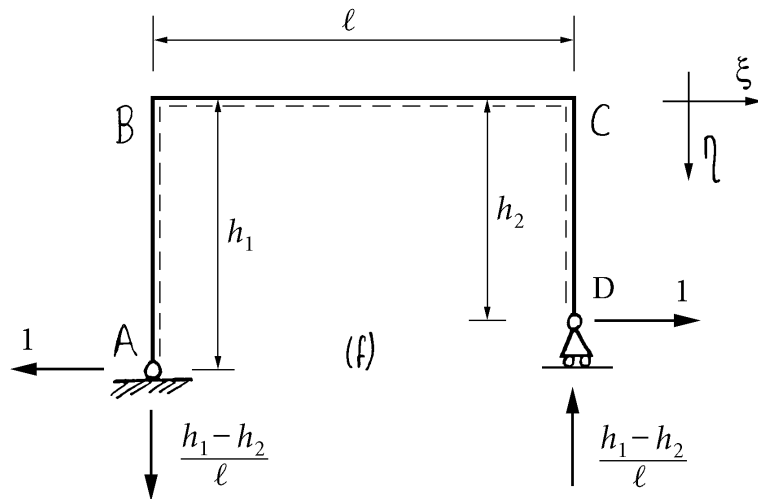
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_c = - \frac{Fl}{2EA}$$

4.4.2 Portale zoppo

Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale della sezione D vincolata da un carrello a piano di scorrimento orizzontale. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto, nella sezione D, ad una forza concentrata orizzontale e unitaria concorde con lo spostamento positivo.



$$M^{(z)}(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$



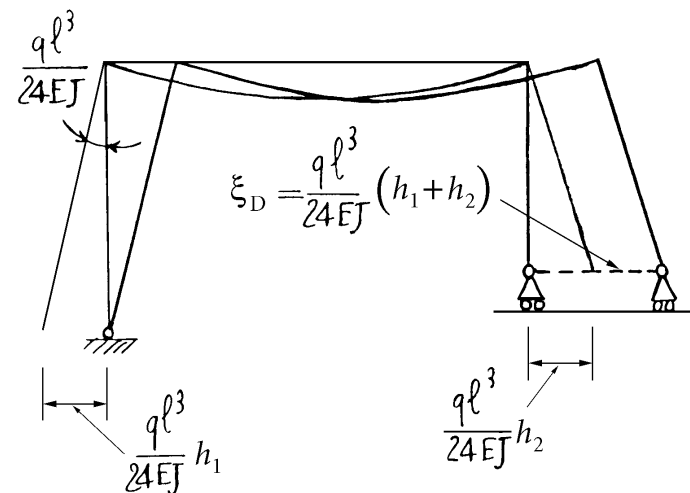
$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_D$$

$$L_{vi} = \int_0^\ell \left(h_2 + \frac{h_1 - h_2}{\ell} z \right) \left(\frac{q\ell}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) \frac{dz}{EJ} =$$

$$= \frac{q\ell^3}{4EJ} h_2 - \frac{q\ell^3}{6EJ} h_2 + \frac{q\ell^3}{6EJ} (h_1 - h_2) - \frac{q\ell^3}{8EJ} (h_1 - h_2) = \frac{q\ell^3}{24EJ} (h_1 + h_2)$$

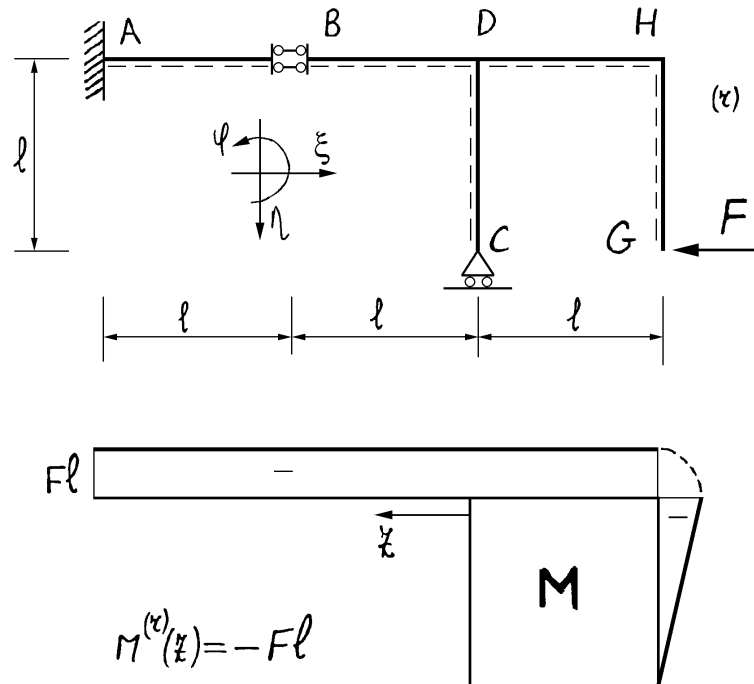
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \xi_D = \frac{q\ell^3}{24EJ} (h_1 + h_2)$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:



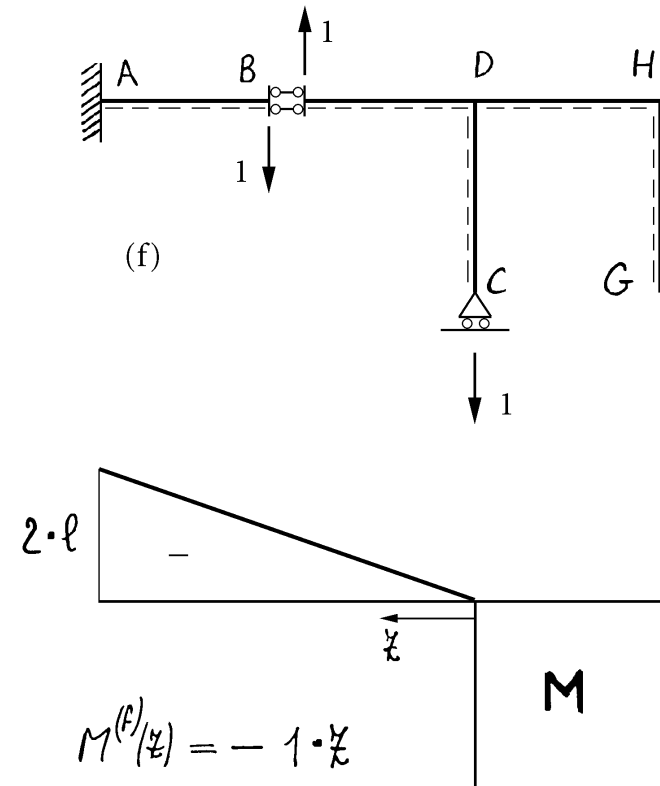
4.4.3 Telaio

Si vuole calcolare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in B. A tale scopo si assume un sistema fittizio soggetto,



nelle due facce della sezione B, a due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di sinistra concorde con il verso positivo. In tal modo il lavoro virtuale esterno vale:

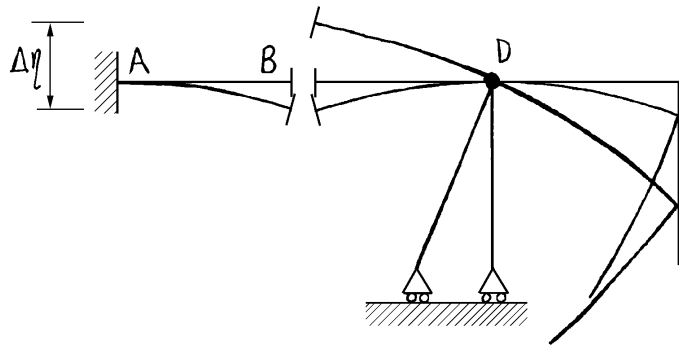
$$L_{ve} = 1 \cdot \Delta \eta_B = 1 \cdot (\eta_{BA} - \eta_{BD})$$



$$\begin{aligned} L_{vi} &= \int_0^{2\ell} \left\{ -1 \cdot \xi (-F\ell) \right\} \frac{d\xi}{EJ} = \\ &= \frac{F\ell}{EJ} \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_0^{2\ell} = 2 \frac{F\ell^3}{EJ} \end{aligned}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \quad \Rightarrow \quad \Delta \eta_B = 2 \frac{F \ell^3}{EJ}$$

Verifica con la composizione cinematica degli spostamenti:



$$\left. \begin{aligned} \eta_{BA} &= \frac{F \ell^3}{2EJ} \\ \varphi_{BA} &= -\frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{mensole AB}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= \frac{F \ell^3}{2EJ} \\ \varphi_{BD} &= \frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{mensole BD (nodo D fisso)}$$

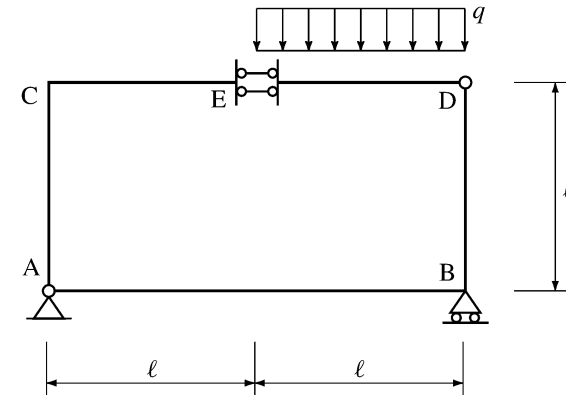
$$\varphi_{BD} + \varphi = \varphi_{BA} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -2 \frac{F \ell^2}{EJ} \quad (\varphi \equiv \text{rotazione nodo D})$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{BD} &= -\frac{3 F \ell^3}{2 EJ} \\ \varphi_{BD} &= -\frac{F \ell^2}{EJ} \end{aligned} \right\} \text{tratto BD (globale)}$$

$$\Delta \eta_B = \eta_{BA} - \eta_{BD} = 2 \frac{F \ell^3}{EJ}$$

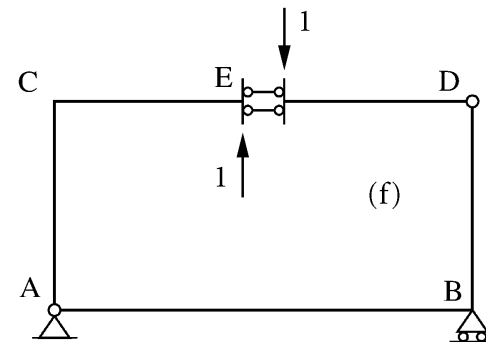
4.4.4 Struttura chiusa di forma rettangolare

Si vuole determinare lo spostamento verticale relativo in corrispondenza del doppio pendolo in E della struttura chiusa riportata in figura e già



risolta con la composizione cinematica degli spostamenti.

A Tale scopo la struttura fittizia viene caricata, nelle due facce della sezione E, da due forze concentrate verticali, unitarie e di verso opposto, con quella di destra concorde con il verso positivo. Ne consegue che il lavoro

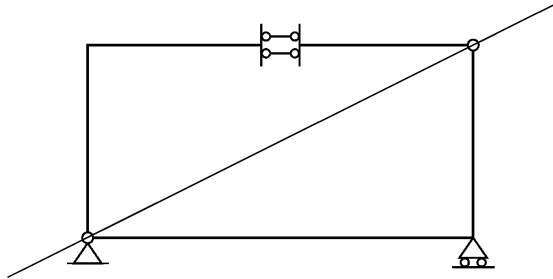


Struttura fittizia

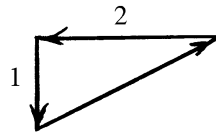
virtuale esterno vale:

$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_{ED} - 1 \cdot \eta_{EC} = 1 \cdot \Delta\eta_E. \quad (4.18)$$

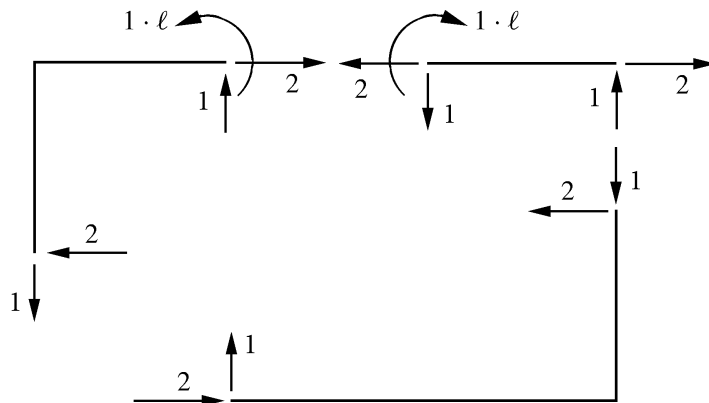
Si noti che la struttura fittizia è soggetta a due forze autoequilibrate. Essendo tale struttura vincolata esternamente da tre vincoli semplici, le reazioni vincolari esterne sono nulle.



Curva delle pressioni della struttura fittizia



Equilibrio tratto ED



Reazioni interne e esterne della struttura fittizia

Tenendo conto delle convenzioni indicate nel diagramma dei momenti, le equazioni dei momenti reale e fittizio risultano:

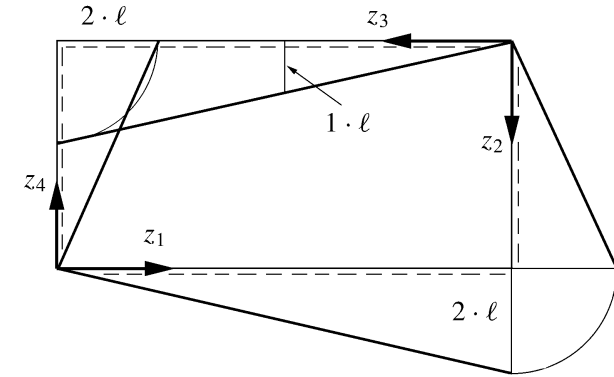


Diagramma del momento flettente della struttura fittizia

1. Tratto AB:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_1) = \frac{1}{4}q\ell z_1, \\ M^{(f)}(z_1) = 1 \cdot z_1, \end{cases} \quad 0 \leq z_1 \leq 2\ell; \quad (4.19)$$

2. Tratto BD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_2) = \frac{1}{2}q\ell z_2, \\ M^{(f)}(z_2) = 2 \cdot z_2, \end{cases} \quad 0 \leq z_2 \leq \ell; \quad (4.20)$$

3. Tratto CD:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_3) = \begin{cases} q\ell z_3 - \frac{1}{2}qz_3^2, & 0 \leq z_3 \leq \ell, \\ \frac{1}{2}q\ell^2, & \ell \leq z_3 \leq 2\ell, \end{cases} \\ M^{(f)}(z_3) = 1 \cdot z_3, \quad 0 \leq z_3 \leq 2\ell; \end{cases} \quad (4.21)$$

4. Tratto AC:

$$\begin{cases} M^{(r)}(z_4) = \frac{1}{2}q\ell z_4, \\ M^{(f)}(z_4) = 2 \cdot z_4, \end{cases} \quad 0 \leq z_4 \leq \ell. \quad (4.22)$$

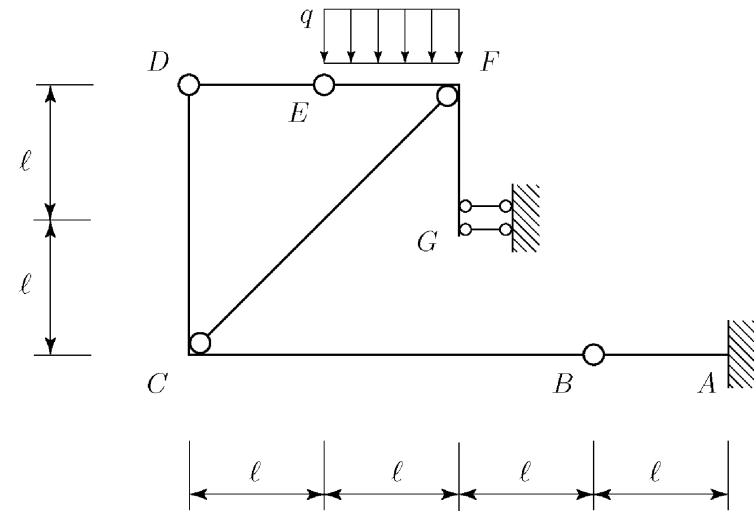
Il lavoro virtuale interno vale dunque:

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \int_{\ell} \frac{M^{(r)} M^{(f)}}{EJ} ds = \\
 &= \frac{1 \cdot q}{EJ} \left\{ \int_0^{2\ell} \frac{1}{4} \ell z_1^2 dz_1 + \int_0^{\ell} \ell z_2^2 dz_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_0^{\ell} \left(\ell z_3^2 - \frac{1}{2} z_3^3 \right) dz_3 + \int_{\ell}^{2\ell} \frac{1}{2} \ell^2 z_3 dz_3 \right) + \int_0^{\ell} \ell z_4^2 dz_4 \right\} = \\
 &= \left\{ \frac{8}{12} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \right\} \frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} = \\
 &= \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{8} \right) \frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} = \frac{55}{24} \left(\frac{1 \cdot q \ell^4}{EJ} \right), \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

e quindi:

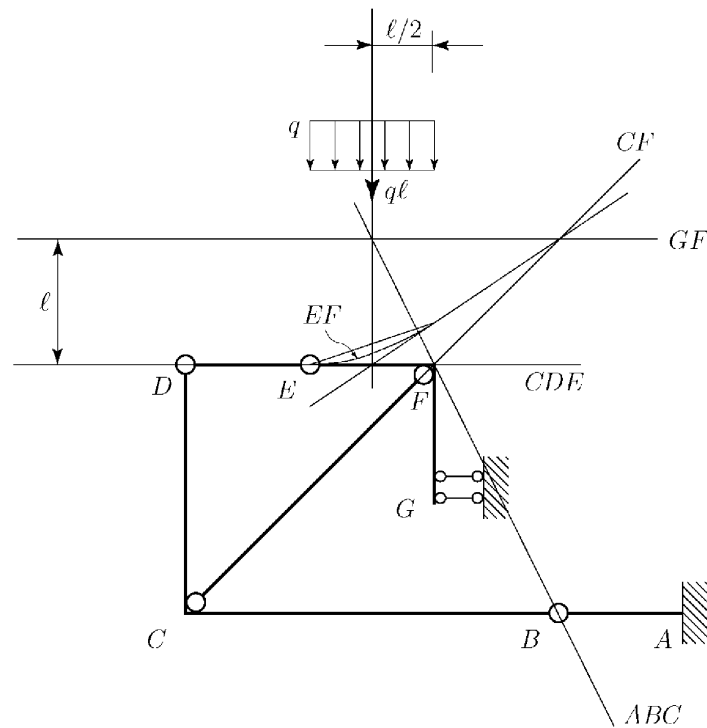
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \Delta \eta_E = \frac{55}{24} \frac{q \ell^4}{EJ}. \quad (4.24)$$

4.4.5 Struttura con una parte chiusa triangolare

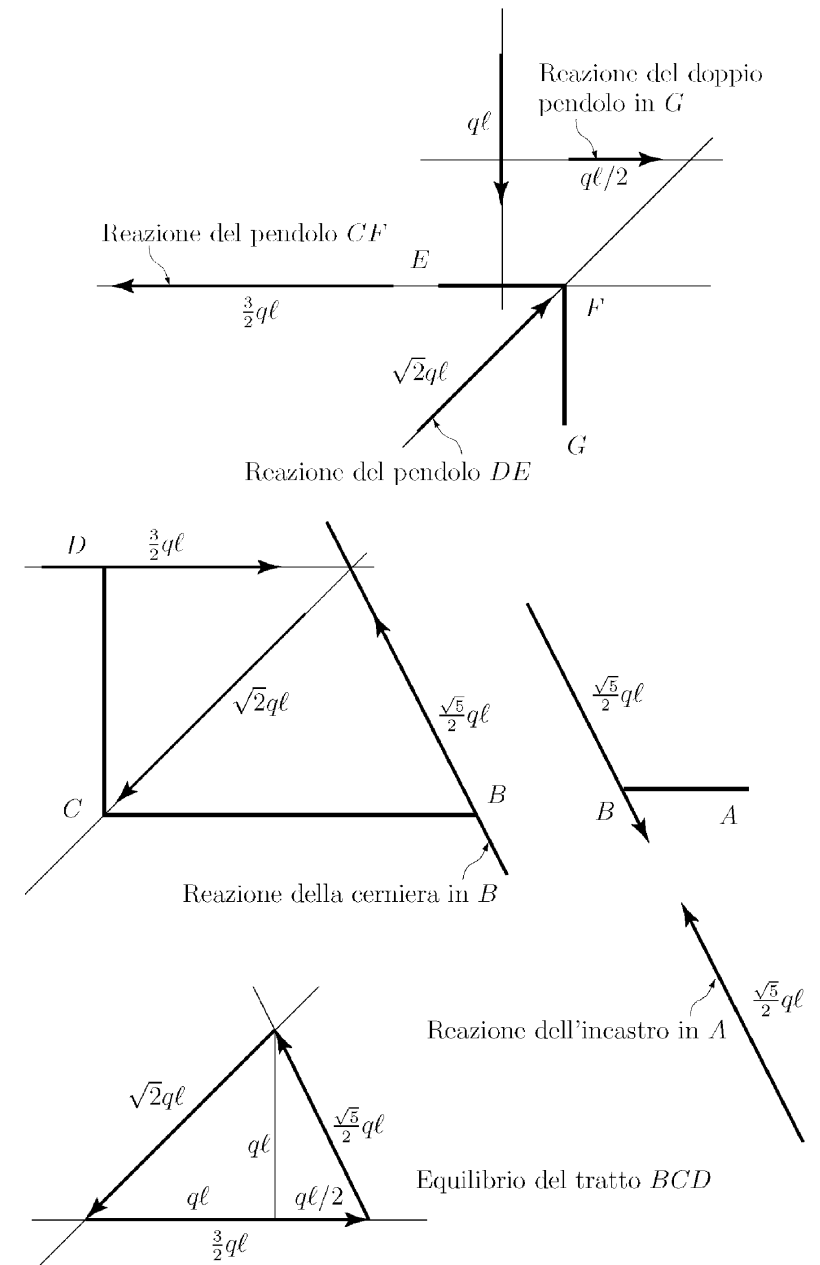
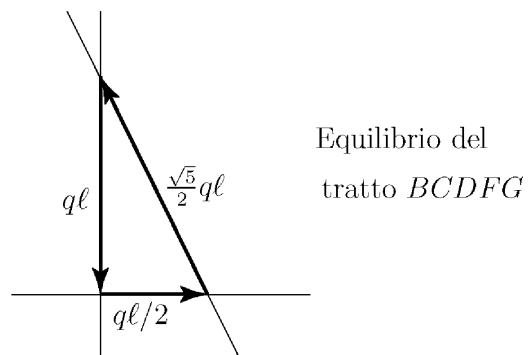


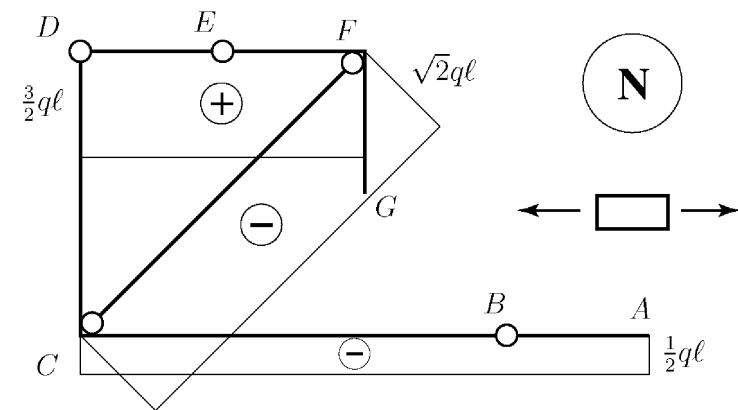
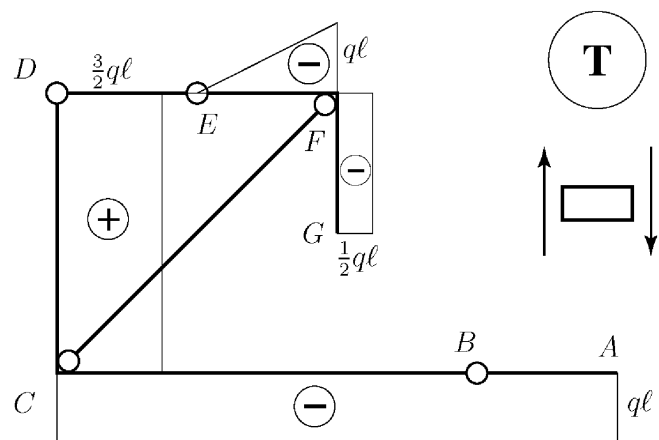
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni dei vincoli esterni ed interni e quantificarle;
- 4) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 5) Determinare la rotazione del pendolo CF (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo CF sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni

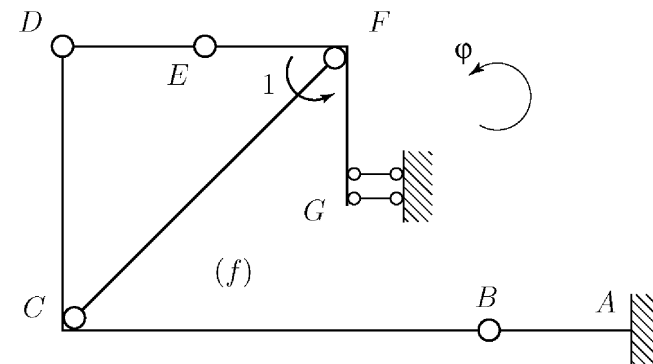


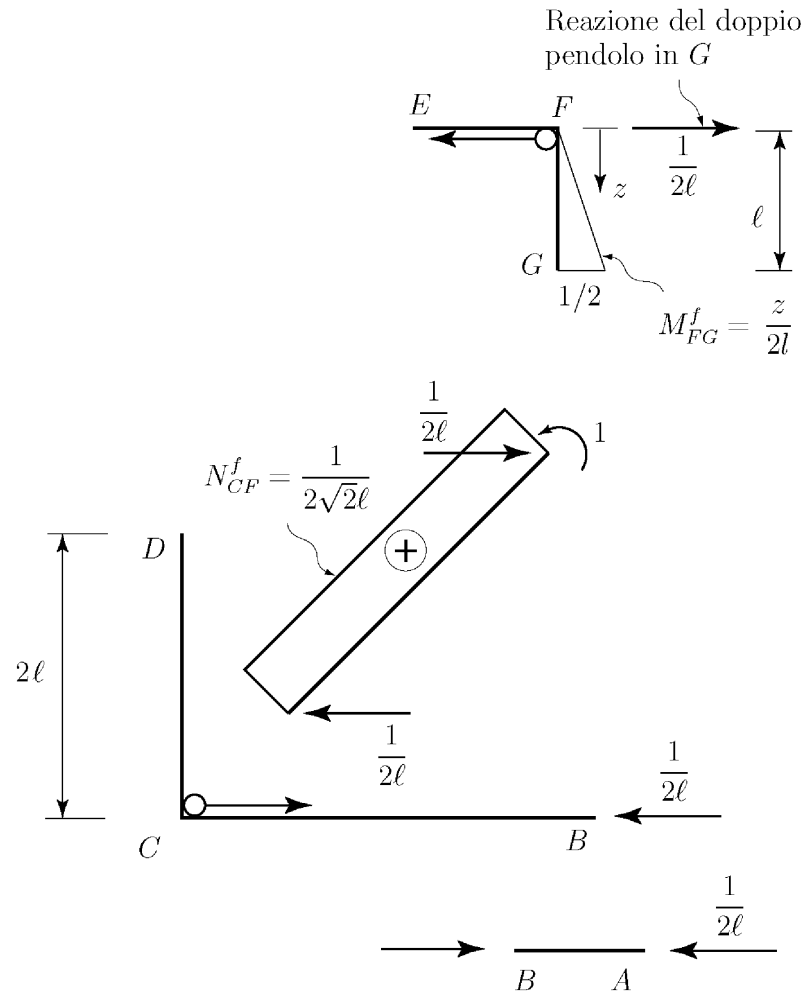
Reazioni interne ed esterne



[illegible]

Schema delle forze per il calcolo della rotazione del pendolo CF





$$\varphi_{CF} = -\frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}l} \right) (\sqrt{2}ql)(2\sqrt{2}l) +$$

$$+ \int_0^l \frac{1}{EJ} \left(\frac{z}{2l} \right) \left[\frac{ql}{2}(z+l) \right] dz = -\frac{\sqrt{2}ql}{EA} + \frac{5}{24} \frac{ql^3}{EJ}$$

4.5 Integrazione dell'equazione della linea elastica

Data una trave inflessa, omogenea nella sezione retta e ad asse rettilineo è possibile determinare il campo v degli spostamenti dei punti della linea d'asse integrando l'equazione costitutiva:

$$M = EJ\varphi', \quad (4.25)$$

dove al solito M è il momento flettente, E è il modulo di Young e J è il momento di inerzia.

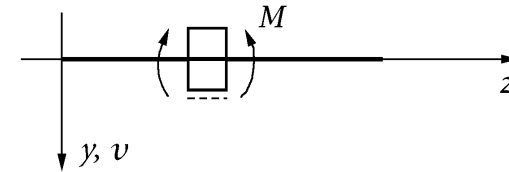
Si ricordi che il campo φ delle rotazioni delle sezioni rette dipende dal campo degli spostamenti v tramite il vincolo interno di trave inflessa:

$$\varphi = -v', \quad (4.26)$$

per cui l'equazione (4.25) diventa:

$$v'' = -\frac{M}{EJ}, \quad (4.27)$$

detta *equazione della linea elastica*. Tale equazione va associata alle opportune condizioni cinematiche dovute ai vincoli.



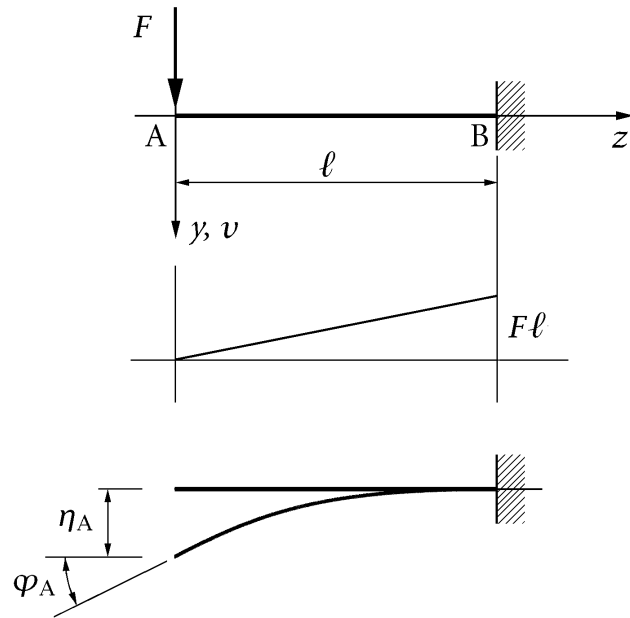
Quale esempio si consideri la mensola inflessa di figura, a sezione costante e soggetta ad un carico concentrato nell'estremità libera.

Alla sezione incastrata è impedito sia lo spostamento che la rotazione e quindi le condizioni cinematiche al contorno si scrivono:

$$v(\ell) = 0, \quad \varphi(\ell) = -v'(\ell) = 0. \quad (4.28)$$

Poiché il momento flettente vale $M = -Fz$, integrando l'equazione della linea elastica si ottiene:

$$v' = \frac{Fz^2}{2EJ} + c_1, \quad (4.29a)$$



$$v = \frac{Fz^3}{6EJ} + c_1 z + c_2. \quad (4.29b)$$

Le costanti di integrazione c_1 e c_2 si ottengono imponendo le condizioni al contorno:

$$v(\ell) = 0 \Rightarrow \frac{F\ell^3}{6EJ} + c_1 \ell + c_2 = 0, \quad (4.30a)$$

$$v'(\ell) = 0 \Rightarrow \frac{F\ell^2}{2EJ} + c_1 = 0, \quad (4.30b)$$

da cui:

$$c_1 = -\frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad c_2 = \frac{F\ell^3}{3EJ}. \quad (4.31)$$

Si ottengono quindi i seguenti campi di spostamento e rotazione:

$$v = \frac{F}{6EJ} (z^3 - 3\ell^2 z + 2\ell^3), \quad (4.32a)$$

$$\varphi = \frac{F}{2EJ} (\ell^2 - z^2). \quad (4.32b)$$

In particolare, la rotazione φ_A e lo spostamento verticale η_A dell'estremità libera della mensola valgono:

$$\varphi_A = \varphi(0) = \frac{F\ell^2}{2EJ}, \quad \eta_A = v(0) = \frac{F\ell^3}{3EJ}. \quad (4.33)$$

4.6 Analogia di Mohr

Si è visto che il problema cinematico, nel caso di travi ad asse rettilineo, è retto dalle equazioni differenziali (4.25) e (4.27) riscritte nel seguito:

$$v'' = -\frac{M}{EJ}, \quad (4.34a)$$

$$v' = -\varphi. \quad (4.34b)$$

L'analogia di Mohr riguarda l'osservazione che la struttura di queste equazioni è analoga a quelle che reggono il problema statico di una trave ad asse rettilineo. Infatti si considerino le due equazioni indefinite di equilibrio alla rotazione e alla traslazione ortogonale alla linea d'asse:

$$M^{*'} = T^*, \quad (4.35a)$$

$$T^{*'} = -q^*, \quad (4.35b)$$

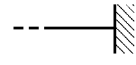
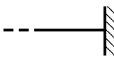
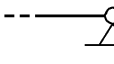
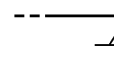
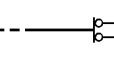
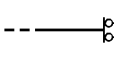
dove l'asterisco in apice alle variabili serve a ricordare che queste riguardano il problema statico. Si derivi la prima di queste equazioni e si utilizzi la seconda per eliminare $T^{*'}$. All'equazione che così si ottiene si associ la prima delle precedenti ottenendo due equazioni analoghe a quelle del problema cinematico:

$$M^{*''} = -q^*, \quad (4.36a)$$

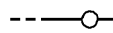
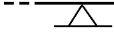
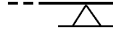
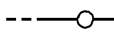
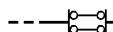
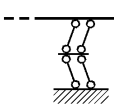
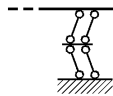
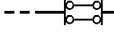
$$M^{*'} = -(-T^*). \quad (4.36b)$$

In tale analogia allo spostamento v ortogonale alla linea d'asse corrisponde il momento flettente M^* , al rapporto M/EJ corrisponde il carico ripartito q^* ortogonale alla linea d'asse e alla rotazione φ corrisponde il taglio T^* cambiato di segno:

$$v \Leftrightarrow M^*, \quad (4.37a)$$

	$v \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* \neq 0$
	$v = 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* = 0$
	$v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* \neq 0$
	$v \neq 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* = 0$

Vincoli di estremità

	$\Delta v = 0$ $\Delta \varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$\Delta M^* = 0$ $\Delta T^* \neq 0$
	$v = 0$ $\varphi \neq 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* = 0$ $T^* \neq 0$
	$\Delta v \neq 0$ $\Delta \varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$\Delta M^* \neq 0$ $\Delta T^* = 0$
	$v \neq 0$ $\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$		$M^* \neq 0$ $T^* = 0$

Vincoli intermedi

$$\frac{M}{EJ} \Leftrightarrow q^*, \quad (4.37b)$$

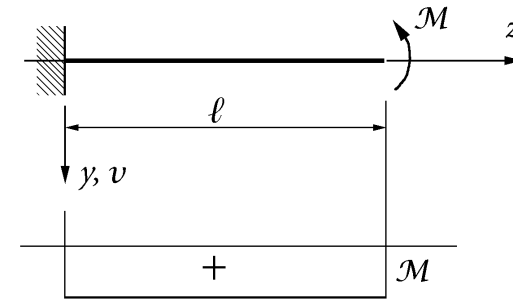
$$\varphi \Leftrightarrow -T^*. \quad (4.37c)$$

Risolvere un problema cinematico equivale quindi a risolvere un opportuno problema statico, con il vantaggio di potere utilizzare automaticamente tutte le tecniche sviluppate per risolvere i problemi statici.

Naturalmente, per passare dal problema cinematico al problema statico le condizioni al contorno cinematiche devono essere trasformate in condizioni al contorno sulle forze. Ai vincoli del problema cinematico vengono a corrispondere in tal modo opportuni vincoli del problema statico associato, come riportato nelle due tabelle, una per i vincoli di estremità ed una per quelli intermedi.

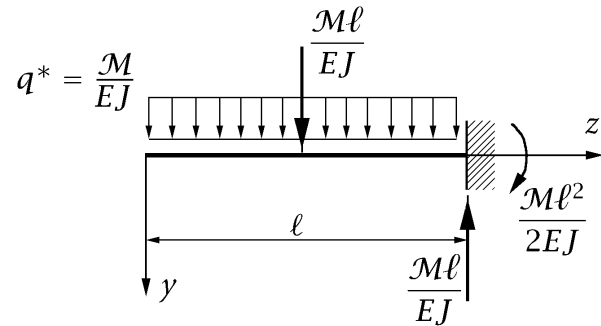
4.6.1 Mensola soggetta ad una coppia

Come primo esempio, si consideri una mensola soggetta ad una coppia $\mathcal{M}$ nell'estremità libera, della quale si vogliono valutare lo spostamento e la rotazione dell'estremità libera. Nell'analogia di Mohr alla mensola del



problema cinematico corrisponde una mensola nel problema statico, con estremità libera e incastro invertiti. Il momento del problema cinematico è costante ed uguale alla coppia applicata, e quindi il carico ripartito del problema statico vale $q^* = \mathcal{M}/EJ$. Risulta quindi:

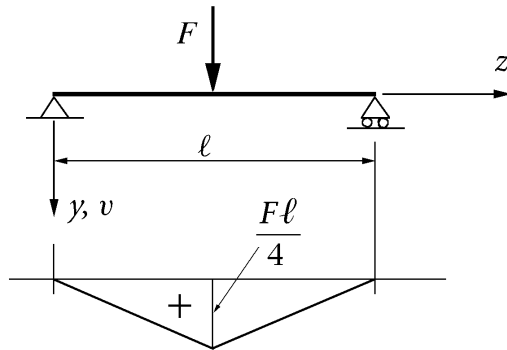
$$v(\ell) = M^*(\ell) = -\frac{\mathcal{M}\ell^2}{2EJ}, \quad (4.38a)$$



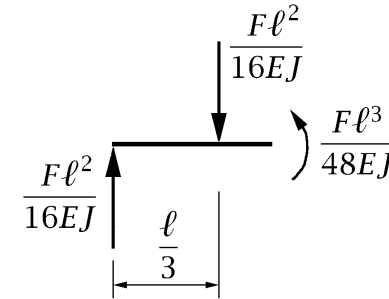
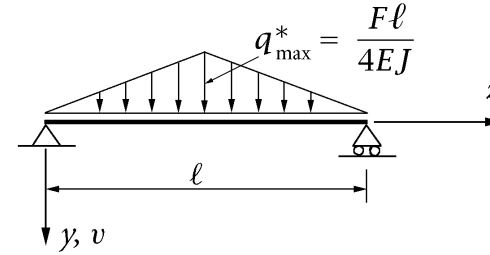
$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{M\ell}{EJ}. \quad (4.38b)$$

4.6.2 Trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria

Come secondo esempio si consideri invece una trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzeria F , della quale si vogliono valutare



la freccia in mezzeria e le rotazioni delle sezioni sugli appoggi. Nell'analoga di Mohr alla trave appoggiata del problema cinematico corrisponde un'analoga trave appoggiata nel problema statico. Il momento flettente del problema cinematico è lineare e ne risulta un carico ripartito triangolare



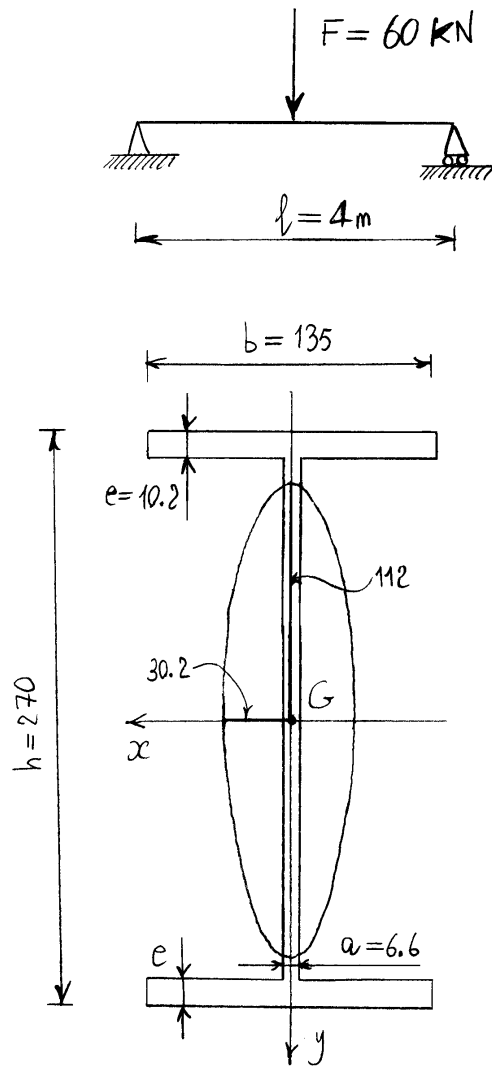
simmetrico per il problema statico associato. Ne consegue:

$$\varphi(0) = -T^*(0) = -\frac{F\ell^2}{16EJ}, \quad (4.39a)$$

$$\varphi(\ell) = -T^*(\ell) = \frac{F\ell}{16EJ}, \quad (4.39b)$$

$$v(\ell/2) = M^*(\ell/2) = \left(\frac{F\ell^2}{16EJ}\right) \frac{\ell}{3} = \frac{F\ell^3}{48EJ}. \quad (4.39c)$$

Trave IPE270 appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzzeria



$$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$J_x = 5790 \text{ cm}^4$$

nella figura le misure
sono in mm

Freccia in mezzzeria della trave

$$f = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{F l^3}{48 E J} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^3}{48 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} = 6.58 \text{ mm}$$

$$\frac{f}{l} = \frac{6.58 \text{ mm}}{4 \times 10^3 \text{ mm}} = 0.001645 = 0.1645 \%$$

Rotazione delle sezioni sugli appoggi

$$\varphi = \frac{F l^2}{16 E J} = \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})^2}{16 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.28^\circ$$

Curvatura flessionale massima

$$K_{\max} = \frac{M_{\max}}{E J} = \frac{F l}{4 E J} =$$

$$= \frac{(60 \times 10^3 \text{ N}) \times (4 \times 10^3 \text{ mm})}{4 \times (2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2) \times (5.79 \times 10^7 \text{ mm}^4)} =$$

$$= 4.93 \times 10^{-6} \text{ rad/mm} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Raggio di curvatura minimo = 203 m

4.7 Cedimenti e distorsioni

4.7.1 Cedimenti vincolari elastici

Un vincolo è detto essere cedevole elasticamente se la reazione del vincolo dipende univocamente dallo spostamento del vincolo stesso (cedimento).

In particolare il cedimento può essere elastico-lineare, ovvero sia la reazione del vincolo può essere proporzionale al cedimento stesso, tramite una costante K di rigidezza che rappresenta la reazione vincolare corrispondente al cedimento unitario:

$$R = K s,$$

dove R è la reazione e s il cedimento del vincolo.

Naturalmente, questo è equivalente a dire che il cedimento del vincolo è proporzionale alla reazione vincolare tramite una costante c di cedevolezza (o di flessibilità) che rappresenta il cedimento vincolare corrispondente alla reazione unitaria:

$$s = c R.$$

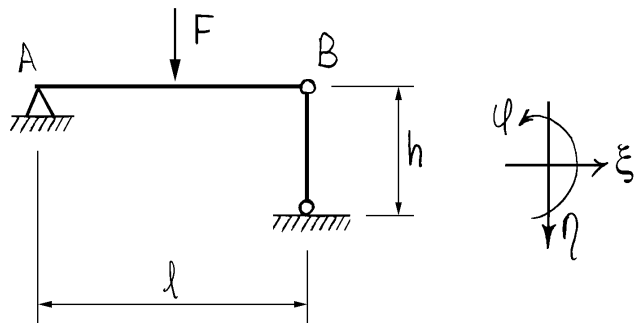
Naturalmente, la cedevolezza è l'inverso della rigidità:

$$c = \frac{1}{K}.$$

Un vincolo cedevole elasticamente si può indicare con il simbolo di una molla.

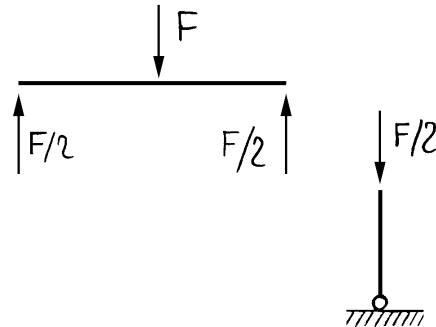
È evidente che se la struttura non è caricata la reazione è nulla e non vi sono cedimenti.

Un pendolo deformabile assolutamente è equivalente ad un appoggio cedevole elasticamente, come indicato nell'esempio seguente.



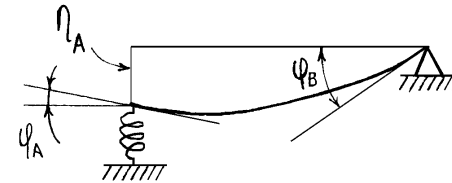
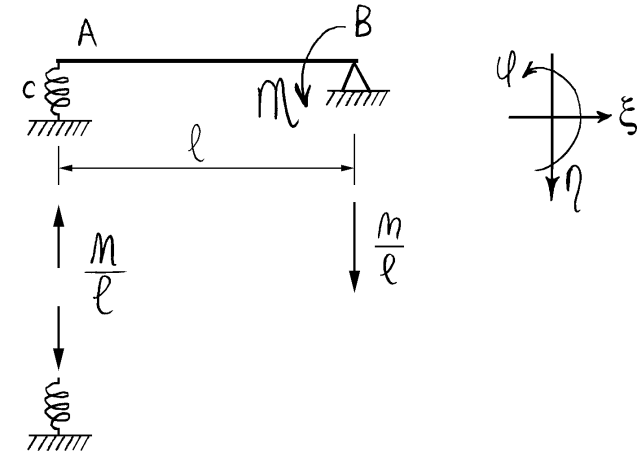
La cedevolezza del vincolo vale:

$$c = \frac{h}{EA}$$



Il cedimento del vincolo vale invece:

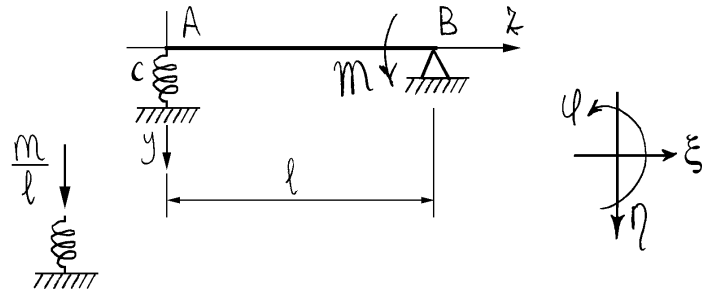
$$\eta_B = \frac{F}{2} \frac{h}{EA}$$



$$\begin{cases} \eta_A = c \frac{m}{l} \\ \varphi_A = c \frac{m}{l^2} - \frac{m l}{6 E J} \\ \varphi_B = \frac{m}{k l^2} + \frac{m l}{3 E J} \end{cases}$$

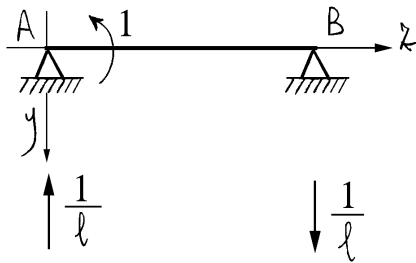
Calcolo di φ_A col principio dei lavori virtuali

Schema reale



$$\eta_A^{(v)} = c \frac{m}{l}, \quad M^{(v)} = \frac{m}{l} z$$

Schema delle forze



$$M^{(f)} = \frac{z}{l} - 1$$

$$L_{ve} = \varphi_A - \left(\frac{1}{l}\right) \left(c \frac{m}{l}\right) = \varphi_A - \frac{c}{l^2} m$$

$$L_{vi} = \int_0^l \frac{m}{EJl} z \left(\frac{z}{l} - 1\right) dz = -\frac{ml}{6EJ}$$

$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \varphi_A = -\frac{ml}{6EJ} + \frac{c}{l^2} m$$

4.7.2 Cedimenti vincolari anelastici

I vincoli cedevoli anelasticamente sono di vario tipo: plastici, viscosi, elasto-plastici, ecc.

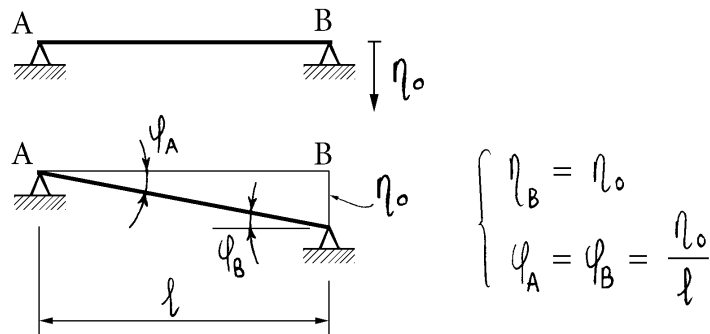
Un vincolo viscoso, per esempio, è tale da aumentare il cedimento sotto carico costante, ovvero senza incremento della reazione vincolare.

Un caso particolare di vincolo anelastico è

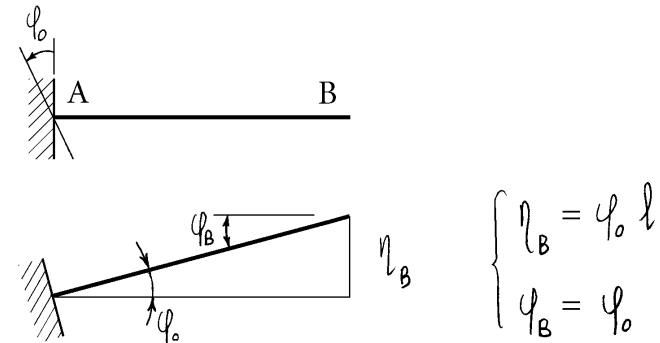
quello di uno spostamento impresso. Questo spostamento (che rappresenta il cedimento del vincolo) è un dato del problema ed è indipendente dalle forze applicate. In particolare, agisce anche sulla struttura non caricata.

Se la struttura è isostatica, uno spostamento impresso provoca soli moti rigidi delle parti che compongono la struttura.

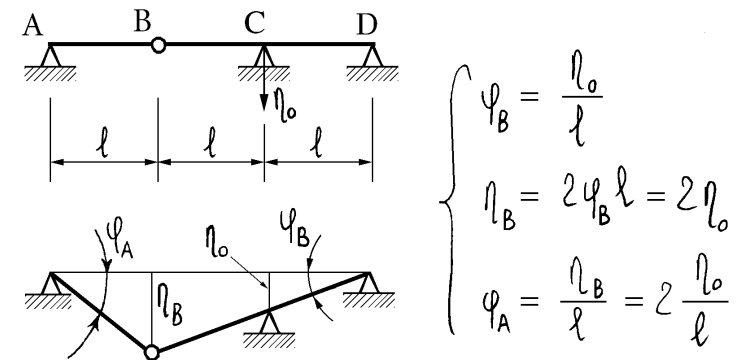
Esempio 1 (cedimento di un appoggio):



Esempio 2 (cedimento angolare di un incastro):



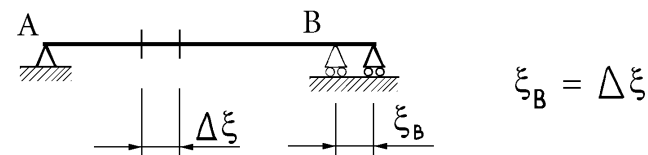
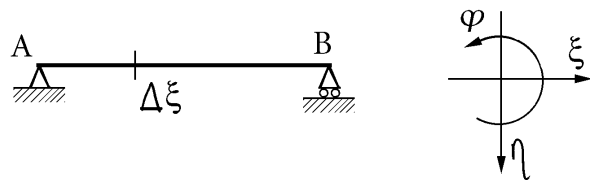
Esempio 3 (cedimento di un appoggio):



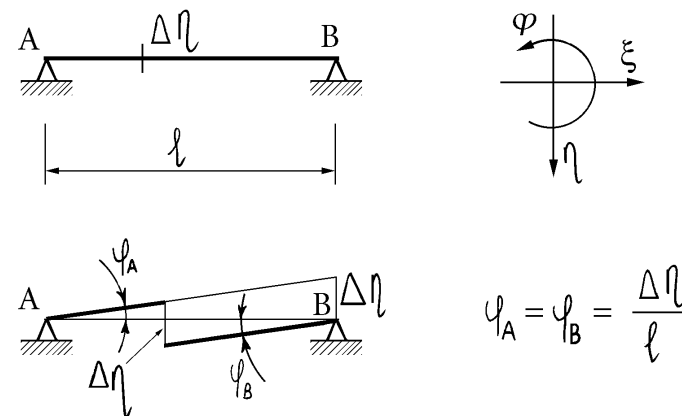
4.7.3 Distorsioni concentrate

Se si sconnette una trave in corrispondenza di una sezione interna, si impone uno spostamento relativo e infine si riconnette la trave si ottiene una cosiddetta distorsione concentrata. Se la trave è isostatica, a seguito della distorsione impressa si hanno dei semplici moti rigidi delle due parti in cui la trave è stata sconnessa.

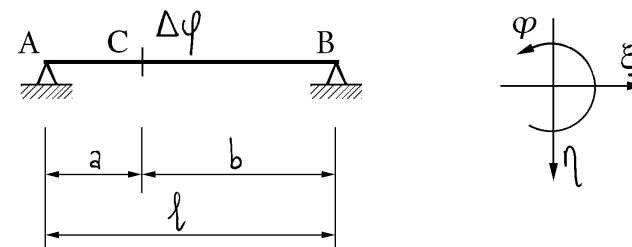
Distorsione di tipo assiale nella sezione interna di una trave con appoggio e carrello:

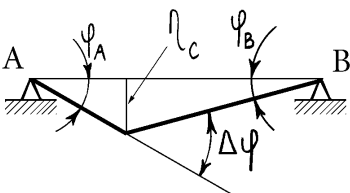


Distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:



Distorsione di rotazione relativa in una sezione interna di una trave appoggio-appoggio:



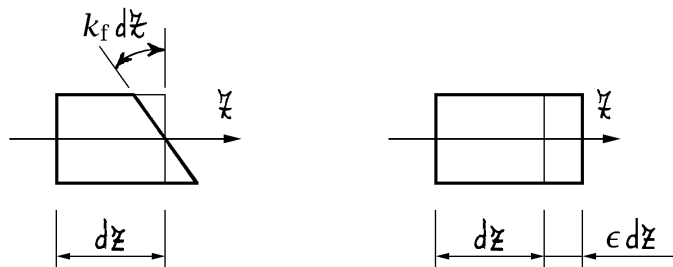


$$\begin{cases} a\psi_A = b\psi_B \\ \psi_A + \psi_B = \Delta\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_A = \frac{b}{l} \Delta\psi \\ \psi_B = \frac{a}{l} \Delta\psi \end{cases}$$

$$\eta_c = a\psi_A = b\psi_B = \frac{ab}{l} \Delta\psi$$

4.7.4 Distorsioni distribuite

Si dice che un elemento di trave subisce una *distorsione distribuita* se viene in un qualche modo deformato, a partire da una configurazione naturale (cioè non soggetta a forze e a caratteristiche della sollecitazione), fino a portarlo in una nuova configurazione naturale, quindi deformata rispetto alla precedente ma ancora non soggetta a forze e caratteristiche della sollecitazione. A seconda del tipo di deformazione impressa, dilatazione lineare ϵ oppure curvatura flessionale k_f , la distorsione può essere di tipo assiale oppure flessionale.



Si noti che nel caso di distorsione distribuita le due sezioni di estremità dell'elemento di trave subiscono un moto relativo infinitesimo, a differenza del caso delle distorsioni concentrate in cui si aveva un moto relativo finito tra le due facce di una stessa sezione. Se la distorsione è distribuita su un tratto di lunghezza finita si genererà un moto relativo finito tra due sezioni qualunque del tratto poste a distanza finita.

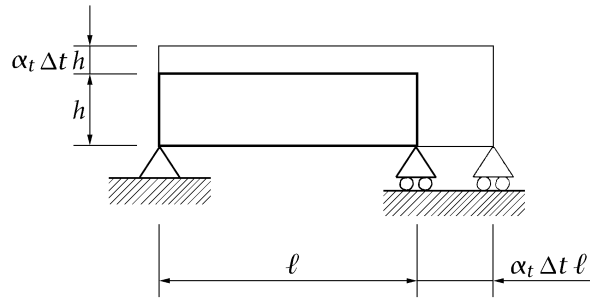
Se il sistema è isostatico, le eventuali distorsioni possono svilupparsi liberamente e il sistema si deforma in assenza di caratteristiche della sollecitazione. Se invece il sistema è iperstatico, lo sviluppo delle distorsioni può essere contrastato e si possono generare reazioni vincolari e caratteristiche della sollecitazione. In quest'ultimo caso, la deformazione totale (rispetto alla configurazione che si aveva prima della distorsione) sarà la somma tra quella dovuta alla distorsione e quella dovuta alle caratteristiche della sollecitazione.

Ci sono due importanti casi in cui si sviluppano distorsioni distribuite. Il primo caso è quello dell'interazione con gli effetti termici, poiché gli incrementi di temperatura danno luogo a delle dilatazioni lineari in assenza di sollecitazioni, almeno fino a che tali dilatazioni possono svilupparsi liberamente. Il secondo caso è invece quello in cui le sollecitazioni impresse superano il limite di snervamento e si sviluppano delle deformazioni plastiche nel materiale. Ne risultano delle deformazioni permanenti, cioè delle distorsioni, una volta che i carichi vengano rimossi. Come vedremo nel seguito, nei sistemi di travi inflesse le distorsioni dovute alla plasticità del materiale sono normalmente limitate in zone ristrette nell'intorno delle sezioni dove si raggiungono i massimi relativi del diagramma del momento flettente. Ne consegue che tali distorsioni distribuite possono allora essere approssimate da distorsioni concentrate in tali sezioni (*cerniere plastiche*).

4.7.5 Distorsioni termiche

Un incremento uniforme di temperatura Δt produce, in un corpo continuo di materiale termicamente omogeneo, una dilatazione ϵ costante di tutte le linee interne al corpo in assenza di scorrimenti. La configurazione "deformata" dall'incremento di temperatura è dunque omotetica alla configurazione soggetta alla sola temperatura iniziale, con costante di omotetia pari alla dilatazione ϵ . Inoltre, tali deformazioni si sviluppano senza provocare sollecitazioni. Questo significa che se il corpo è inizialmente in una configurazione naturale (privo di forze agenti e di sollecitazioni inter-

ne) allora continua a restare in una configurazione naturale anche dopo la distorsione termica. Quindi la configurazione naturale di un corpo termicamente omogeneo varia, in modo omotetico, a seguito di un incremento uniforme di temperatura. Se invece l'incremento di temperatura non è uni-



forme oppure se il corpo non è termicamente omogeneo, nel corpo possono sorgere delle cosiddette *autotensioni*, cioè delle sollecitazioni interne autoequilibrate (i carichi esterni continuano ad essere nulli).

La dilatazione lineare α_t per unità di incremento di temperatura viene chiamata *coefficiente di dilatazione termica*:

$$\alpha_t = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{\epsilon(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (4.40)$$

ed è in generale funzione della temperatura t . Comunque, nell'ambito dei problemi strutturali, il coefficiente di dilatazione termica può essere considerato costante con sufficiente approssimazione. Per esempio, per l'acciaio e il ferro tra 0° e 100° si può utilizzare il valore medio $\alpha_t = 0.000012$. Nel caso di un corpo termicamente omogeneo, il coefficiente di dilatazione termica è costante nel corpo.

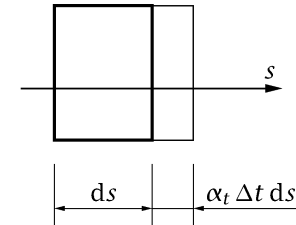
Se il coefficiente di dilatazione termica viene considerato costante, la dilatazione lineare ϵ dovuta ad un incremento di temperatura Δt vale:

$$\epsilon = \alpha_t \Delta t, \quad (4.41)$$

e, nel caso di incremento uniforme e corpo termicamente omogeneo, l'allungamento di una linea inizialmente di lunghezza ℓ vale:

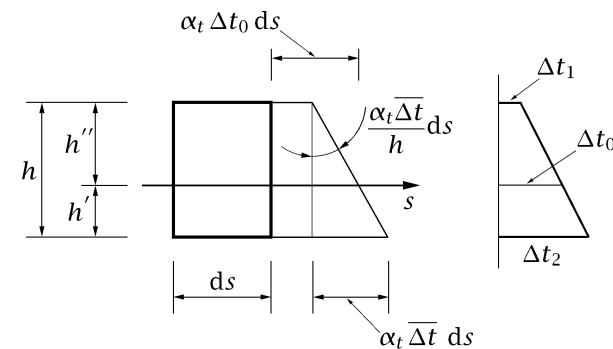
$$\Delta \ell = \alpha_t \Delta t \ell. \quad (4.42)$$

Nell'ambito della teoria della trave, si è solo in grado di studiare gli effetti delle dilatazioni delle fibre longitudinali. Prescindendo allora dalla dilatazione delle altre fibre, si consideri un elemento di trave soggetto ad una variazione termica uniforme. Come illustrato, l'elemento di trave, ini-



zialmente di lunghezza ds , si allunga della quantità $\alpha_t \Delta t ds$. Si noti che affinché un elemento di trave si deformi in tal modo basta che Δt e α_t siano costanti sulla sezione retta di cui l'elemento è intorno. Per il resto, sia l'incremento di temperatura che il coefficiente di dilatazione termica possono essere variabili lungo la linea d'asse, ovverossia possono essere funzioni della coordinata s della linea d'asse.

Se poi l'incremento di temperatura Δt varia linearmente lungo l'altezza della trave, la deformazione termica viene ancora assorbita in assenza di autotensioni. Se la variazione termica passa dal valore Δt_1 all'estradosso



al valore Δt_2 all'intradosso ne risulta, come illustrato, sia una dilatazione lineare della linea d'asse che una curvatura flessionale. La dilatazione della

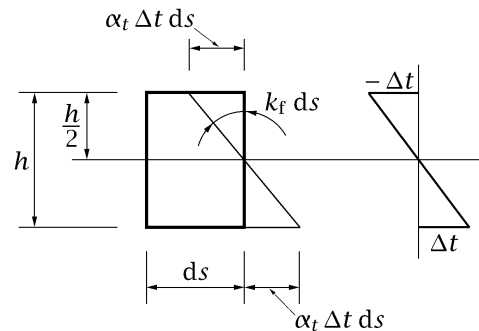
linea d'asse è dovuta all'incremento Δt_0 di temperatura al livello della fibra baricentrica:

$$\Delta t_0 = \Delta t_1 + \frac{h''}{h}(\Delta t_2 - \Delta t_1) = \frac{h' \Delta t_1 + h'' \Delta t_2}{h}, \quad (4.43)$$

dove h'' è la distanza del baricentro dall'estradosso e h l'altezza della sezione mentre la curvatura flessionale è dovuta invece al salto totale $\overline{\Delta t} = \Delta t_2 - \Delta t_1$ di temperatura tra estradosso e intradosso. Ne risulta:

$$\epsilon^G = \alpha_t \Delta t_0, \quad k_f = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h}. \quad (4.44)$$

Se la variazione termica passa dal valore Δt all'intradosso a quello opposto $-\Delta t$ all'estradosso si dice che si ha una *variazione termica a farfalla*. Il



salto totale di temperatura tra estradosso e intradosso vale ora $\overline{\Delta t} = 2 \Delta t$ e ne risulta la seguente curvatura flessionale della linea d'asse:

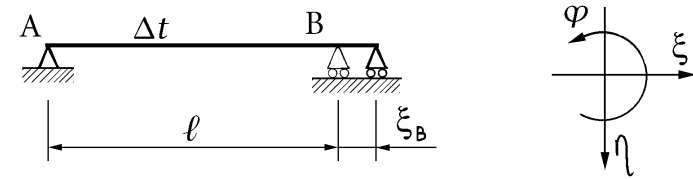
$$k_f = \frac{2 \alpha_t \Delta t}{h}. \quad (4.45)$$

Si noti che se l'asse baricentrico non si trova a metà altezza, a seguito della distorsione termica a farfalla risulta anche una dilatazione della linea d'asse baricentrica:

$$\epsilon^G = \alpha_t \frac{(h'' - h')}{h} \Delta t. \quad (4.46)$$

Tale dilatazione è comunque normalmente trascurabile poiché baricentro e metà altezza, se non coincidenti, sono di norma poco discosti.

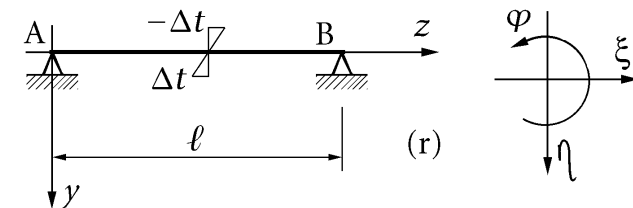
Trave appoggiata soggetta a distorsione termica uniforme



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell$$

Trave appoggiata soggetta a distorsione termica a farfalla

Si vuole valutare la rotazione nella sezione B di estremità e a tale scopo si utilizza il principio dei lavori virtuali. La trave appoggiata soggetta alla distorsione termica a farfalla rappresenta lo schema reale, cioè lo schema degli spostamenti e deformazioni congruenti. Poiché il salto totale di



temperatura vale $2 \Delta t$ la curvatura flessionale reale risulta:

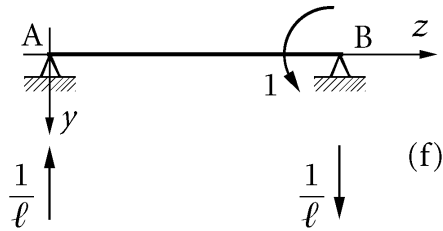
$$k_f^{(r)} = \frac{\alpha_t \overline{\Delta t}}{h} = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h}. \quad (4.47)$$

Lo schema fittizio, cioè lo schema delle forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrate, è la stessa trave appoggiata soggetta ad una coppia unitaria in B. Il momento flettente fittizio vale:

$$M^{(f)} = \frac{1z}{\ell}. \quad (4.48)$$

I lavori virtuali esterno ed interno valgono:

$$L_{ve} = 1 \varphi_B, \quad (4.49)$$



$$L_{vi} = \int_0^l M^{(f)} k_f^{(r)} dz = \int_0^l \left(\frac{1z}{l} \right) \left(2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right) dz = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{\ell h} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^l = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}. \quad (4.50)$$

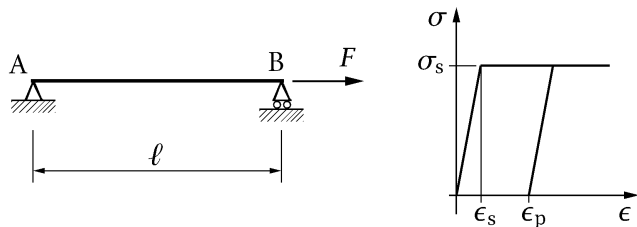
Risulta quindi:

$$L_{ve} = L_{ve} \Rightarrow \varphi_B = \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h}. \quad (4.51)$$

4.7.6 Distorsioni plastiche

Distorsioni plastiche distribuite di tipo assiale

Si consideri una trave appoggiata costituita di materiale elastoplastico e soggetta ad una forza F di tipo assiale. Si supponga che la risposta elastoplastica sia di tipo bilineare e perfettamente plastica, come riportato nel diagramma. Si incrementi la forza F fino al valore F_s che plasticizza la



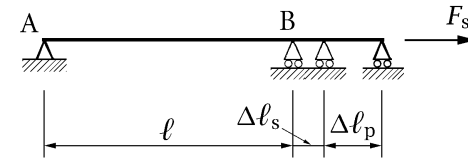
sezione:

$$F_s = \sigma_s A, \quad (4.52)$$

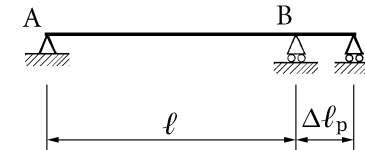
dove σ_s è la tensione di snervamento. La trave si allunga di $\Delta \ell_s$ per effetto della deformazione elastica:

$$\Delta \ell_s = \frac{F_s \ell}{EA}, \quad (4.53)$$

dopodiché la deformazione fluisce liberamente. Si immagini di fermare il flusso della deformazione plastica quando la trave si è allungata di un ulteriore $\Delta \ell_p$ e indi di scaricare la trave. La quota elastica $\Delta \ell_s$ dell'allungamen-



to viene recuperata e la trave risulta scarica e non soggetta a caratteristiche della sollecitazione. Grazie alla plasticità del materiale si è passati così da una configurazione naturale in cui la trave è lunga ℓ ad un'altra configurazione naturale in cui la trave è lunga $\ell + \Delta \ell_p$. La deformazione plastica



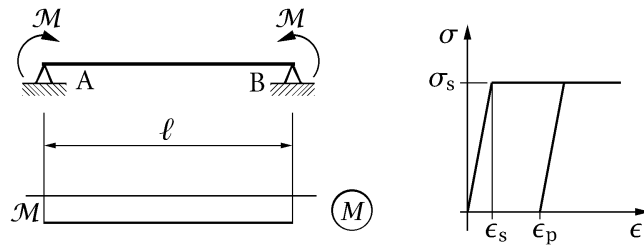
permanente:

$$\epsilon_p = \frac{\Delta \ell_p}{\ell}, \quad (4.54)$$

rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave di tipo assiale.

Distorsioni plastiche distribuite di tipo flessionale

Si consideri ora una trave appoggiata di sezione rettangolare, costituita di materiale elastoplastico e soggetta a due coppie $\mathcal{M}$ simmetriche alle



estremità. Si supponga che la risposta elastoplastica sia ancora di tipo bilineare e perfettamente plastica. Il momento flettente M è costante e pari alle coppie $\mathcal{M}$ applicate. Si incrementino le coppie $\mathcal{M}$, e quindi il momento flettente, fino a che questi assuma il valore M_s di snervamento che plasticizza i lembi estremi della sezione:

$$M_s = W\sigma_s = \frac{bh^2}{6}\sigma_s, \quad (4.55)$$

dove σ_s è la tensione di snervamento e $W = bh^2/6$ il modulo di resistenza della sezione. Al momento di snervamento M_s corrisponde la curvatura flessionale k_s di snervamento:

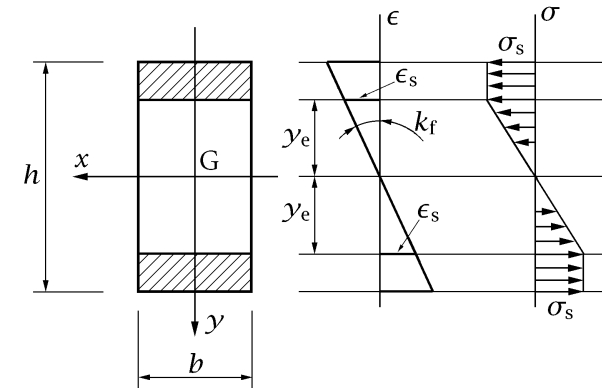
$$k_s = 2\frac{\epsilon_s}{h}, \quad (4.56)$$

dove $\epsilon_s = \sigma_s/E$ è la dilatazione di snervamento. Il diagramma M - k_f tra momento flettente e curvatura flessionale è lineare finché il comportamento del materiale è elastico lineare:

$$M = EJk_f = E\frac{bh^3}{12}k_f. \quad (4.57)$$

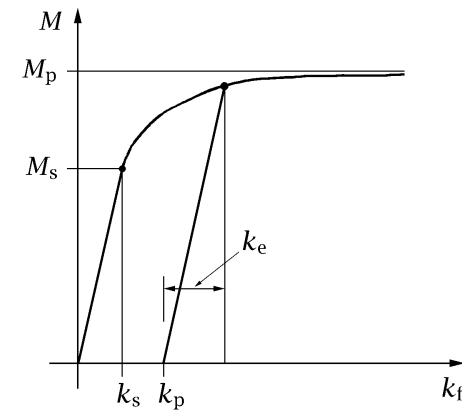
Continuando ad incrementare il momento flettente la plasticizzazione si propaga all'interno della sezione, sezione che resta così divisa in due parti: una parte centrale elastica con andamento lineare della tensione normale e una parte esterna plasticizzata in cui la tensione normale è costante e pari alla tensione σ_s di snervamento. Detta y_e la distanza del baricentro della sezione dai lembi estremi della parte a comportamento elastico, la curvatura flessionale k_f e il momento flettente M corrispondenti valgono:

$$k_f = \frac{\epsilon_s}{y_e}, \quad (4.58)$$



$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2}b\sigma_s y_e\right) \left(\frac{4}{3}y_e\right) + \left\{b\sigma_s \left(\frac{h}{2} - y_e\right)\right\} \left(\frac{h}{2} + y_e\right) \\ &= \frac{2}{3}b\sigma_s y_e^2 + b\sigma_s \left(\frac{h^2}{4} - y_e^2\right) = b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3}\right) \sigma_s. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Queste sono le equazioni parametriche (di parametro y_e) di una curva M - k_f , valida per $k_f > k_s$. All'aumentare del momento flettente aumenta la zona plasticizzata e diminuisce di conseguenza l'ampiezza y_e della zona elastica. Se $y_e \rightarrow 0$ allora $k_f \rightarrow \infty$ e $M \rightarrow M_p$, dove M_p è detto *momento*



plastico e vale:

$$M_p = \frac{bh^2}{4} \sigma_s. \quad (4.60)$$

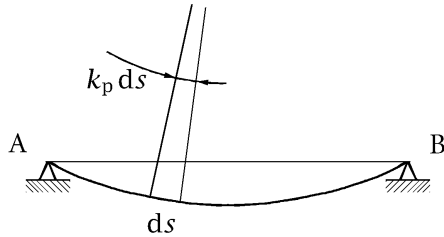
La curva $M-k_f$ risulta quindi asintotica al momento plastico per $k_f \rightarrow \infty$.

Si aumentino ora le coppie applicate fino a portare il momento flettente M a superare il momento di snervamento e a sviluppare quindi delle distorsioni plastiche, e poi si scarichino le coppie applicate fino ad annullarle. Durante lo scarico tutte le fibre si comportano elasticamente per cui viene recuperata la sola parte elastica della curvatura flessionale:

$$k_e = \frac{M}{EJ} = \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s, \quad (4.61)$$

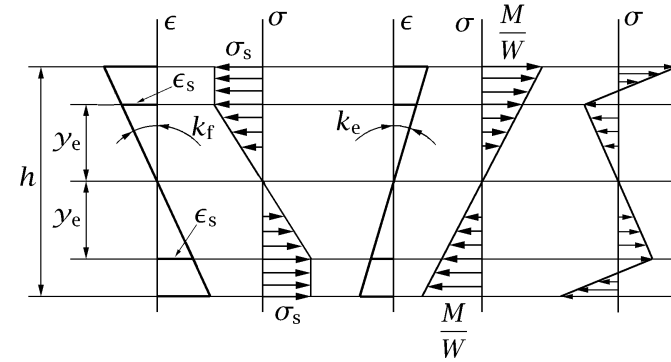
quantità che dipende dal livello del momento flettente M e cioè dal parametro y_e . Dopo l'annullarsi del momento flettente, resta quindi una curvatura flessionale permanente k_p che rappresenta una distorsione distribuita lungo l'asse della trave:

$$k_p = \frac{\epsilon_s}{y_e} - \frac{3h^2 - 4y_e^2}{h^3} \epsilon_s. \quad (4.62)$$



Si noti che per scaricare la zona centrale elastica occorrerebbe recuperare tutta la curvatura. Permangono quindi delle tensioni normali che equivalgono ad una coppia flettente, tensioni che sono autoequilibrate da quelle che permangono nella zona che ha subito la plasticizzazione e che originano una coppia complessiva equilibrante la precedente. Il valore delle autotensioni al passaggio tra la zona elastica e quella che ha subito la plasticizzazione è data dalla relazione:

$$\sigma(y_e) = Ek_p y_e, \quad (4.63)$$



mentre quelle ai lembi estremi della sezione valgono:

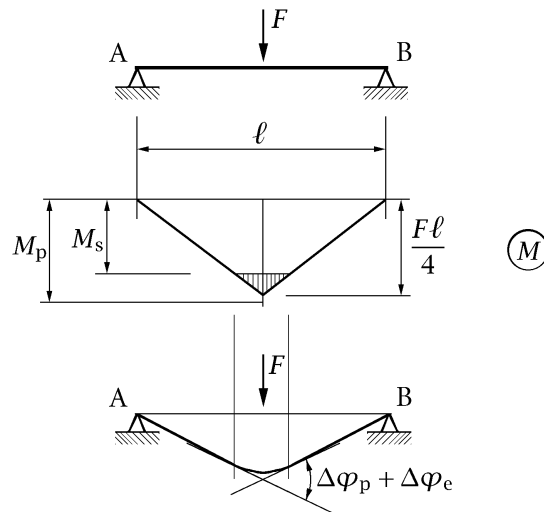
$$\sigma\left(\frac{h}{2}\right) = \sigma_s - \frac{M}{W} = \frac{M_s - M}{W}. \quad (4.64)$$

Quest'ultima tensione ha segno opposto di quella che si è generata durante il caricamento poiché $M > M_s$.

Distorsioni plastiche concentrate di tipo flessionale

Nell'esempio del paragrafo precedente il momento flettente è costante e la plasticizzazione si sviluppa contemporaneamente in tutta la trave. Nei sistemi di travi soggetti prevalentemente a momento flettente in generale il momento non è costante. Questo significa che la plasticizzazione si sviluppa a partire dalle sezioni in cui il momento è massimo, quando tale momento uguaglia il momento di snervamento.

Si consideri, quale esempio, la trave appoggiata di sezione rettangolare e soggetta ad un carico concentrato F in mezzeria. All'incrementarsi del carico il momento $F\ell/4$ in mezzeria raggiunge il valore di snervamento M_s . A questo punto il momento nella sezione continua ad incrementarsi con il carico e la zona plasticizzata tende ad interessare un intorno di tale sezione. In tale zona il legame tra momento flettente e curvatura flessionale segue la curva non lineare stabilita al paragrafo precedente: piccoli incrementi del momento provocano grandi incrementi della curvatura flessionale e ne risultano delle notevoli rotazioni relative $\Delta\varphi_p$ nella, ristretta, zona plasticizzata. Tali rotazioni relative dovute alla plasticizzazione vanno a

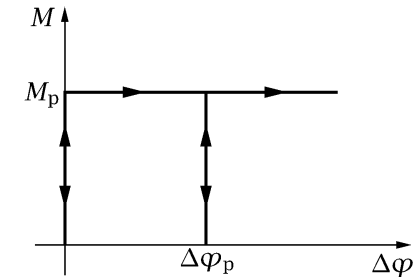


sommarsi alle rotazioni relative $\Delta\varphi_e$, di ampiezza notevolmente inferiore, che si sono sviluppate durante il comportamento elastico del materiale.

Si ottiene allora la situazione in cui nella sezione di momento massimo il momento flettente si approssima al momento plastico M_p e nell'intorno di tale sezione tende a svilupparsi una rotazione relativa tendenzialmente infinita (prescindendo dalla resistenza del materiale). Tale situazione suggerisce l'introduzione del modello approssimato di *cerniera plastica* basata sulle due assunzioni seguenti:

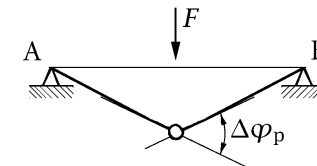
1. La rotazione relativa che si sviluppa nell'intorno della sezione di momento massimo e dovuta alla distorsione plastica viene concentrata in tale sezione;
2. La rotazione relativa concentrata nella sezione di momento massimo inizia a svilupparsi quando il momento nella sezione ha raggiunto il livello del momento plastico, senza ulteriori aumenti del momento flettente nella sezione.

Queste due assunzioni possono compendiarsi in un diagramma bilineare $M-\Delta\varphi$ di comportamento elasto-perfettamente plastico della sezione generica di una trave prevalentemente soggetta a momento flettente. Si osservi



che lo sviluppo di una rotazione relativa a momento flettente costante corrisponde all'inserimento di una cerniera nella sezione. Nelle due facce così sconnesse continua naturalmente ad agire il momento plastico.

Si vogliono ora verificare le implicazioni del modello di cerniera plastica per il caso della trave appoggiata soggetta ad un carico concentrato in mezzzeria. La trave si comporta elasticamente al crescere del carico finché il momento in mezzzeria uguaglia il momento plastico. A questo punto nella sezione di mezzzeria si sviluppa una cerniera plastica che rende la trave labile. Ne consegue che continuando a permanere il carico la rotazione

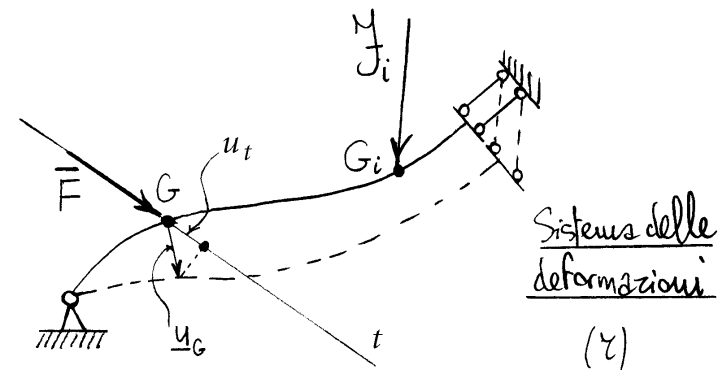


relativa nella sezione di mezzzeria tende a divenire infinita.

4.8 Teorema di Castigliano

Se i vincoli sono rigidi e' possibile calcolare lo spostamento, rispetto alla configurazione naturale, di un punto della linea d'asse in una data direzione eseguendo la derivata del lavoro di deformazione, espresso in funzione delle forze esterne, rispetto alla forza esterna applicata nello stesso punto della linea d'asse ed avente la direzione dello spostamento che si vuole calcolare. Tale derivata va valutata sul valore effettivo delle forze esterne. Se una forza applicata al punto di cui si vuole valutare lo spostamento ed avente la direzione richiesta non e' presente, occorre aggiun-

gerla e valutare la derivata del lavoro di deformazione in corrispondenza del valore nullo di tale forza.



Sia allora data una trave soggetta alle forze J_i ed alla forza F generica applicata in G ed avente una data direzione t . La componente u_t dello spostamento del punto G nella direzione e verso della forza F , dovuta alle forze J_i ed alla forza $\bar{F}$ effettivamente applicata in G , deve dunque valere:

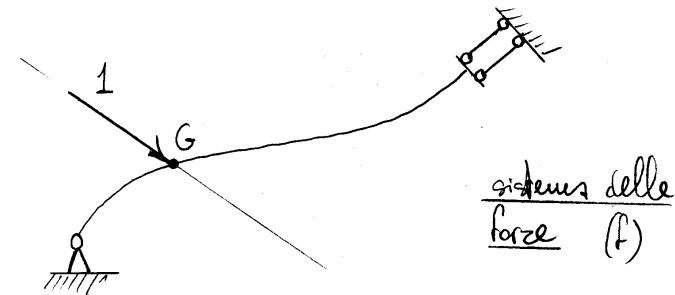
$$u_t = \left. \frac{\partial L_d}{\partial F} \right|_{F=\bar{F}},$$

dove $L_d = L_d(Y_i; F)$. Se in G , nella direzione della forza esterna F , non è applicata nessuna forza ($\bar{F} = 0$) la derivata andrà calcolata sul valore $F = 0$. È chiaro che invece di una forza F si può considerare una coppia M al fine di calcolare la rotazione di una sezione.

Dimostrazione

Si assuma la trave soggetta alle forze Y_i ed alla forza $\bar{F}$ (o coppia $\bar{M}$ nel caso si voglia valutare una rotazione) quale sistema di spostamenti-deformazione e si applichi il principio dei lavori virtuali assumendo quale sistema di forze-caratteristiche della

sollecitazione quello generato dalla forza unitaria avente la direzione e il verso dello spostamento che si vuole determinare.



Risulta:

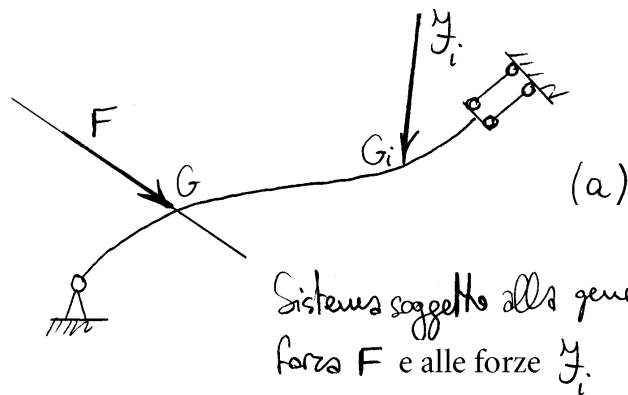
$$u_t = \int_L \underline{\delta}^{(f)T} \underline{C} \underline{\delta}^{(r)} ds.$$

Si consideri ora la trave soggetta alle forze Y_i ed alla generica forza F , avente direzione e verso dello spostamento che si vuole determinare. Il lavoro di deformazione, scritto in forma complementare, vale:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_l \underline{\delta}^{(a)T} \mathbf{C} \underline{\delta}^{(a)} ds,$$

e la sua derivata rispetto ad F :

$$\frac{\partial L_d}{\partial F} = \int_l \left(\frac{\partial \underline{\delta}^{(a)}}{\partial F} \right)^T \mathbf{C} \underline{\delta}^{(a)} ds.$$



Risulta:

$$\underline{\delta}^{(a)} \Big|_{F=\bar{F}} = \underline{\delta}^{(r)},$$

ed inoltre, per il principio di sovrapposizione degli effetti, risulta:

$$\underline{\delta}^{(a)} = F \underline{\delta}^{(f)} + \underline{\delta}^{(o)},$$

dove $\underline{\delta}^{(o)}$ sono le sollecitazioni dovute ai soli carichi esterni Y_i . Si ha quindi:

$$\frac{\partial \underline{\delta}^{(a)}}{\partial F} = \underline{\delta}^{(f)},$$

indipendentemente dal valore di F . In definitiva:

$$u_t = \int_l \left(\frac{\partial \underline{\delta}^{(a)}}{\partial F} \Big|_{F=\bar{F}} \right)^T \mathbf{C} \underline{\delta}^{(a)} \Big|_{F=\bar{F}} ds = \frac{\partial L_d}{\partial F} \Big|_{F=\bar{F}}$$

come volersi dimostrare. E' evidente che utilizzando il teorema di Castigliano occorre valutare $\underline{\delta}^{(a)}$ per $F=\bar{F}$ e $\partial \underline{\delta}^{(a)} / \partial F$, cioè occorre valutare le caratteristiche della sollecitazione nella struttura reale e nella struttura fittizia soggetta alla forza unitaria.

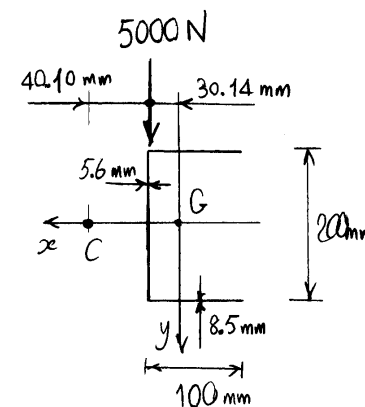
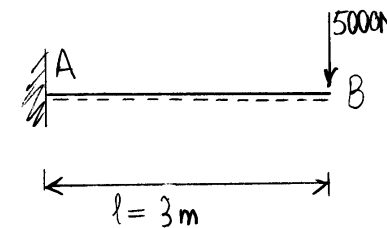
Si ricordi inoltre che

il risultato ottenuto dipende dall'ipotesi di vincoli rigidi (e' così escluso il lavoro delle sezioni vincolari) e fornisce lo spostamento a partire dalla configurazione naturale per effetto delle forze applicate, ovverossia è escluso il calcolo di spostamenti dovuti a distorsioni (le deformazioni del sistema reale dipendono così dalle sole sollecitazioni reali).

4.9 Cenno al calcolo di spostamenti e rotazioni in sistemi spaziali

4.9.1 Applicazione del metodo cinematico al caso di una mensola spaziale di sezione a C deformabile a taglio

Si ricordi che il metodo cinematico non è limitato ai sistemi di travi piane e che inoltre è possibile mettere in conto anche l'effetto della deformabilità tagliante. Quale semplice esempio di un sistema spaziale si analizza nel seguito una mensola di sezione a C soggetta a momento torcente. Tale mensola sarà soggetta anche a forza di taglio, permettendo così di mostrare come tenere conto col metodo cinematico dell'effetto della deformazione dovuta al taglio.



$$A = 2820. \text{ mm}^2$$

$$d_G = 30.14 \text{ mm}$$

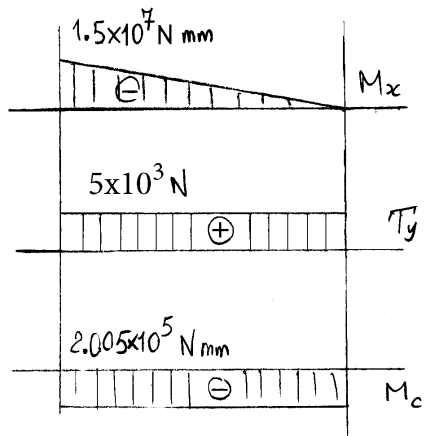
$$J_x = 2.073 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 3.105 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_t = 5.265 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$d_c = 41.00 \text{ mm}$$

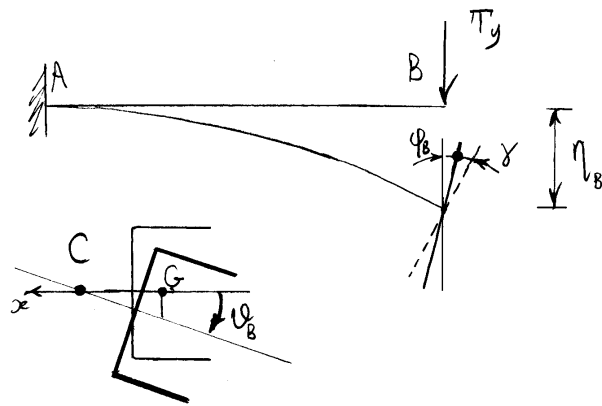
$$\chi_y = 2.906$$



$$M_c = -T_y d_c = -2.050 \times 10^5 \text{ N mm}$$

$$M_x^o = -T_y l = 1.5 \times 10^7 \text{ N mm}$$

Spostamenti dell'estremità libera:



$$d\varphi_B = \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\frac{T_y(l-z)}{EJ_x} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_B = -\frac{T_y l^2}{2EJ_x}.$$

$$d\vartheta_B = \frac{M_c}{GJ_t} dz = -\frac{T_y d_c}{GJ_t}$$

$$\Rightarrow \vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -\frac{T_y d_c l}{GJ_t}$$

$$d\eta_B = -\frac{M_x}{EJ_x}(l-z)dz + \chi_y \frac{T_y}{GA} dz - \frac{M_c}{GJ_t}(d_c+d_G)dz$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta_B &= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \chi_y \frac{T_y l}{GA} - \frac{M_c(d_c+d_G)l}{GJ_t} \\ &= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta(d_c+d_G). \end{aligned}$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\varphi_B = \frac{-T_y l^2}{2EJ_x} = -5.426 \times 10^{-3} \text{ rad} = -0.31^\circ$$

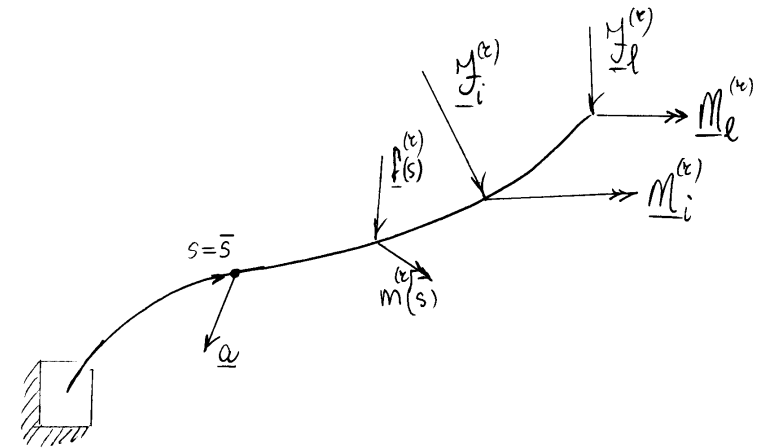
$$\gamma = \chi_y \frac{T_y}{GA} = 6.443 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0.0037^\circ$$

$$\vartheta_B = \frac{M_c l}{GJ_t} = -0.146 \text{ rad} = -8.37^\circ$$

$$\begin{aligned} \eta_B &= \frac{T_y l^3}{3EJ_x} + \gamma l - \vartheta_B (d_c + d_g) \\ &= 10.85 + 0.19 + 10.39 = 21.43 \text{ mm} \end{aligned}$$

4.9.2 Calcolo di spostamenti e rotazioni in sistemi spaziali con il principio dei lavori virtuali

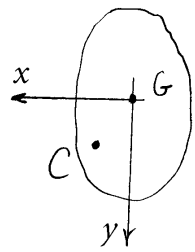
Sistemi di spostamenti - deformazioni reali



campi di deformazioni distribuite

$$\varepsilon_d^{(r)}, \gamma_{cd}^{(r)}, \theta_d^{(r)}, \kappa_{fd}^{(r)}$$

$\bar{s} \equiv$ ascissa del punto di cui si vuole lo spostamento (oppure la rotazione della sezione) individuato dal versore $\underline{a}$



G = Baricentro

C = Centro di taglio

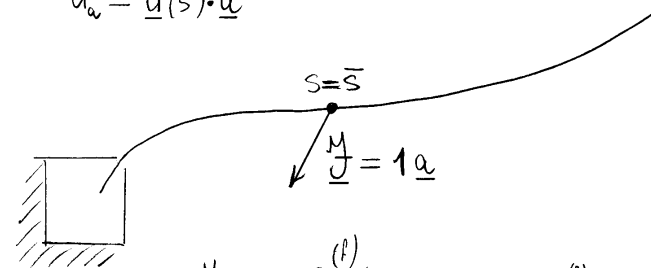
$$\underline{u}^{(r)}, \underline{\varphi}^{(r)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{(r)} = \frac{N^{(r)}}{EA} + \varepsilon_d^{(r)} \\ \delta_C^{(r)} = \frac{1}{GA} \chi T^{(r)} + \delta_{Cd}^{(r)} \\ \theta^{(r)} = \frac{M_c^{(r)}}{GJ_t} + \theta_d^{(r)} \\ \underline{k}_f^{(r)} = \frac{1}{E} \underline{J}^{-1} \underline{M}_f^{(r)} + \underline{k}_{fd}^{(r)} \end{array} \right.$$

Sistema di forze-caratteristiche della sollecitazione equilibrata

Caso in cui si vuole uno spostamento

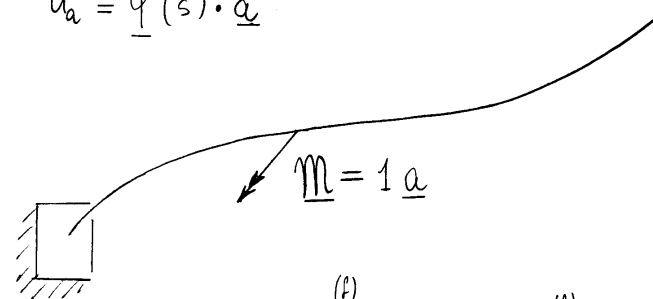
$$u_a = \underline{u}(\bar{s}) \cdot \underline{a}$$



$$\underline{J} = 1 \underline{a}, \underline{R}_j^{(f)} (i=1, \dots, n_r), \underline{F}^{(f)}(s), \underline{M}^{(f)}(s)$$

Caso in cui si vuole una rotazione

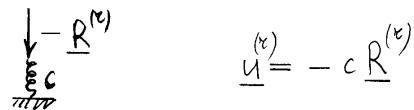
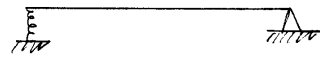
$$u_a = \underline{\varphi}(\bar{s}) \cdot \underline{a}$$



$$\underline{M} = 1 \underline{a}, \underline{R}_j^{(f)} (i=1, \dots, n_r), \underline{F}^{(f)}(s), \underline{M}^{(f)}(s)$$

Lavoro virtuale esterno:

$$L_e = u_a + \sum_j R_j^{(f)} \cdot (u_j^{(v)} - c_j R_j^{(v)})$$



$u_j^o \equiv$ cedimenti (generalizzati) elastici dei vincoli

$R_j \equiv$ Reazioni vincolari generalizzate

$c_j \equiv$ cedevolezza dei vincoli

Lavoro virtuale interno:

$$L_i = \int_l \left\{ N^{(f)} \left(\frac{N^{(v)}}{EA} + \varepsilon_d^{(v)} \right) + T^{(f)} \cdot \left(\frac{1}{GA} \chi T^{(v)} + \gamma_{cd}^{(v)} \right) + M_c^{(f)} \left(\frac{M_c^{(v)}}{GJ_t} + \theta_d^{(v)} \right) + M_f^{(f)} \cdot \left(\frac{1}{E} \gamma^{-1} M_f^{(v)} + \kappa_{fd}^{(v)} \right) \right\} ds$$

Travi piane

$$L_i = \int_l N^{(f)} \left(\frac{N^{(v)}}{EA} + \varepsilon_d^{(v)} \right) ds + \int_l T^{(f)} \left(\frac{\chi T^{(v)}}{GA} + \gamma_{cd}^{(v)} \right) ds + \int_l M^{(f)} \left(\frac{M^{(v)}}{GJ} + \kappa_{fd}^{(v)} \right) ds$$

Inoltre:

$$L_e = u_a + \sum_j R_j^{(f)} (u_j^o - c_j R_j^{(v)})$$

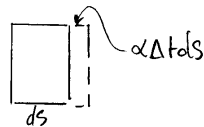
dove le componenti $R_j^{(f)}$, $R_j^{(v)}$ e u_j^o sono rispetto al versore $\underline{e}_j$ che individua la direzione di efficacia del vincolo j -esimo.

Distorsioni termiche

Variazione termica uniforme sullo spessore:

$$\varepsilon_d^{(r)} = \alpha \Delta t$$

$\alpha \equiv$ coefficiente di dilatazione termica

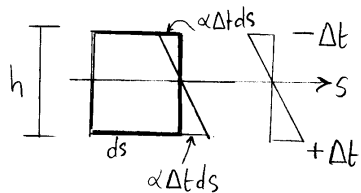


Variazione termica a farfalla:

$$k_{fd}^{(r)} = 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} = \frac{\alpha \bar{\Delta t}}{h}$$

$h \equiv$ altezza della sezione

$$\bar{\Delta t} \equiv \Delta t$$

Strutture prevalentemente inflesse

(si trascurano i lavori dovuti alle deformazioni provocate dal taglio e dallo sforzo normale)

Sistema spaziale

$$\begin{aligned} L_i = & \int_l \underline{M}_f^{(f)} \cdot \left(\frac{1}{E} \underline{J}^{-1} \underline{M}_f^{(r)} + \underline{k}_{fd}^{(r)} \right) ds \\ & + \int_l M_c^{(f)} \left(\frac{M_c^{(r)}}{EJ} + \theta_d^{(r)} \right) ds \\ & + \int_l N^{(f)} \varepsilon_d^{(r)} + \int_l \underline{T}^{(f)} \cdot \underline{\delta}_{Cd}^{(r)} ds \end{aligned}$$

sistema piano

$$\begin{aligned} L_i = & \int_l M^{(f)} \left(\frac{M^{(r)}}{EJ} + k_{fd}^{(r)} \right) ds \\ & + \int_l N^{(f)} \varepsilon_d^{(r)} ds + \int_l T^{(f)} \delta_{Cd}^{(r)} ds \end{aligned}$$

Travature reticolari

$$L_i = \sum_i \left\{ N_i^{(F)} \left(\frac{N_i^{(v)}}{EA} + \varepsilon_d^{(v)} \right) l_i \right\}$$

l_i = lunghezza dell'asta i -esima

N_i = sforzo normale nell'asta i -esima

SISTEMI IPERSTATICI

5.1 Soluzione delle strutture iperstatiche

5.1.1 Metodo delle forze

Un sistema iperstatico con grado di labilità nullo può essere reso isostatico togliendo un numero di vincoli semplici iperstatici pari al grado di iperstaticità. La struttura isostatica che così si ottiene, soggetta ai carichi applicati e alle reazioni iperstatiche staticamente indeterminate, e quindi incognite, viene detta *struttura principale*.

La struttura principale isostatica è determinata sia per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione che per il calcolo degli spostamenti. È così possibile calcolare, nella struttura principale, quegli spostamenti che nella struttura originale sono impediti o comunque limitati dai vincoli iperstatici rimossi, per poi imporre a tali spostamenti le condizioni imposte da tali vincoli. Le equazioni che così si ottengono e che sono in egual numero alle reazioni vincolari iperstatiche vengono dette *equazioni di congruenza*. Poiché le incognite che compaiono nelle equazioni di congruenza sono delle reazioni vincolari iperstatiche, e cioè delle forze, il metodo di soluzione illustrato viene detto *metodo delle forze*.

Notiamo subito che la struttura che si vuole risolvere può anche essere iperstatica e labile, purché equilibrata. In tal caso rimuovendo gli opportuni vincoli iperstatici si ottiene una struttura principale labile a grado di iperstaticità nullo, nella quale gli spostamenti necessari per la scrittura delle equazioni di congruenza sono sempre determinabili in modo univoco o,

in altri termini, non sono influenzati dai possibili moti rigidi dovuti alla labilità del sistema principale.

5.1.2 Metodo degli spostamenti

Si assumono come incognite un numero di spostamenti sufficienti a rendere definita la struttura e si scrivono delle equazioni di equilibrio.

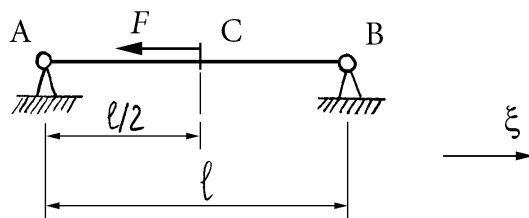
Nel caso di travi omogenee a sezione costante e ad asse rettilineo, le cui equazioni differenziali possono essere integrate con facilità, gli spostamenti (e le rotazioni) sufficienti a rendere definita la struttura sono quelli, incogniti, di estremità delle singole travi, salvo che nella stessa estremità non sia nota la corrispondente condizione statica di equilibrio al contorno. Ne risulta quindi che in generale gli spostamenti incogniti saranno quelli dei nodi rigidi e dei nodi cerniera della struttura mentre le rotazioni incognite saranno quelle dei soli nodi rigidi. Infatti, si ricordi che, per definizione, i nodi della struttura sono i punti dove convergono più di due travi. Quindi in generale se il nodo è rigido non è nota a priori nessuna delle condizioni statiche nelle estremità delle singole travi che convergono nel nodo. Invece se il nodo è cerniera sono note le sole condizioni statiche che riguardano il momento flettente, il che rende superfluo inserire tra le incognite le rotazioni di estremità delle singole travi che convergono nel nodo cerniera.

5.2 Travi iperstatiche

5.2.1 Travi appoggiate

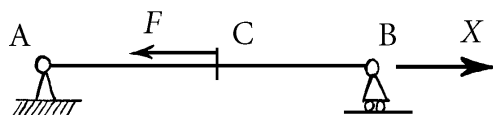
Le travi appoggiate sono una volta iperstatiche assialmente mentre sono isostatiche flessionalmente.

Trave appoggiata soggetta ad un carico assiale



Soluzione col metodo delle forze

struttura principale isostatica:

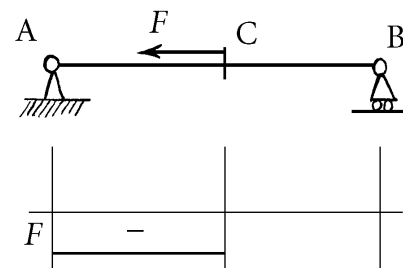
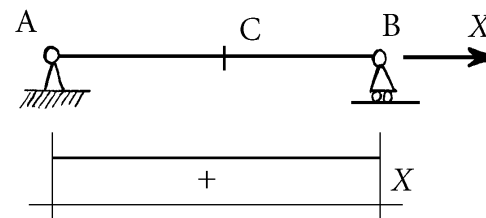


$X \equiv$ Reazione iperstatica incognita

Il punto B può subire, nella struttura principale, uno spostamento orizzontale ξ_B . Nella struttura originale iperstatica il punto B è fisso.

Lo spostamento ξ_B misura l'assenza di congruenza (incompatibilità) tra la struttura principale e quella originaria. Per ripristinare la congruenza occorre annullare l'incompatibilità tra le due strutture:

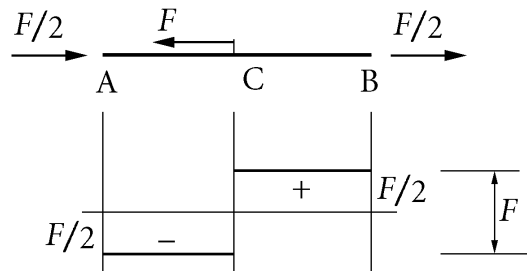
$$\xi_B = 0 \quad (\text{equazione di congruenza})$$



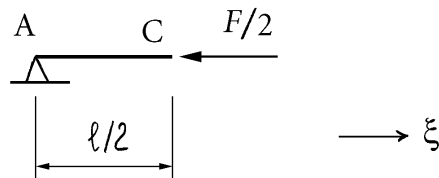
Si ottiene:

$$\xi_B = \frac{Xl}{EA} - \frac{F(l/2)}{EA}$$

$$\xi_B = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$

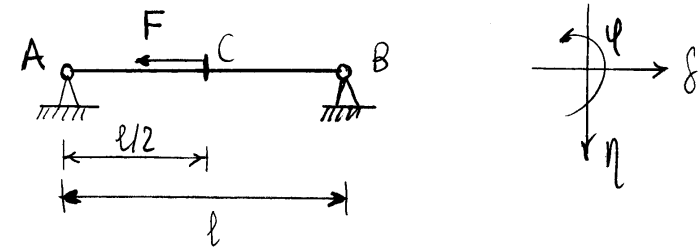


Calcolo di ξ_c :



$$\xi_c = -\frac{(F/2)(l/2)}{EA} = -\frac{Fl}{4EA}$$

Soluzione col metodo degli spostamenti



Per rendere definita la trave basta conoscere gli spostamenti del punto C : $\delta_c, \eta_c, \varphi_c$.
Queste sono le nostre incognite.

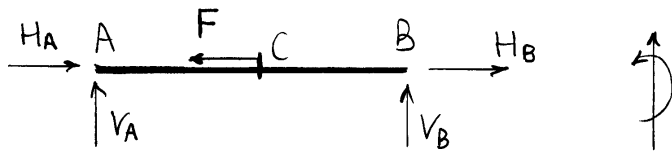
Dal punto di vista flessionale la trave è staticamente determinata. Infatti le reazioni verticali in A e B sono nulle:

1) equilibrio alla rotazione attorno ad A:

$$V_B l = 0 \Rightarrow V_B = 0;$$

2) equilibrio alla trazione verticale:

$$V_B + V_A = 0 \Rightarrow V_A = 0.$$



Quindi il taglio e il momento flettente sono nulli in tutti i punti della trave e l'asse della trave resta rettilineo. Poiché i punti A e B sono fissi ne consegue che l'asse deformato (ancora rettilineo) giace sulla retta AB e dunque $\eta_c = \varphi_c = 0$.

Resta dunque la sola incognita δ_c . Si imponga allora uno spostamento δ_c arbitrario e si risolva la struttura. Imporre uno spostamento significa imporre un vincolo. Dunque, ad uno spostamento

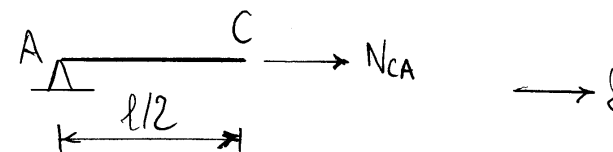
δ_c corrisponde una reazione vincolare R_c duale, avente la stessa direzione di δ_c .

Ad un valore arbitrario δ_c corrisponde una trave congruente ma in generale non equilibrata poiché in generale R_c non coincide con la forza effettivamente applicata. L'equazione risolvibile (di equilibrio) si scrive pertanto:

$$R_c = -F.$$

La somma $R_c + F$, che in soluzione deve essere nulla, misura dunque l'assenza di equilibrio della struttura vincolata a subire lo spostamento δ_c .

Tratto AC



Vediamo quale forza normale N_{CA} occorre applicare in C affinché lo spostamento valga δ_c :

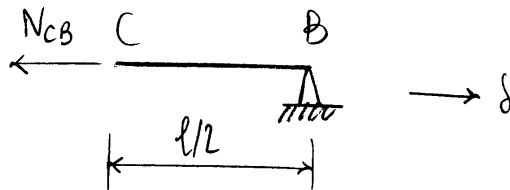
$$\frac{N_{CA} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \Rightarrow N_{CA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c .$$

La quantità

$$k_{AC} = \frac{2EA}{l}$$

(dimensionalmente una forza per unità di lunghezza) rappresenta la forza normale che occorre applicare per avere lo spostamento assiale δ_c unitario ed è detta rigidezza assiale (in tal caso dell'asta AC).

Tratto CB



$$-\frac{N_{CB} \frac{l}{2}}{EA} = \delta_c \Rightarrow N_{CB} = -\frac{2EA}{l} \delta_c$$

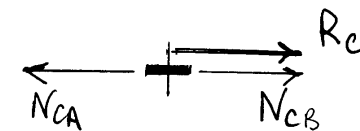
Il segno negativo dipende dal fatto che una N_{CB} positiva sposta il punto C nel verso negativo di δ . La rigidezza di CB vale

$$k_{CB} = \frac{2EA}{l}$$

come per l'asta AC. D'altronde le due parti AC e BC sono equivalenti.

Reazione del vincolo in C

$$R_C = N_{CA} - N_{CB} .$$



Equilibrio del nodo C

$$R_c = -F \Rightarrow N_{CA} - N_{CB} = -F.$$

Risulta quindi:

$$k_{AC} \delta_c + k_{CB} \delta_c = -F,$$

e infine:

$$\delta_c = -\frac{F}{k_C} = -\frac{Fl}{4EA},$$

dove la quantità:

$$k_C = k_{AC} + k_{CB} = \frac{4EA}{l}$$

rappresenta la rigidezza del nodo C.

Le caratteristiche della sollecitazione risultano quindi:

$$\begin{cases} N_{CA} = 2 \frac{EA}{l} \delta_c = -\frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = -\frac{F}{2} \\ N_{CB} = -2 \frac{EA}{l} \delta_c = \frac{2EA}{l} \frac{Fl}{4EA} = \frac{F}{2} \end{cases}$$

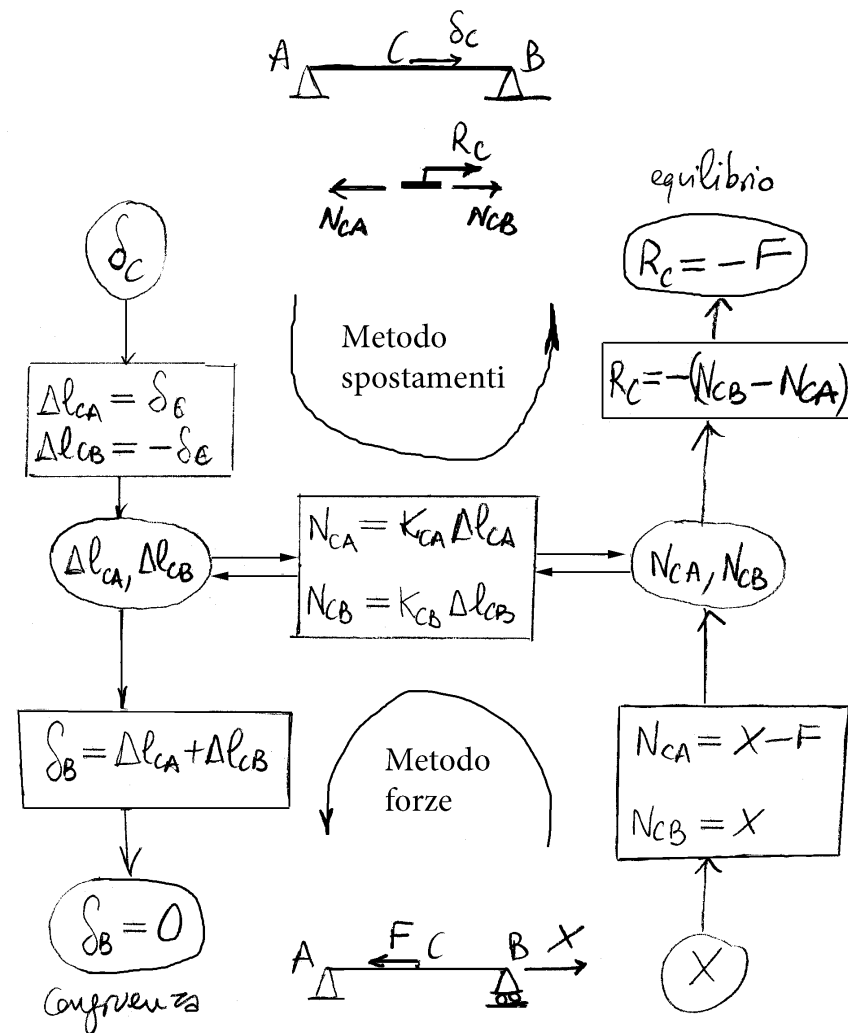
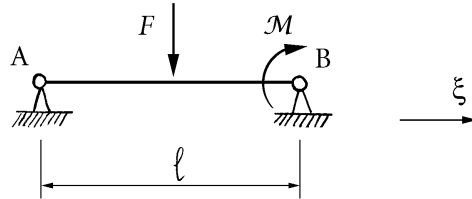


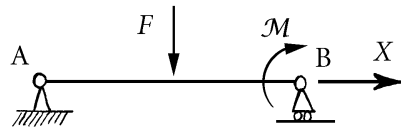
Diagramma dei metodi delle forze e degli spostamenti

Trave appoggiata soggetta a carichi di tipo flessionale

Sia data una *trave appoggiata*, cioè una trave ad asse rettilineo appoggiata alle due estremità, soggetta a forze di tipo flessionale (forze ortogonali alla linea d'asse e coppie). Si scelga quale struttura principale la *trave*



appoggio-carrello, cioè la trave con un appoggio ad una estremità e un carrello con piano di scorrimento orizzontale all'altra estremità. La reazione



iperstatica incognita è orizzontale ed origina tutto lo sforzo normale della trave. Ne risulta che lo spostamento orizzontale del carrello nella struttura principale dipende dalla sola reazione iperstatica X :

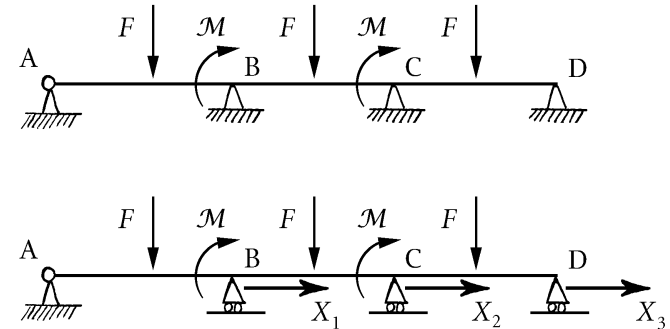
$$\xi_B = \frac{X\ell}{EA}. \quad (5.1)$$

L'equazione di congruenza $\xi_B = 0$ impone quindi che la reazione iperstatica sia nulla:

$$X = 0. \quad (5.2)$$

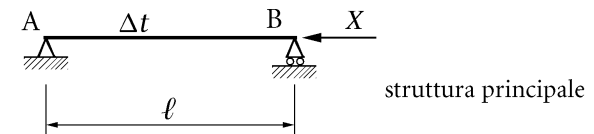
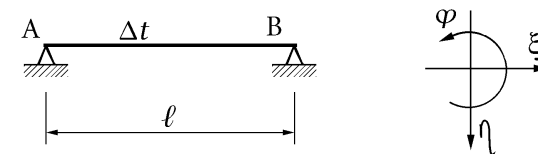
Se ne deduce così il seguente risultato generale: *Una trave appoggiata soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave appoggio-carrello.*

Si noti che tale risultato può essere generalizzato anche a travi ad asse rettilineo su n appoggi soggette a carichi di tipo flessionale. In tal caso infatti si consideri la trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli a piano di scorrimento orizzontale. Lo sforzo normale, e quindi gli spostamenti orizzontali



dei carrelli, dipende solo dalle reazioni iperstatiche orizzontali. Le equazioni di congruenza che impongono che gli spostamenti dei carrelli siano nulli sono dunque omogenee (non dipendono dai carichi di tipo flessionale). Ne consegue che le reazioni iperstatiche orizzontali degli appoggi sono nulle e che quindi: *Una trave ad asse rettilineo su n appoggi soggetta a forze di tipo flessionale è equivalente ad una trave su un appoggio e $n - 1$ carrelli.*

Trave appoggiata soggetta ad una distorsione termica uniforme



$$\xi_B = \alpha_t \Delta t \ell - \frac{X \ell}{EA}$$

$$\text{Congruenza: } \xi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = EA \alpha_t \Delta t.$$

Deformazione finale:

$$\epsilon_G = \alpha_t \Delta t - \frac{X}{EA} = \alpha_t \Delta t - \alpha_t \Delta t = 0.$$

Quindi la trave resta “indeformata” rispetto alla configurazione naturale dell’asta AB prima dell’incremento termico, che però non rappresenta la configurazione naturale della stessa asta dopo l’incremento termico. Rispetto a quest’ultima configurazione, la configurazione finale è deformata:

$$\epsilon^G = \frac{ds - ds(1 + \alpha_t \Delta t)}{ds(1 + \alpha_t \Delta t)} = -\frac{\alpha_t \Delta t}{1 + \alpha_t \Delta t},$$

e quindi:

$$\epsilon^G \approx -\alpha_t \Delta t,$$

poiché $\alpha_t \Delta t$ è piccolo. Essendo questa la dilatazione rispetto alla configurazione naturale che si ha dopo l’incremento uniforme di temperatura, ne risulta uno sforzo normale N :

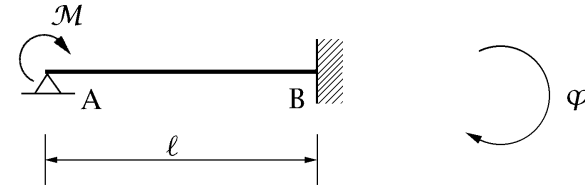
$$N = EA \epsilon^G = -EA \alpha_t \Delta t,$$

in accordo con la soluzione iperstatica.

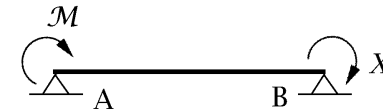
5.2.2 Travi incastro-appoggio

La trave incastro-appoggio è una volta iperstatica flessionalmente.

Trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia



Si sceglie quale struttura principale la trave appoggiata, ottenuta svincolando all’incastro la rotazione, e si impone quale equazione di congruenza l’annullarsi della rotazione resa libera.



La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = \frac{X \ell}{3EJ} - \frac{M \ell}{6EJ}.$$

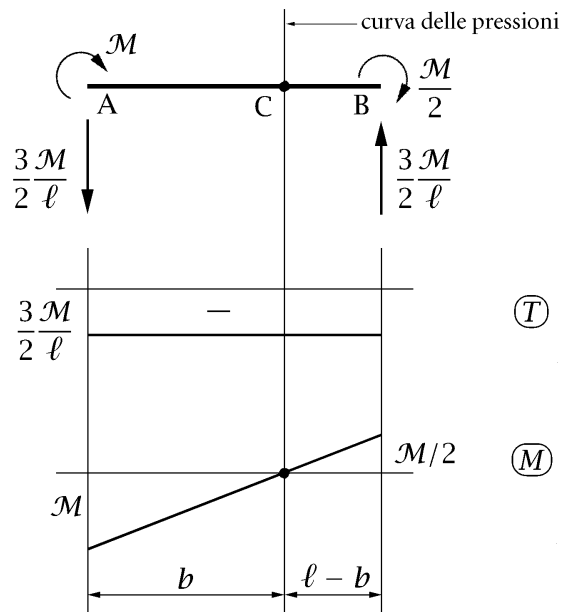
La congruenza implica quindi:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{M}{2}.$$

La rotazione sull’appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{M \ell}{3EJ} - \frac{\left(\frac{M}{2}\right) \ell}{6EJ} = \frac{M \ell}{4EJ}.$$

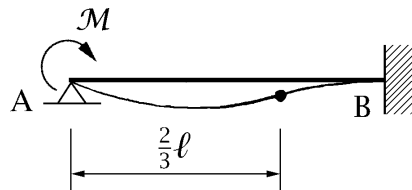
In figura sono illustrate le reazioni vincolari e i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.



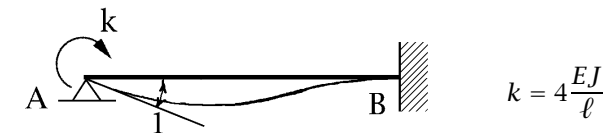
Il punto di nullo del momento flettente, che coincide con il punto di flesso della deformata elastica, si ottiene dalla proporzione seguente:

$$\frac{b}{M} = \frac{\ell}{M + M/2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3}\ell.$$

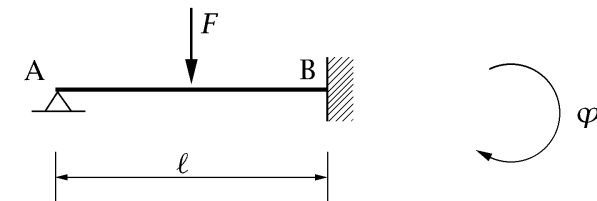
La deformata elastica è disegnata tenendo conto che il momento è riportato dalla parte delle fibre tese, che rappresenta quindi la parte convessa della curva, e che all'incastro la tangente alla deformata è orizzontale.



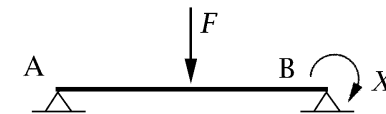
La rigidezza alla rotazione della trave incastro-appoggio si ottiene ponendo $\varphi_A = 1$, come illustrato nello schema seguente:



Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza concentrata



Struttura principale:



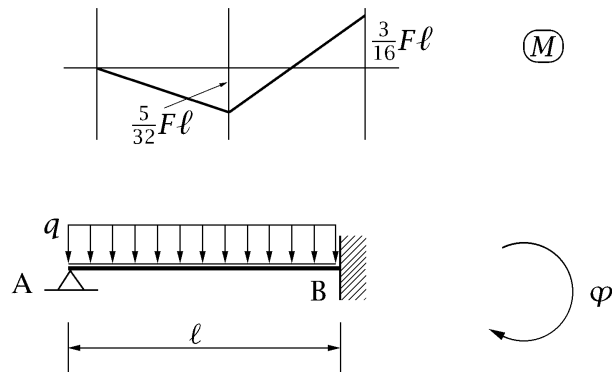
La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{3}{16}F\ell.$$

Diagramma del momento:

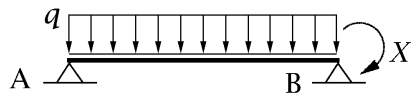
La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

$$\varphi_A = \frac{F\ell^2}{16EJ} - \frac{\left(\frac{3}{16}F\ell\right)\ell}{6EJ} = \frac{F\ell^2}{32EJ}.$$



Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita

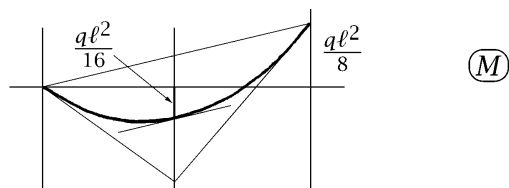
Struttura principale:



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{3EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{8}.$$

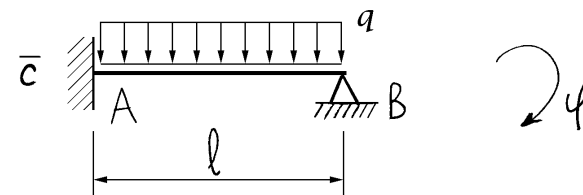
Diagramma del momento:



La rotazione sull'appoggio della trave incastro-appoggio vale quindi:

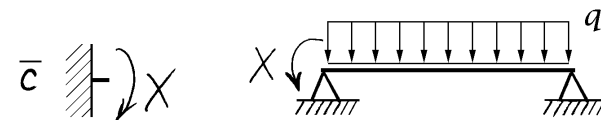
$$\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EJ} - \frac{\left(\frac{q\ell^2}{8}\right)\ell}{6EJ} = \frac{q\ell^3}{48EJ}.$$

Trave incastro-appoggio soggetta ad una forza distribuita con incastro cedevole angolarmente in modo elastico



$\bar{c} \equiv$ cedevolezza angolare

Struttura principale:



Vincolo angolare cedevole elasticamente:

$$\varphi_A = \bar{c} X$$

Rotazione φ_A valutata nella struttura principale:

$$\varphi_A = \frac{q\ell^3}{24EJ} - \frac{X\ell}{3EJ}$$

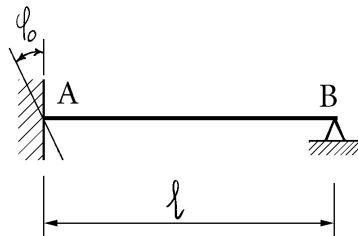
Congruenza:

$$\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} = \bar{c} X \Rightarrow$$

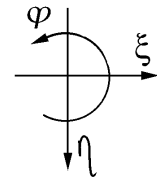
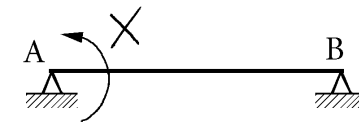
$$\Rightarrow X = \frac{ql^3}{8(3EJ\bar{c} + l)}$$

$\bar{c}$ è una rotazione per unità di coppia e quindi ha le dimensioni $F^{-1}L^{-1}$, per cui $EJ\bar{c}$ ha le dimensioni di una lunghezza

Trave incastro-appoggio con incastro cedevole angolarmente in modo anelastico

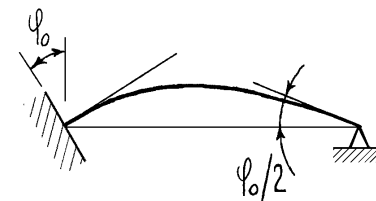
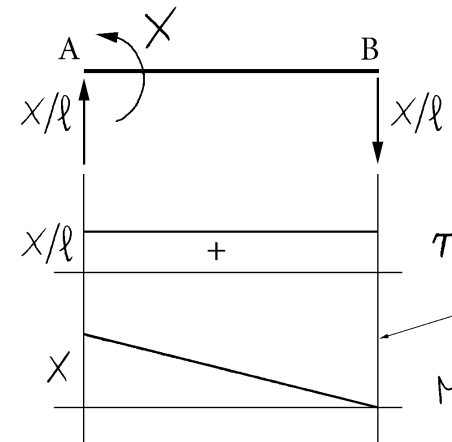


struttura principale:



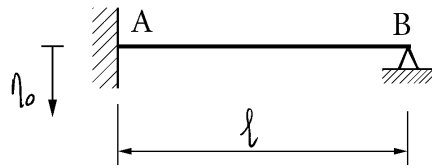
$$\varphi_A = \frac{Xl}{3EJ}$$

Congruenza: $\varphi_A = \varphi_0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l} \varphi_0$

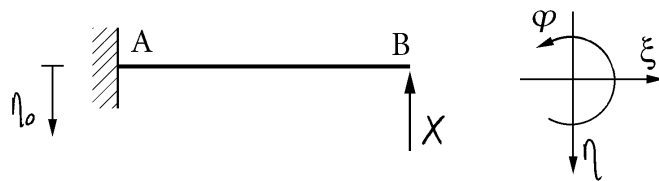


$$\varphi_B = -\frac{Xl}{6EJ} = -\frac{\varphi_0}{2}$$

Trave incastro-appoggio con incastro cedevole verticalmente in modo anelastico



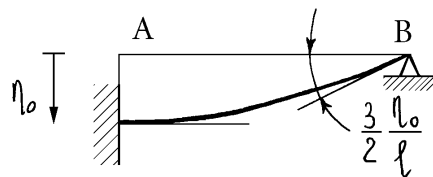
struttura principale:



$$\eta_B = \eta_0 - \frac{X l^3}{3EJ}$$

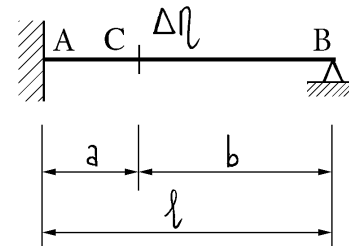
Congruenza:

$$\eta_B = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l^3} \eta_0$$

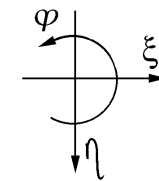
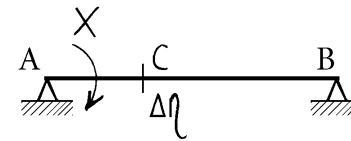


$$\varphi_B = \frac{X l^2}{2EJ} = \frac{3}{2} \frac{\eta_0}{l}$$

Trave incastro-appoggio soggetta a distorsione di scorrimento relativo in una sezione interna

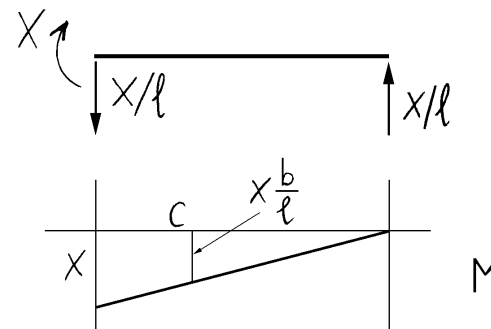


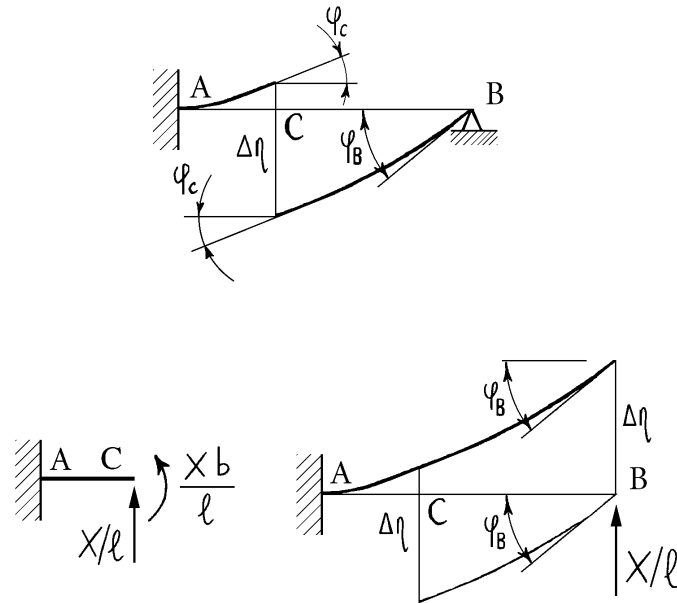
Struttura principale:



$$\varphi_A = \frac{\Delta \eta}{l} - \frac{X l}{3EJ}$$

$$\text{Congruenza: } \varphi_A = 0 \Rightarrow X = 3 \frac{EJ}{l^2} \Delta \eta$$





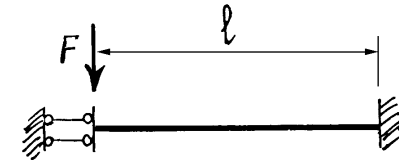
$$\varphi_c = \frac{Xba}{\ell EJ} + \frac{Xa^2}{2\ell EJ}$$

$$\varphi_B = \frac{(X/\ell)\ell^2}{2EJ} = \frac{3}{2} \frac{\Delta\eta}{\ell}$$

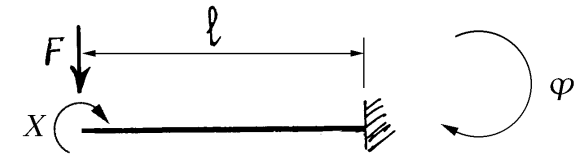
5.2.3 Travi incastro-doppio pendolo e incastro-incastro

La trave incastro-doppio pendolo è una volta iperstatica flessionalmente mentre quella incastro-incastro lo è due volte.

Trave incastro-doppio pendolo soggetta a una forza concentrata



Struttura principale:



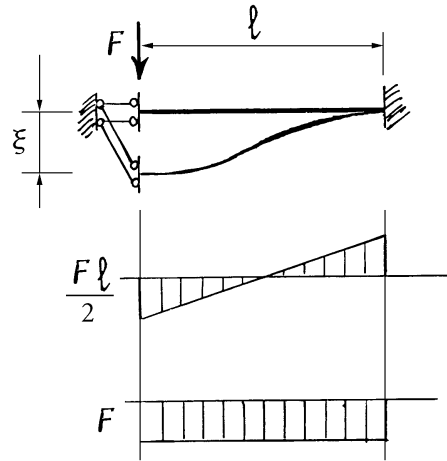
La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{EJ} - \frac{F\ell^2}{2EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{1}{2}F\ell.$$

La deformata e i diagrammi del taglio e del momento sono riportati in figura.

La rigidezza tagliente k della trave incastro-doppio pendolo si ottiene valutando lo spostamento ξ della sezione di estremità vincolata dal doppio pendolo e ponendolo uguale all'unità:

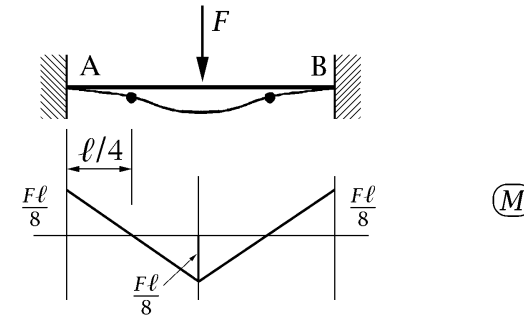
$$\xi = \frac{F\ell^3}{3EJ} - \frac{\left(\frac{F\ell}{2}\right)\ell^2}{2EJ} = \frac{F\ell^3}{12EJ} \quad \Rightarrow \quad k = 12 \frac{EJ}{\ell^3}.$$



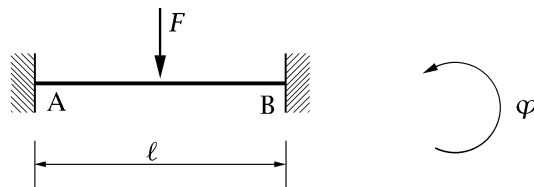
La congruenza implica:

$$\varphi_A = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{F\ell}{8}.$$

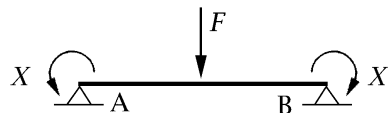
Diagramma del momento e deformata elastica:



Trave incastro-incastro soggetta a una forza concentrata in mezzeria



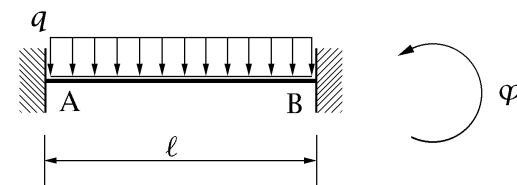
Struttura principale (simmetrica):



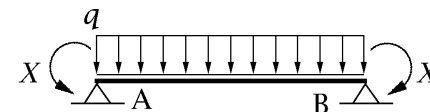
La rotazione della sezione A nella struttura principale vale:

$$\varphi_A = \frac{X\ell}{2EJ} - \frac{F\ell^2}{16EJ}.$$

Trave incastro-incastro soggetta a una forza distribuita



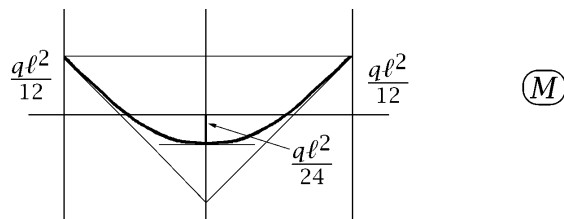
Struttura principale (simmetrica):



La congruenza implica:

$$\frac{X\ell}{2EJ} - \frac{q\ell^3}{24EJ} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = \frac{q\ell^2}{12}.$$

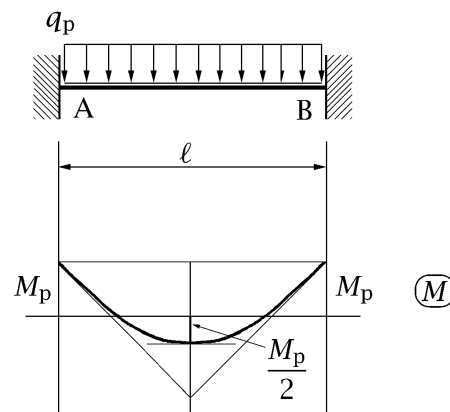
Diagramma del momento:



◇ ◇ ◇

Calcolo a rottura di una trave in acciaio a sezione rettangolare doppiamente incastrata e soggetta a un carico ripartito. Si consideri una trave incastrata alle due estremità, di sezione rettangolare e soggetta ad un carico ripartito q . Si vuole determinare il valore q_r del carico ripartito che provoca la rottura della trave adottando il modello di cerniera plastica. Nello spirito di tale modello si raggiunge la rottura quando si sono formate un numero di cerniere plastiche sufficienti a rendere labile la struttura. Infatti a questo punto le rotazioni relative si possono sviluppare illimitatamente senza incrementare sensibilmente il carico, circostanza che porta inevitabilmente alla rottura del materiale.

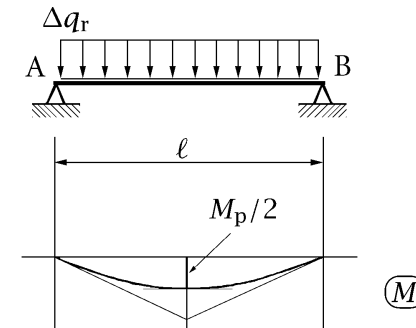
Si incrementi allora il carico ripartito q a partire dalla configurazione naturale. La trave inizialmente si comporta in modo elastico-lineare fino al livello q_p del



carico che porta alla formazione di due cerniere plastiche agli incastri, dove il momento è massimo (in modulo):

$$\frac{q_p \ell^2}{12} = M_p \quad \Rightarrow \quad q_p = 12 \frac{M_p}{\ell^2} = 3 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

Ulteriori incrementi Δq del carico vengono ad agire sulla trave appoggiata e determinano un incremento $\Delta q \ell^2 / 8$ del momento in mezzeria. Tenendo conto che



il momento in mezzeria sotto il carico q_p vale $M_p/2$, l'incremento Δq_r del carico che porta alla formazione della cerniera plastica in mezzeria e quindi alla rottura della trave è individuato dalla condizione:

$$\frac{\Delta q_r \ell^2}{8} + \frac{M_p}{2} = M_p \quad \Rightarrow \quad \Delta q_r = 4 \frac{M_p}{\ell^2} = \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

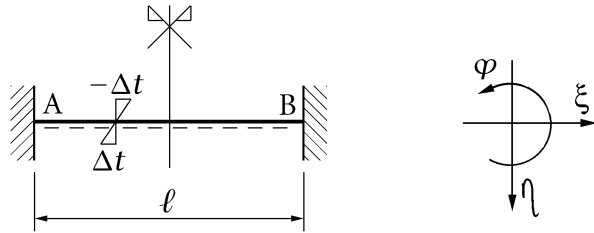
Il carico di rottura q_r vale quindi:

$$q_r = q_p + \Delta q_r = 16 \frac{M_p}{\ell^2} = 4 \frac{bh^2}{\ell^2} \sigma_s.$$

◇ ◇ ◇

Trave incastro-incastro soggetta a una distorsione termica a farfalla

La struttura è due volte flessionalmente iperstatica. Svincolando le rotazioni agli incastri, si ottiene quale struttura principale una trave appoggiata e poichè le due reazioni devono essere simmetriche il problema presenta

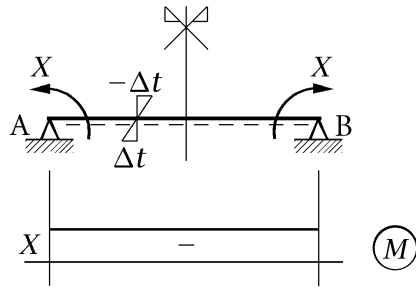


una sola incognita. La rotazione della sezione B nella struttura principale vale:

$$\varphi_B = -\frac{X\ell}{2EJ} + \frac{\alpha_t \Delta t \ell}{h},$$

e quindi la congruenza impone:

$$\varphi_B = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$



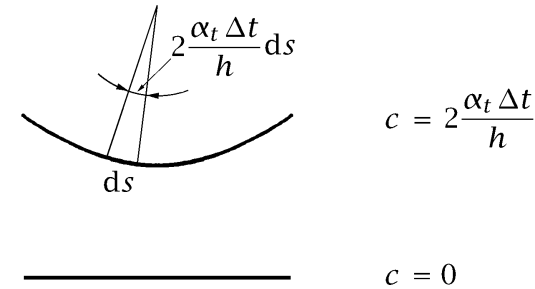
La deformazione finale, valutata rispetto alla configurazione naturale che si aveva prima della distorsione termica, vale:

$$k_f = 2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h} - \frac{X}{EJ} = 0,$$

e quindi la trave resta “indeformata” rispetto a tale configurazione.

Nella configurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica un elemento di trave presenta la curvatura geometrica positiva $c = 2\alpha_t \Delta t/h$. La configurazione finale è invece rettilinea e quindi

presenta una curvatura nulla ($c = 0$). Ne consegue che rispetto alla confi-



gurazione naturale che l'asta assume a seguito della distorsione termica la deformazione finale vale:

$$k_f = -2 \frac{\alpha_t \Delta t}{h},$$

e dunque:

$$M = EJk_f = -2 \frac{EJ \alpha_t \Delta t}{h}.$$

in accordo con la soluzione iperstatica.

5.2.4 Travi Continue

Una *trave continua* è una trave senza sconnessioni interne vincolata, oltre che nelle due estremità, anche in punti intermedi, o, in altri termini, è una trave su più appoggi.

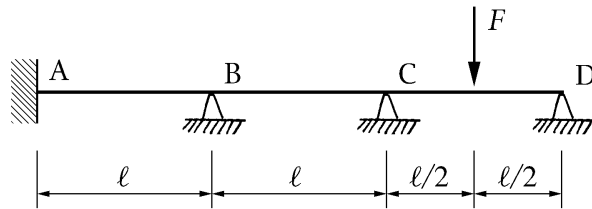
La struttura principale “naturale” si ottiene inserendo delle cerniere sugli appoggi intermedi, cioè sconnettendo la continuità della rotazione delle sezioni su tali appoggi. Le incognite iperstatiche sono quindi delle coppie e le equazioni di congruenza richiedono il calcolo delle rotazioni relative in corrispondenza delle sconnessioni. Nella struttura principale i tratti fra gli appoggi intermedi divengono delle travi appoggiate alle estremità e soggette alle coppie iperstatiche ed agli eventuali carichi esterni che competono al tratto in questione. Per quel che riguarda i due tratti esterni, questi sono delle travi appoggiate oppure delle travi incastro-appoggio a seconda che l'estremità sia appoggiata oppure incastrata. Nel caso in cui un tratto

esterno sia a *sbalzo*, ovvero sia con l'estremità non vincolata, sull'appoggio interno del tratto non va effettuata la sconnessione, altrimenti il tratto diventa labile.

Non ha importanza che i vincoli intermedi siano degli appoggi fissi oppure dei carrelli a piano di scorrimento orizzontale, perché, come si è già visto, le eventuali incognite iperstatiche di tipo assiale dipendono solo dalle forze di tipo assiale e sono nulle se queste sono nulle. Se sia le forze di tipo assiale che quelle di tipo flessionale non sono nulle occorrerà risolvere entrambi i problemi (flessionale e assiale), problemi che, in ogni caso, sono indipendenti l'uno dall'altro.

Trave continua su due appoggi intermedi caricata da una forza concentrata

La trave continua di figura ha tre gradi di libertà se svincolata e ha nove gradi di vincolo. Poiché l'incastro da solo impedisce qualunque moto



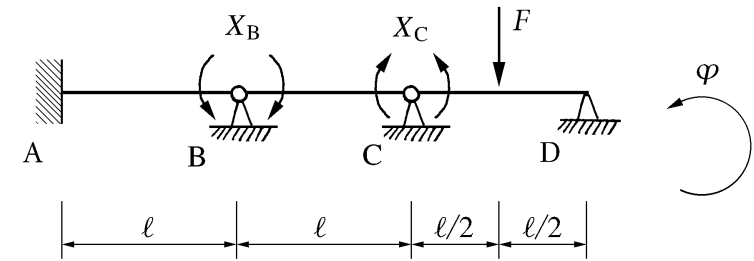
rigido, la trave non è labile e quindi ha sei gradi di iperstaticità:

$$g = 3, v = 9 \Rightarrow i - l = 6, \quad l = 0 \Rightarrow i = 6.$$

Poiché l'incastro da solo impedisce la traslazione orizzontale, la trave ha tre gradi di iperstaticità i_a di tipo assiale (anche i tre appoggi in B, C e D impediscono lo spostamento orizzontale) e quindi tre gradi di iperstaticità i_f di tipo flessionale:

$$i_a = 3, \quad i_f = 3.$$

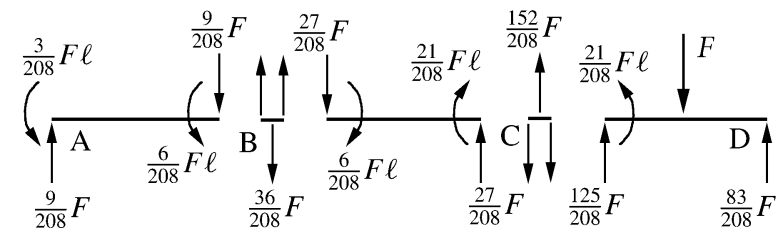
Inserendo due cerniere nei nodi B e C si ottiene una struttura una volta iperstatica flessionalmente soggetta alle coppie X_B e X_C in corrispondenza delle facce di B e C rispettivamente, facce rese libere a seguito delle due sconnessioni. Tale struttura, anche se iperstatica flessionalmente, può



essere utilizzata quale struttura principale poiché il tratto iperstatico AB costituisce una trave incastro-appoggio soggetta alla coppia X_B applicata in corrispondenza dell'appoggio, tipo di trave già risolta una volta per tutte. Se ci si riducesse ad uno schema flessionalmente isostatico inserendo una cerniera anche in A, si dovrebbe riscrivere l'equazione di congruenza $\varphi_A = 0$ della trave incastro-appoggio che ancora darebbe come risultato che il momento in A è in modulo la metà e di segno opposto di quello applicato in B.

Per risolvere la struttura dobbiamo scrivere le equazioni di congruenza in corrispondenza delle due sconnessioni:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA} = 0, \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{CD} - \varphi_{CB} = 0, \end{cases}$$



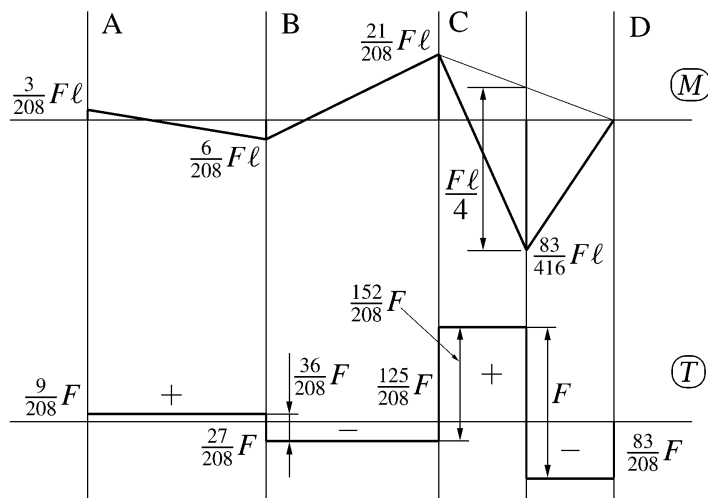
Reazioni interne ed esterne

ottenendo:

$$\begin{cases} \left(-\frac{X_B \ell}{3EJ} + \frac{X_C \ell}{6EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{4EJ} \right) = 0, \\ \left(\frac{X_C \ell}{3EJ} - \frac{F \ell^2}{16EJ} \right) - \left(\frac{X_B \ell}{6EJ} - \frac{X_C \ell}{3EJ} \right) = 0. \end{cases}$$

Semplificando e risolvendo si ottiene:

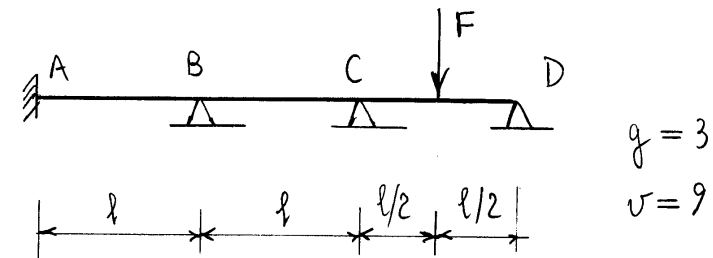
$$\begin{cases} -7X_B + 2X_C = 0, \\ -X_B + 4X_C - \frac{3}{8}F\ell = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_B = \frac{6}{208}F\ell, \\ X_C = \frac{21}{208}F\ell. \end{cases}$$



Diagrammi del momento flettente e del taglio

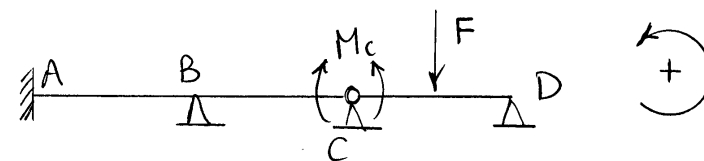
Analisi qualitativa basata sulle rigidezze

Trave continua 6 volte iperstatica (3 iperstaticità flessionali e tre iperstaticità assiali)



Si scommetta in C e si indichi con K la rigidezza alla rotazione del tratto AC (coppia unitaria in C che provoca la rotazione unitaria). Risulta quindi:

$$M_C = -K\varphi_{CA}.$$



Congruenza :

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CD}.$$

Poiché:

$$\varphi_{CA} = -\frac{M_C}{K},$$

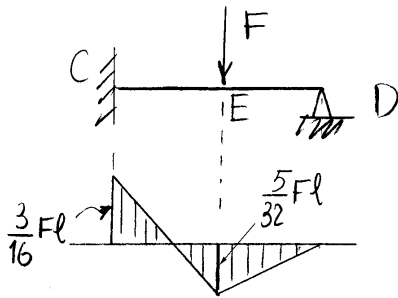
$$\varphi_{CD} = \frac{M_C l}{3EJ} - \frac{Fl^2}{16EJ},$$

si ottiene quindi:

$$M_C = \frac{\frac{3}{16} Fl}{1 + 3EJ/Kl}.$$

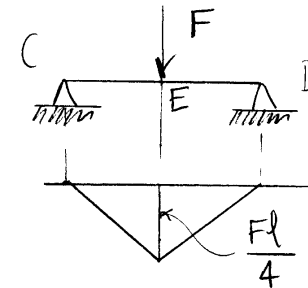
Si presentano due casi limite:

1) $K \rightarrow \infty$ (trave incastra appoggio)



$$M_C = \frac{3}{16} Fl$$

2) $K \rightarrow 0$ (trave appoggiata)



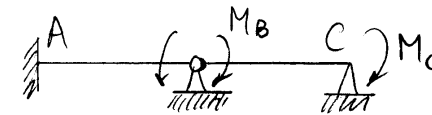
$$M_C = 0$$

Quindi:

$$0 < M_C < \frac{3}{16} Fl \quad (\text{tese le fibre dell'estradosso})$$

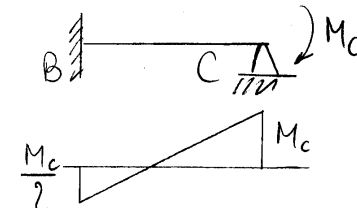
$$\frac{5}{32} Fl < M_E < \frac{Fl}{4} \quad (\text{tese le fibre dell'intradosso})$$

Si sconnetta ora in B:

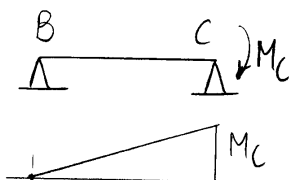


Casi limite per il momento in B :

1) trave incastra appoggio



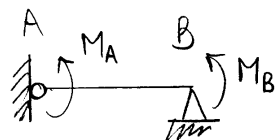
2) Trave appoggiata



Dunque:

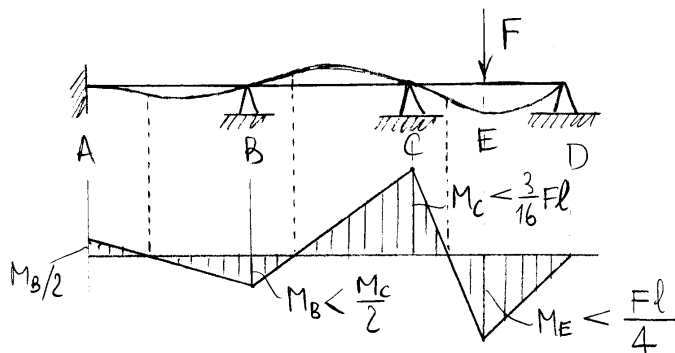
$$0 < M_B < \frac{M_C}{2} \quad (\text{tense le fibre dell'intradosso})$$

Per quel che riguarda il tratto AB, non si hanno casi limite dato che il tratto è equivalente a una trave incastro-appoggio.



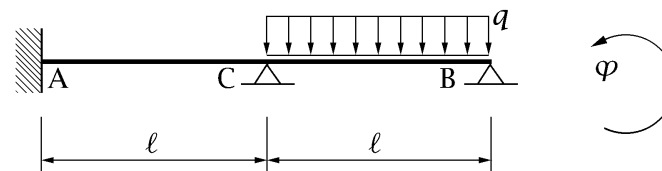
$$M_A = \frac{M_B}{2}$$

Deformata e diagramma del momento:



Trave continua su un appoggio intermedio caricata da una forza distribuita

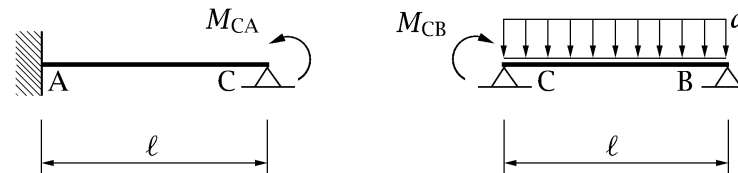
La trave continua di figura è 4 volte iperstatica, due volte assialmente e due volte flessionalmente. La soluzione col metodo delle forze richiede



quindi 4 incognite iperstatiche, a meno di semplificazioni.

L'unico nodo C della struttura può solo ruotare e quindi il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione φ_C del nodo C.

Si risolvano separatamente, in funzione di φ_C , i due tratti AC e CB della struttura. Detti M_{CA} e M_{CB} i momenti agenti nelle estremità C dei tratti AC



e CB rispettivamente, positivi se tendono le fibre inferiori, risulta:

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \frac{M_{CA} \ell}{4EJ} & \Rightarrow & M_{CA} = \frac{4EJ}{\ell} \varphi_C, \\ \varphi_C &= -\frac{M_{CB} \ell}{3EJ} - \frac{q \ell^3}{24EJ} & \Rightarrow & M_{CB} = -\frac{3EJ}{\ell} \varphi_C - \frac{q \ell^2}{8}. \end{aligned}$$

I termini:

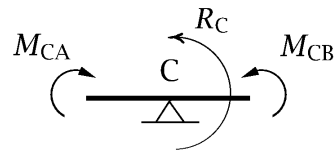
$$k_{CA} = \frac{4EJ}{\ell}, \quad k_{CB} = \frac{3EJ}{\ell},$$

rappresentano le *rigidezze alla rotazione* dei due tratti AC e CB rispettivamente, ovverossia le coppie che applicate nelle estremità C dei due tratti

provocano, in assenza di forze applicate lungo l'asse della trave, la rotazione unitaria dell'estremità del tratto relativo. La quantità $-\frac{q\ell^2}{8}$ rappresenta invece, per il tratto CB, il momento in C corrispondente al vincolo $\varphi_C = 0$, e detto per tale motivo *momento di vincolo perfetto*. Il momento di vincolo perfetto per il tratto AC è invece nullo, non essendo il tratto caricato.

L'equilibrio del nodo C impone:

$$R_C = M_{CA} - M_{CB} \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{7EJ}{\ell} \varphi_C + \frac{q\ell^2}{8}.$$



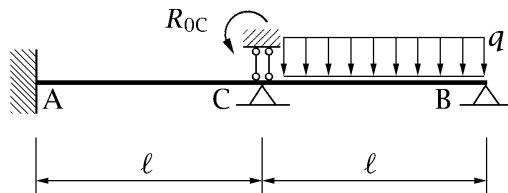
Il termine:

$$k_C = \frac{7EJ}{\ell},$$

rappresenta la rigidezza alla rotazione del nodo C, ovvero la coppia che applicata nel nodo C provoca, in assenza di forze applicate lungo l'asse della trave, la rotazione unitaria del nodo stesso. La quantità:

$$R_{0C} = \frac{q\ell^2}{8},$$

rappresenta invece la *reazione di vincolo perfetto* in C, ovvero la reazione del vincolo $\varphi_C = 0$.

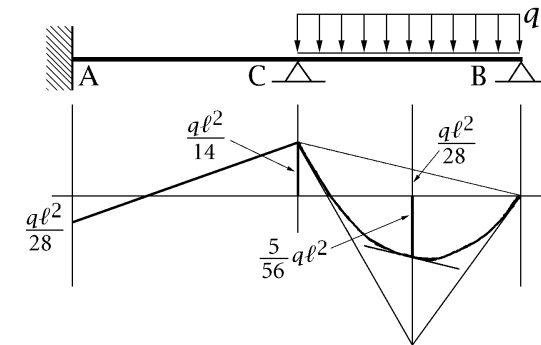


Risulta quindi:

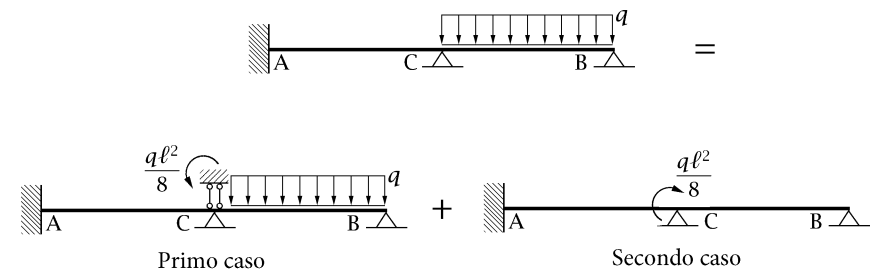
$$\varphi_C = -\frac{q\ell^3}{56EJ},$$

e i momenti M_{CA} e M_{CB} risultano infine:

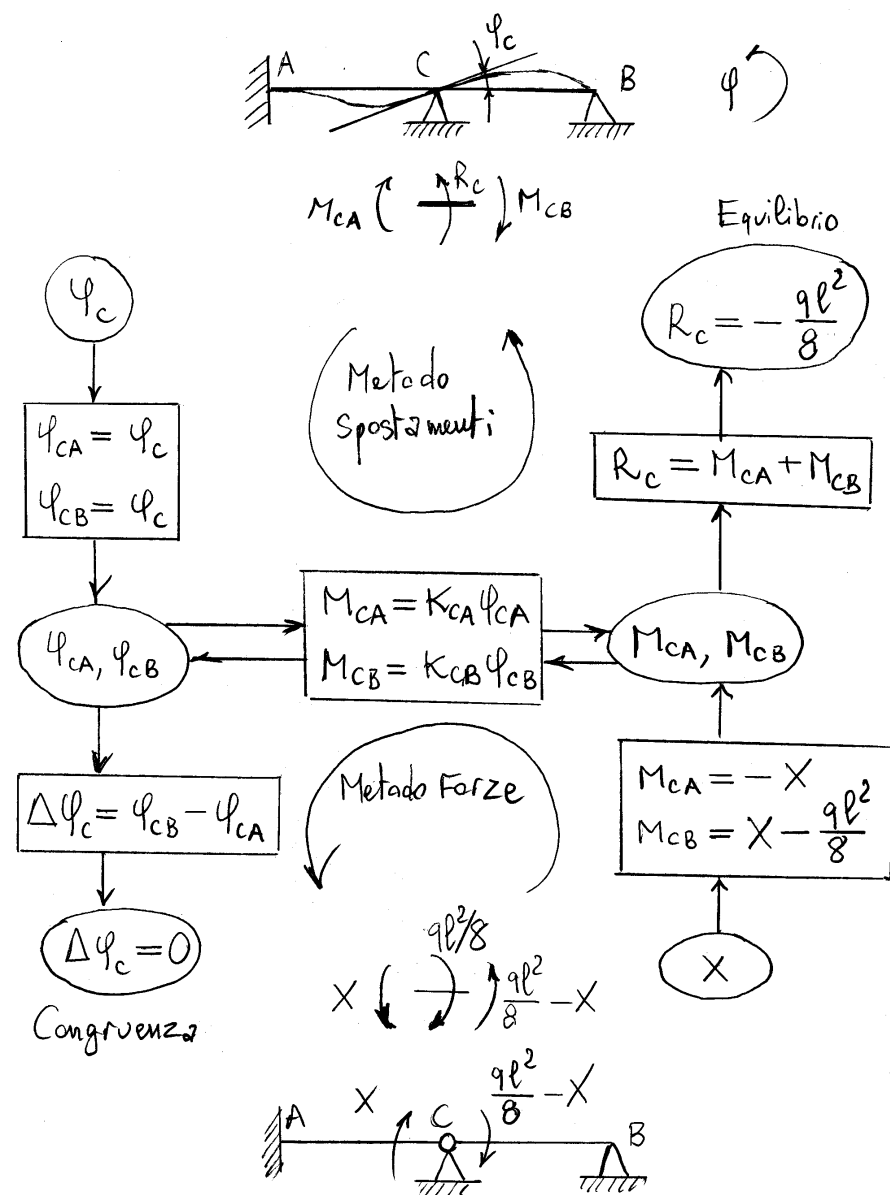
$$M_{CA} = M_{CB} = -\frac{4}{56}q\ell^2.$$



Si noti che il problema può essere scomposto nella somma di un primo caso con il carico applicato e il nodo C bloccato e un secondo caso con applicata la reazione del caso precedente cambiata di segno, come illustrato in figura.



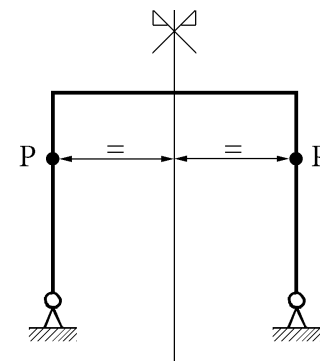
Il diagramma illustra la logica della soluzione del secondo caso, sia con il metodo delle forze che con il metodo degli spostamenti.



5.3 Strutture simmetriche

Una struttura è *simmetrica* se è invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, sotto certe trasformazioni. Nel seguito si considereranno, per le strutture piane, due tipi di trasformazioni: le *riflessioni* rispetto ad un asse e le *rotazioni* di 180° attorno ad un punto detto *polo*.

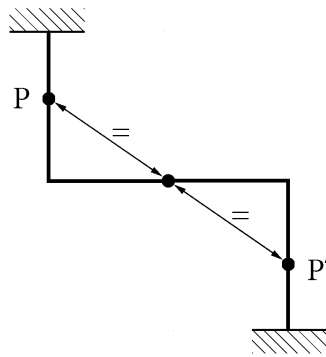
In una riflessione il punto corrispondente a un dato punto è posto sulla perpendicolare all'asse di riflessione per tale punto, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse. Una struttura invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista materiale, per riflessione rispetto ad un asse è detta *assialsimmetrica*. Spesso, quando si dice che



una struttura è *simmetrica* senza nessuna altra specificazione si intende che è *assialsimmetrica*. Si noti che una riflessione è equivalente ad una rotazione di 180° attorno all'asse di riflessione. Tale rotazione comunque, a differenza della riflessione, coinvolge la terza dimensione. Con riferimento alle sezioni delle travi si è anche parlato di *(assial)simmetria obliqua*: in tal caso, dato un punto, la trasformazione gli fa corrispondere il punto posto sulla retta per il punto dato e avente la data direzione obliqua, dalla parte opposta rispetto all'asse e ad ugual distanza dall'asse.

Una rotazione di 180° attorno a un polo è equivalente alla trasformazione che a un dato punto fa corrispondere il punto posto sulla congiungente per il polo, dalla parte opposta rispetto al polo e ad ugual distanza dal polo. Una struttura invariante, sia dal punto di vista geometrico che dal

punto di vista materiale, per rotazioni di 180° attorno a un polo è detta *polarsimmetrica*.



5.3.1 Azioni su strutture simmetriche

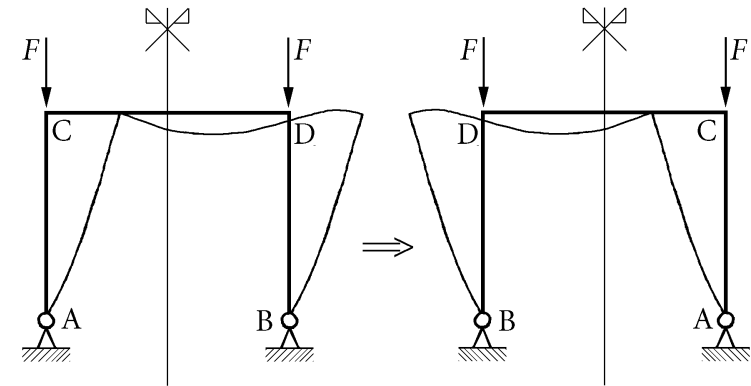
Si consideri ora un sistema di travi simmetrico (in senso generico, ovvero sia assialsimmetrico oppure polarsimmetrico o altro). Le azioni che agiscono sulla struttura (forze, distorsioni, vincoli) possono essere:

1. *Simmetriche*, se sono invarianti a seguito della trasformazione;
2. *Emisimmetriche* (o *antisimmetriche*) se nella trasformazione si ottengono le azioni cambiate di segno;
3. *Generiche*, ovvero sia né simmetriche e né emisimmetriche.

Sistemi simmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Si consideri innanzitutto un sistema simmetrico soggetto ad azioni simmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non simmetrica (quando ciò avviene si parla di *rottura di simmetria*).

Eseguendo la trasformazione la struttura e le azioni restano invariate mentre la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Questo implica che



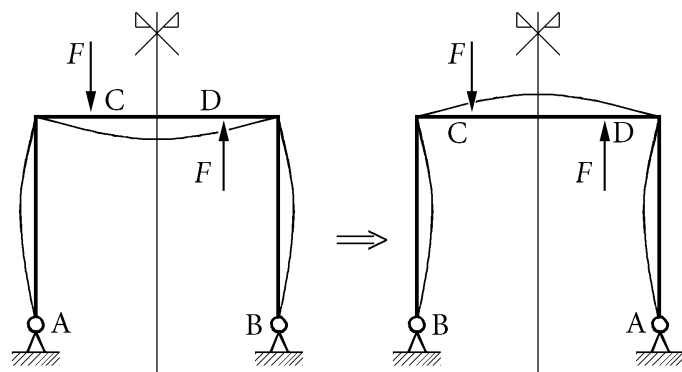
se un sistema simmetrico sotto certe azioni simmetriche ammette una soluzione non simmetrica, anche la simmetrica di tale soluzione è una soluzione. In particolare se ne può concludere che le (eventuali) soluzioni non simmetriche si presentano sempre a coppie.

Poiché i sistemi lineari, tipo quelli che si stanno al momento considerando, ammettono una sola soluzione se ne può concludere che questa, unica, soluzione deve essere simmetrica.

Sistemi simmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

Si consideri ora un sistema simmetrico soggetto ad azioni emisimmetriche e si supponga che ammetta una soluzione non emisimmetrica. Eseguendo la trasformazione la struttura resta invariata, le azioni cambiano di segno e la soluzione si trasforma nella sua simmetrica. Se il sistema è anche omogeneo di grado uno (come nel caso dei sistemi lineari) e sotto certe azioni ammette una soluzione allora sotto le azioni cambiate di segno (cioè moltiplicate per -1) ammette la soluzione precedente cambiata di segno. Dopo la trasformazione si cambi allora segno sia alle forze che alla soluzione (simmetrica della soluzione di partenza) ottenendo così le forze originali e la emisimmetrica della soluzione di partenza. Quindi le eventuali soluzioni non emisimmetriche di un sistema omogeneo di grado uno simmetrico e soggetto ad azioni emisimmetriche si presentano a coppie.

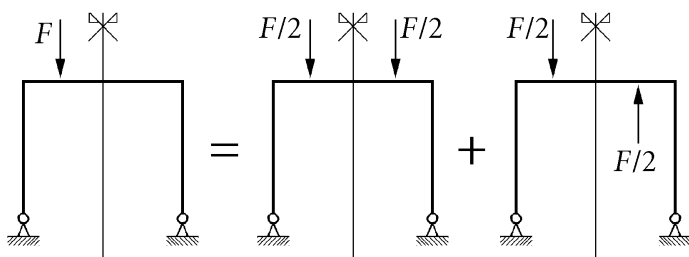
Nel caso dei sistemi lineari simmetrici soggetti ad azioni emisimme-



triche si può quindi concludere che la soluzione, unica, deve essere emisimmetrica.

Sistemi simmetrici soggetti ad azioni generiche

Infine, se le azioni su una struttura simmetrica sono generiche e se vale la sovrapposizione degli effetti (come nel caso delle strutture lineari), possono sempre decomporre nella somma di azioni simmetriche e di azioni emisimmetriche.



Infatti, se in punto è data una certa azione, basta dividerla a metà, una metà farà parte delle azioni simmetriche e l'altra metà di quelle emisimmetriche. In più, delle azioni simmetriche farà parte la simmetrica di tale metà e delle azioni emisimmetriche farà parte la sua emisimmetrica. Som-

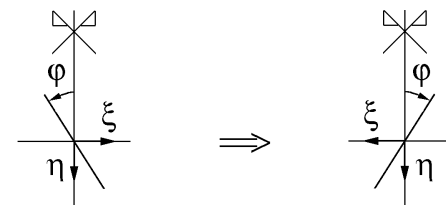
mando si riottiene l'intera azione mentre la simmetrica e l'emisimmetrica di metà di tale azione si elidono reciprocamente.

5.3.2 Strutture assialsimmetriche

Si concentri ora l'attenzione sui sistemi assialsimmetrici, quindi, come detto, invarianti per riflessione rispetto ad un asse. Nel seguito si analizzeranno tali sistemi sia soggetti ad azioni simmetriche che emisimmetriche, con particolare riferimento alla situazione che si presenta in corrispondenza di sezioni poste sull'asse di simmetria.

Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni simmetriche

Come detto, la risposta di una struttura simmetrica ad azioni simmetriche, nel caso delle strutture lineari, è simmetrica. Ne consegue che una sezione posta sull'asse di simmetria può solo traslare lungo l'asse di simmetria. Infatti, per riflessione, tale spostamento resta invariato, mentre sia

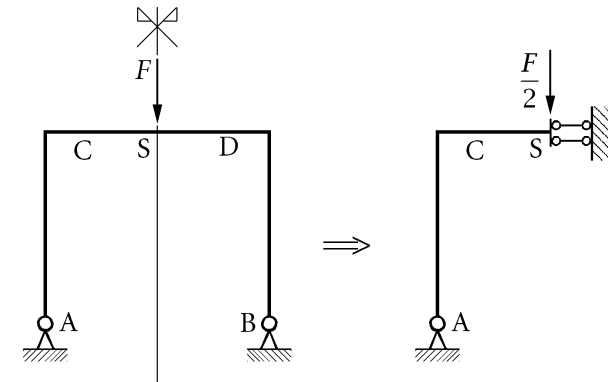
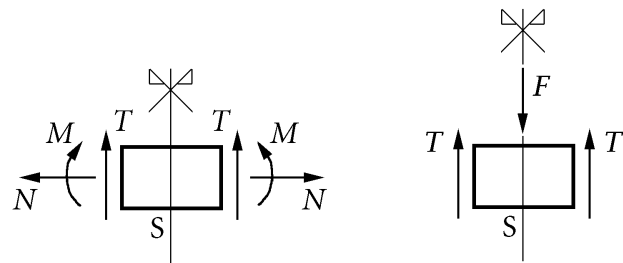
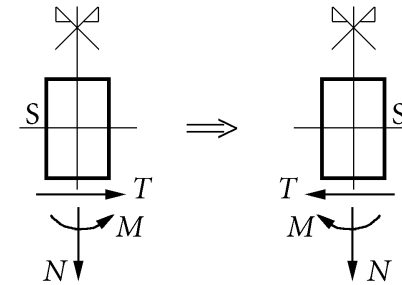
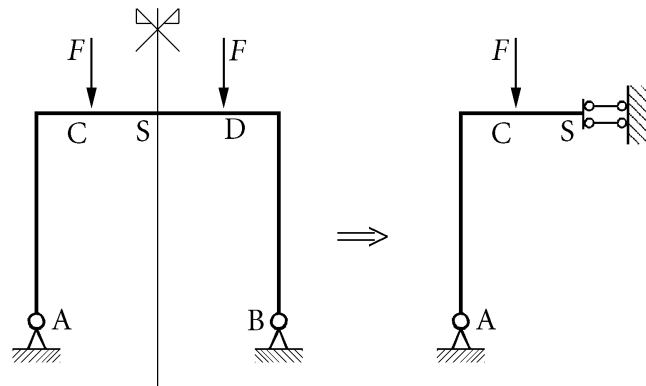


una traslazione ortogonale all'asse di simmetria che una rotazione vengono cambiate di segno nella riflessione (sono cioè emisimmetriche). Ne consegue che le condizioni cinematiche imposte dalla simmetria sono equivalenti a quelle dovute ad un doppio pendolo.

Si consideri ora la situazione statica di una sezione posta sull'asse di simmetria e di traccia coincidente con l'asse. Per equilibrio del nodo, la sezione può essere soggetta a forza normale e a momento flettente mentre il taglio deve essere nullo, almeno se la sezione non è direttamente caricata:

Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria	$\Rightarrow$	$T = 0.$
--	---------------	----------

Se la sezione è invece caricata da una forza simmetrica, cioè da una forza

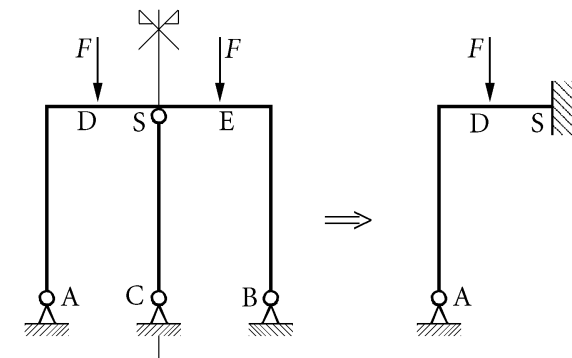


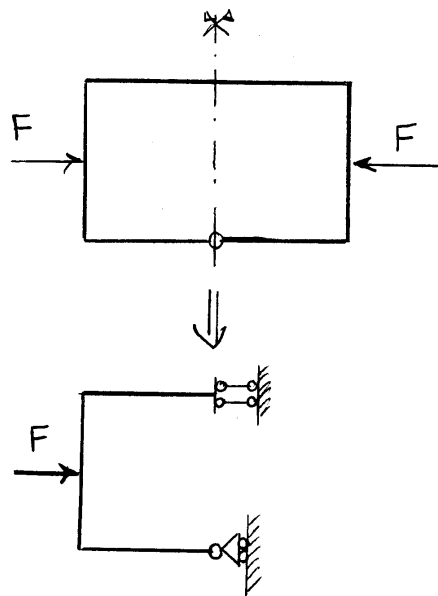
avente la direzione dell'asse di simmetria, l'equilibrio impone che nelle due facce poste immediatamente prima e dopo l'asse di simmetria il taglio valga metà della forza applicata:

Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse di simmetria

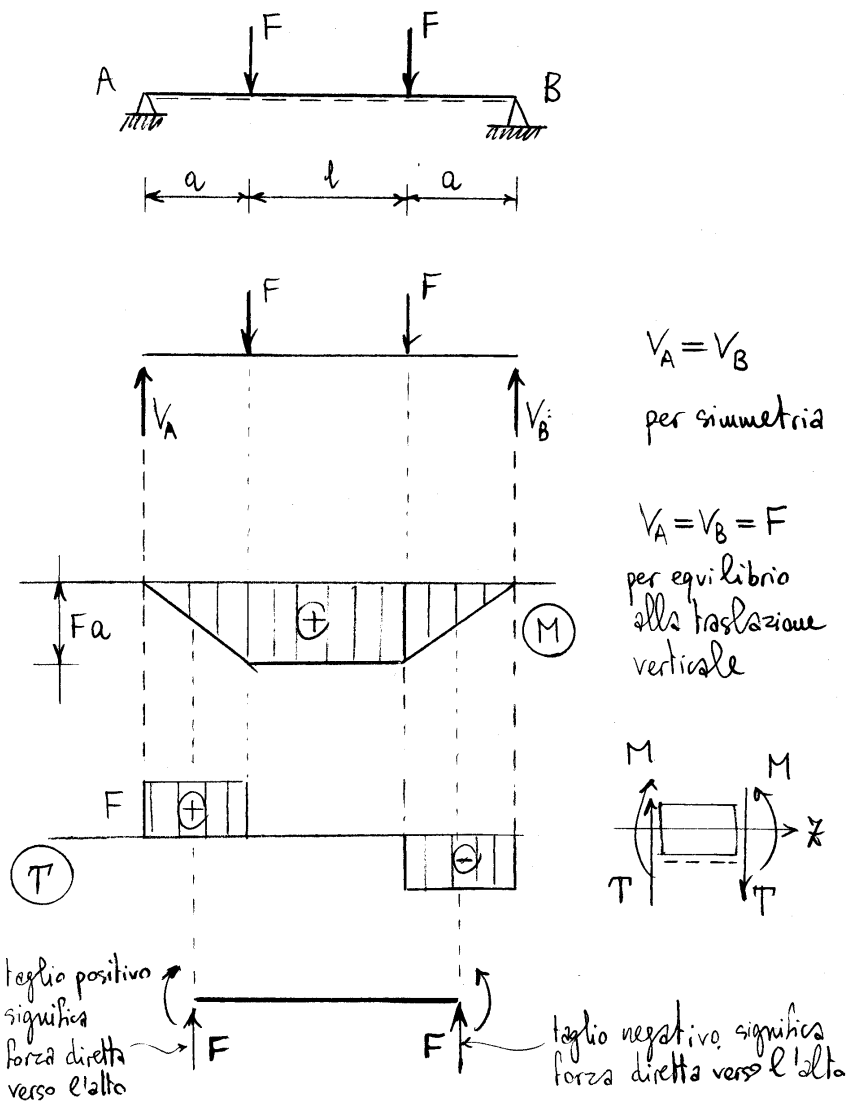
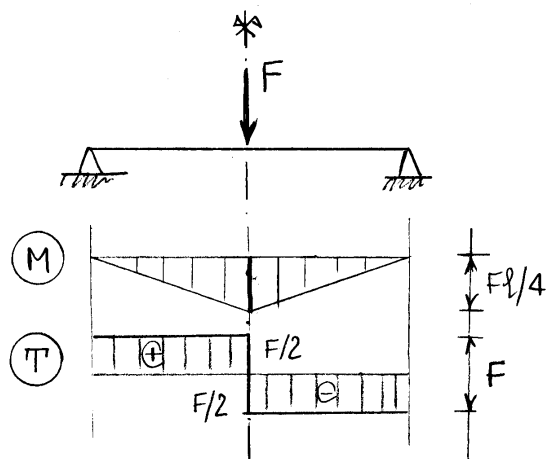
$$\Rightarrow T = \frac{F}{2}.$$

Si consideri poi una sezione posta sull'asse di simmetria ma di traccia ortogonale all'asse. In tale caso risulta che la sezione è soggetta alla sola forza normale. Infatti la forza normale è l'unica caratteristica della sollecitazione che si rifletta restando invariata.





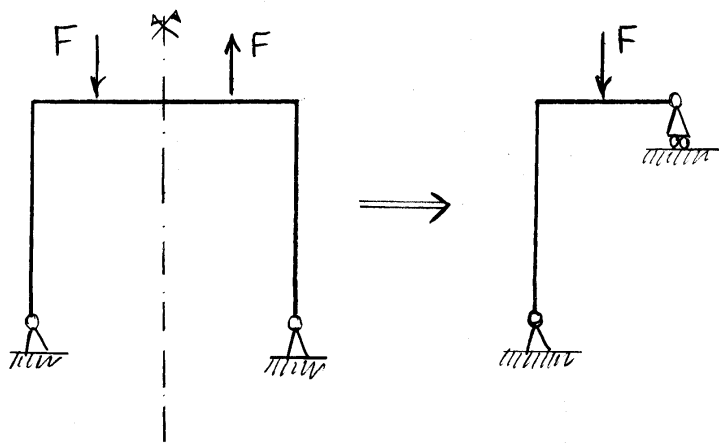
Diagrammi nel caso assialsimmetrico



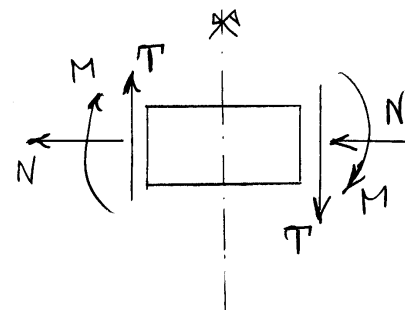
il diagramma del taglio è emisimmetrico, ma le forze sono simmetriche

Sistemi assialsimmetrici soggetti ad azioni emisimmetriche

La sezione posta sull'asse di simmetria può traslare in direzione ortogonale all'asse e può ruotare mentre non può traslare nella direzione dell'asse. Infatti, per riflessione, lo spostamento nella direzione dell'asse non cambia di segno e quindi rappresenta uno spostamento simmetrico. Le condizioni cinematiche imposte dalla emisimmetria ad una sezione posta sull'asse di simmetria sono dunque equivalenti a quelle dovute ad un carrello con piano di scorrimento ortogonale all'asse di simmetria.



Per equilibrio del nodo posto sull'asse di emisimmetria, la relativa sezione può essere soggetta a taglio mentre la forza normale ed il momento flettente devono essere nulli, almeno nel caso in cui la sezione posta sull'asse non è caricata.



Nodo sull'asse di simmetria
di una struttura simmetrica
caricata emisimmetricamente

Equilibrio alla traslazione
ortogonamente all'asse di simmetria

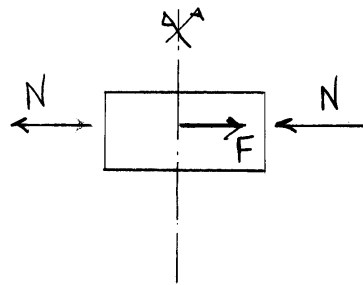
$$\Rightarrow N = 0$$

Equilibrio alla rotazione

$$\Rightarrow M = 0$$

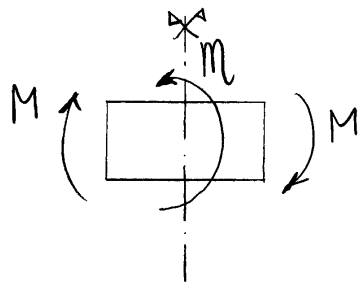
Se il nodo è caricato da una forza emisimmetrica l'equilibrio impone che la forza normale a destra e a sinistra del nodo valga metà della forza applicata.

Analogamente, se il nodo è caricato da una coppia, l'equilibrio impone che il momento flettente a destra e a sinistra del nodo valga metà della coppia applicata.



Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una forza (emisimmetrica) nella sezione di simmetria

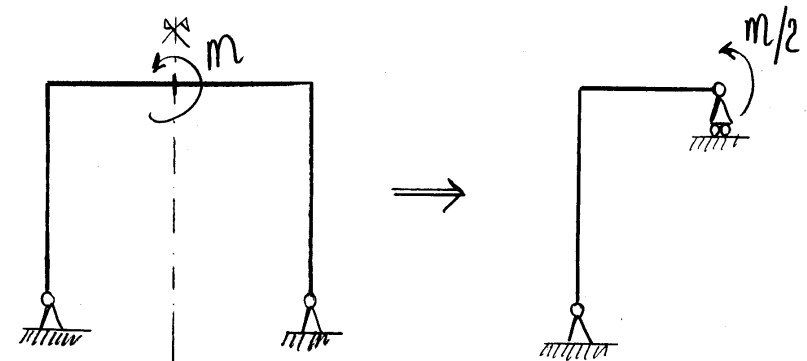
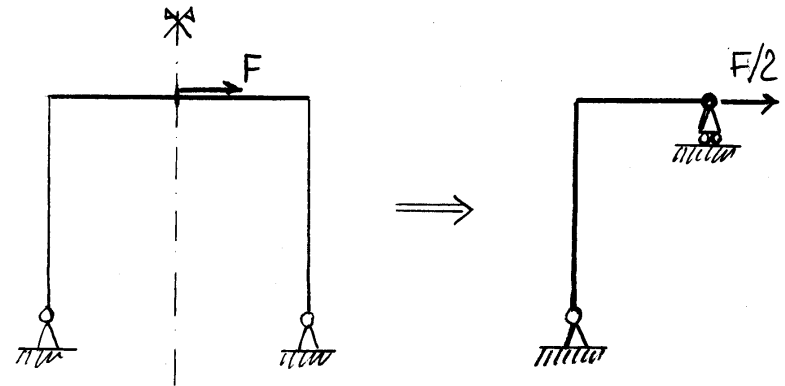
Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse di simmetria $\Rightarrow N = \frac{F}{2}$



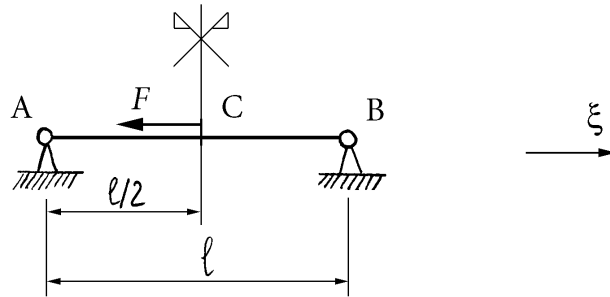
Nodo sull'asse di simmetria di una struttura simmetrica caricata emisimmetricamente e soggetta ad una coppia nella sezione di simmetria

Equilibrio alla rotazione $\Rightarrow M = \frac{m}{2}$

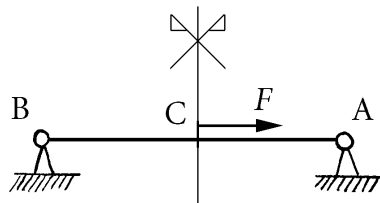
Si noti che una forza diretta come l'asse di simmetria ed applicata in corrispondenza di una sezione posta sull'asse di simmetria, rappresenta un carico simmetrico.



Trave appoggiata soggetta a un carico assiale emisimmetrico

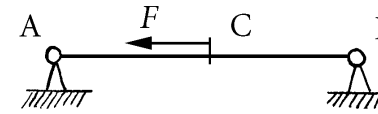


La trave è geometricamente e materialmente simmetrica rispetto all'asse verticale passante per il punto C di mezzeria. La forza F risulta invece antisimmetrica:



riflessione rispetto all'asse di simmetria
(situazione identica alla precedente, ma con le forze cambiate di segno)

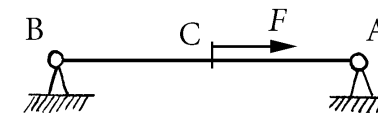
È possibile risolvere il problema imponendo che la soluzione riflessa coincida con la soluzione originaria cambiata di segno.



Struttura originaria

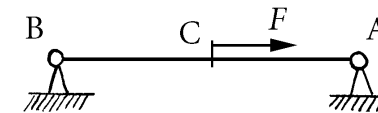
Equilibrio nodo C

$$N_{CA} + N_{CB} = F$$



Struttura riflessa

Forze normali riflesse



Struttura soggetta alla forza cambiata di segno

Forze normali cambiate di segno

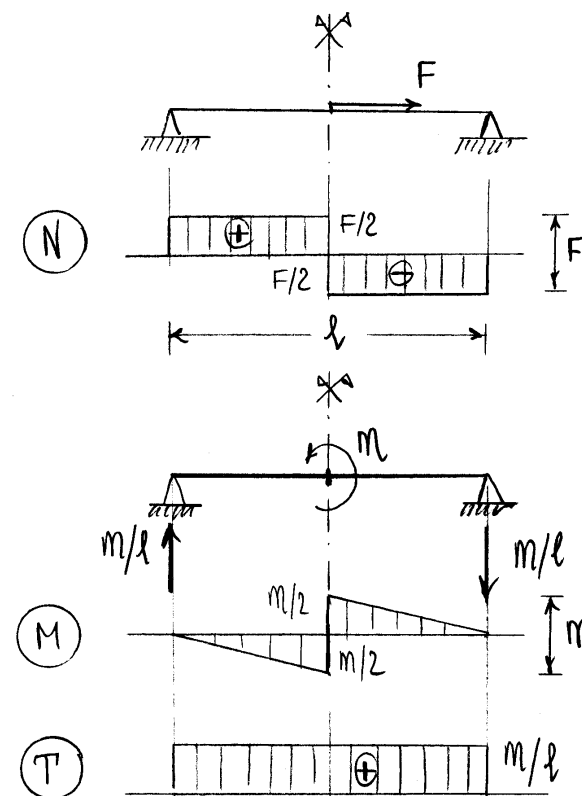
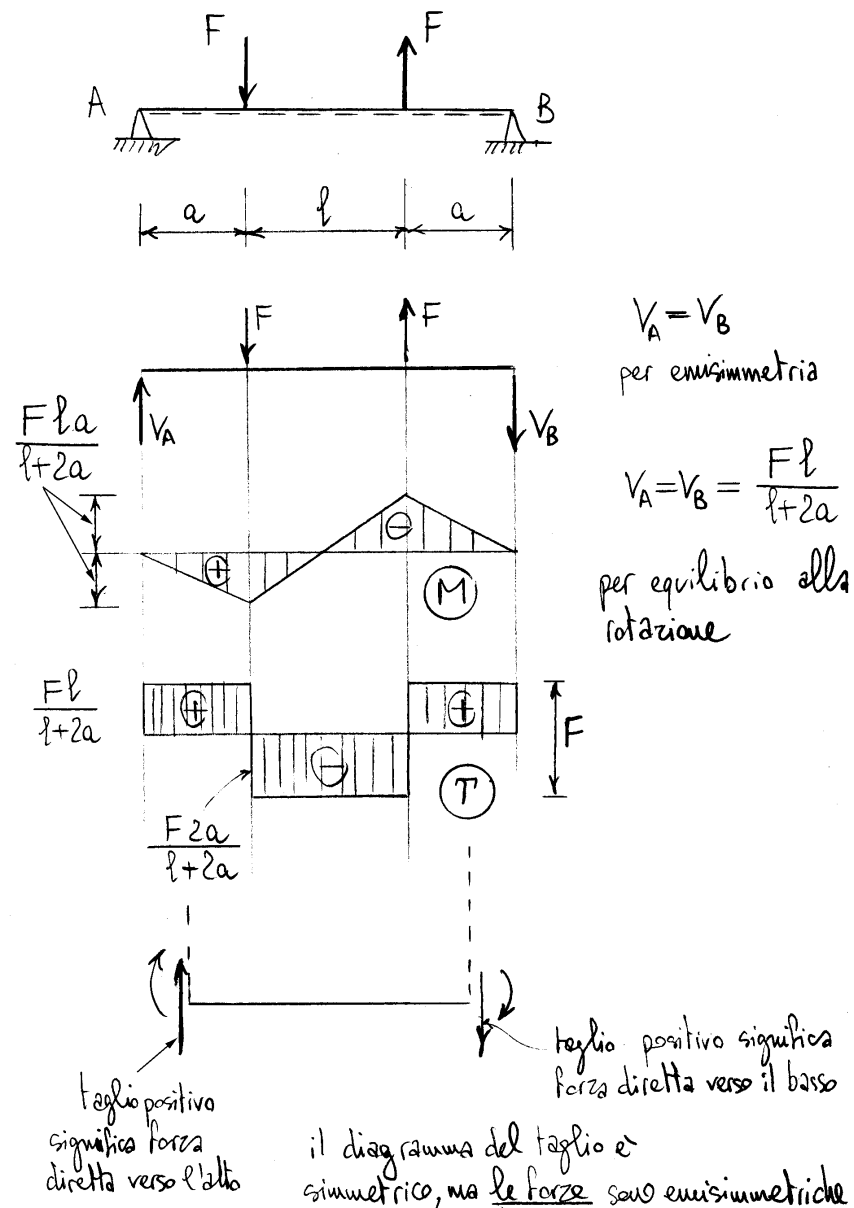
La struttura riflessa è indistinguibile dalla struttura originaria soggetta alle forze cambiate di segno e quindi deve risultare:

$$N_{CA} = N_{CB}.$$

L'equilibrio del nodo C impone infine che sia:

$$N_{CA} = N_{CB} = \frac{F}{2}.$$

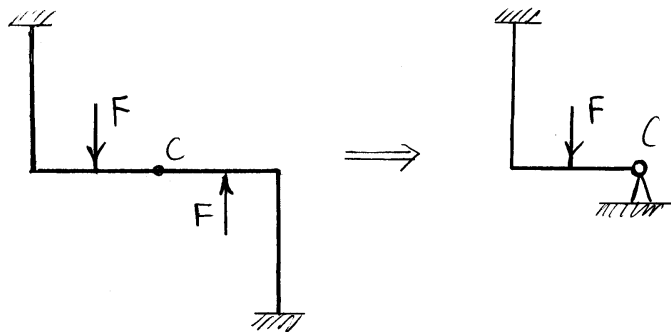
Diagrammi nel caso assiale simmetrico



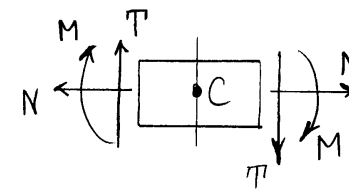
5.3.3 Strutture Polarsimmetriche

Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polarsimmetriche

Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può ruotare ma non può traslare, poiché la sola rotazione risulta essere polarsimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polarsimmetria sono dunque quelle di una cerniera fissa.

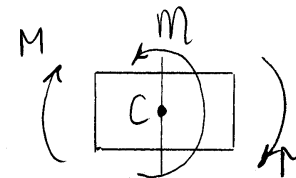


Per quel che riguarda le caratteristiche della sollecitazione, l'equilibrio impone che in corrispondenza del polo C (se appartiene alla struttura) si annulli il momento flettente, salvo che non vi sia una coppia esterna applicata in C . In quest'ultimo caso il momento flettente a destra e a sinistra di C vale la metà della coppia applicata.



Equilibrio alla rotazione

$$M = 0$$

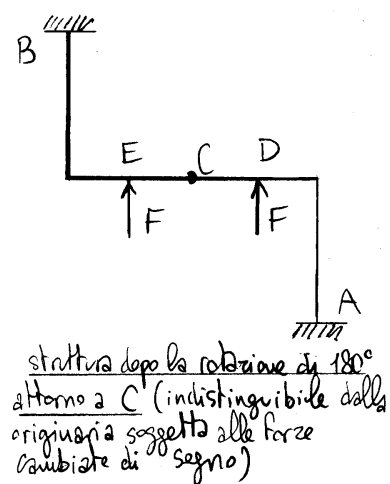
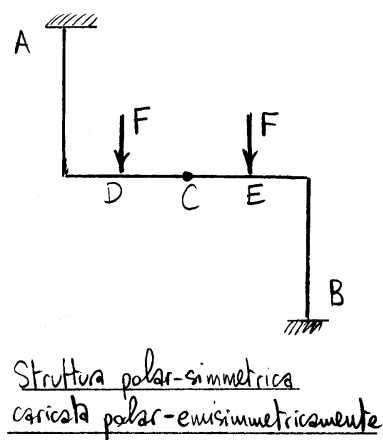


Equilibrio alla rotazione

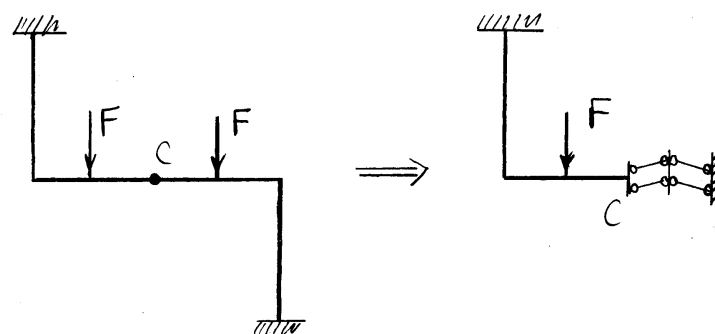
$$M = m/2$$

Sistemi polarsimmetrici soggetti ad azioni polaremisimmetriche

Se una struttura polar-simmetrica è caricata polar-emisimmetricamente, una rotazione di 180° della struttura attorno al polo la rende indistinguibile dalla struttura originaria sottoposta alle forze cambiate di segno. Ne consegue che anche la risposta della struttura deve essere polar-emisimmetrica.

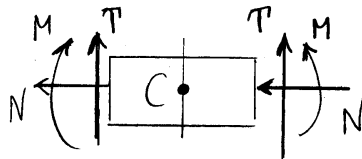


Se il polo C appartiene alla struttura, la corrispondente sezione può solo traslare (in una direzione qualunque) ma non può ruotare, essendo solo la traslazione polar-emisimmetrica. Le condizioni cinematiche imposte dalla polar-emisimmetria sono dunque equivalenti a quelle di un doppio-doppio pendolo.



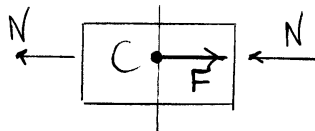
Delle caratteristiche della sollecitazione, risulta presente, per equilibrio, il solo momento flettente, a meno che non sia presente una forza applicata in C.

In quest'ultimo caso, la forza normale vale la metà della componente assiale della forza applicata e il taglio la metà della componente ortogonale all'asse della trave.



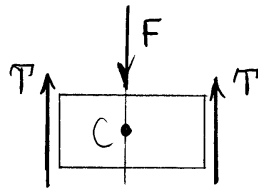
Equazioni di equilibrio alla traslazione:

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$



Equilibrio alla traslazione nella direzione dell'asse della struttura:

$$N = F/2$$

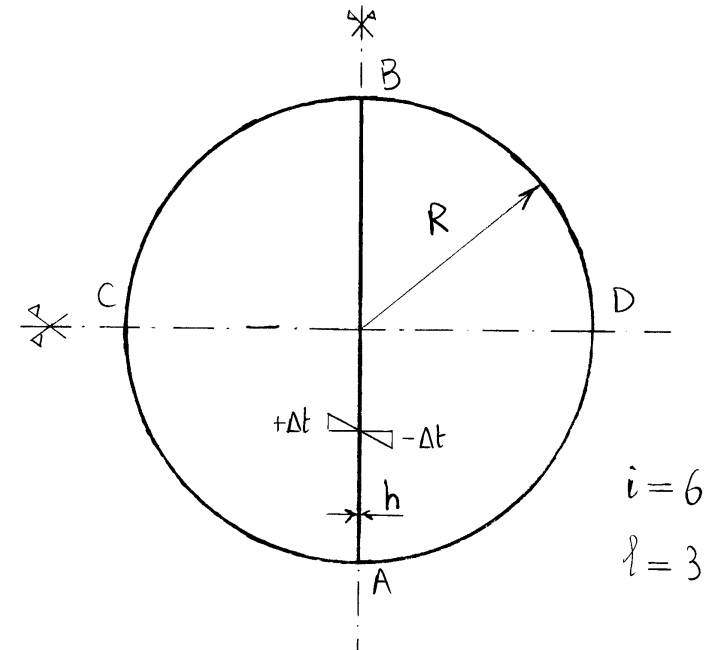


Equilibrio alla traslazione nella direzione ortogonale all'asse della struttura

$$T = F/2$$

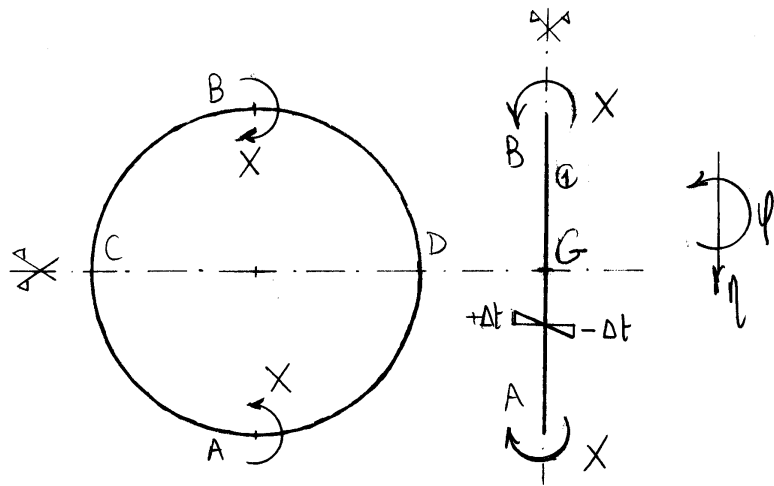
5.4 Travi iperstatiche ad asse curvo

5.4.1 Anello con diaframma soggetto ad una distorsione termica a farfalla



La struttura è simmetrica rispetto all'asse CD ed emisimmetrica rispetto all'asse AB. Inoltre è 3 volte labile e 6 volte iperstatica.

Per ricorrere ad una struttura staticamente determinata, iniziamo a separare l'asta AB soggetta alla variazione termica dell'anello circolare. Per la simmetria rispetto all'asse CD, le sezioni

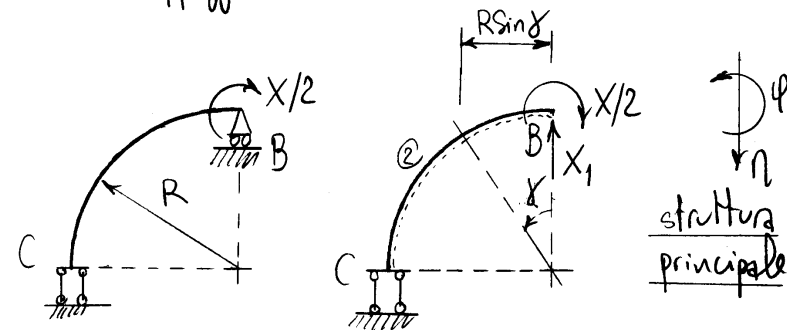


A e B di estremità dell'asta AB sono soggette ad un momento flettente X simmetrico e non sono soggette a taglio (per equilibrio alla traslazione orizzontale), mentre per la emisimmetria rispetto all'asse AB la forza normale è nulla (la forza normale è una forza simmetrica). La rotazione di G è inoltre nulla per la simmetria rispetto a CD e quindi la rotazione di B (e per simmetria anche di A) può valutarsi considerando che il montante AB si deforma come una trave appoggiata, a meno di una traslazione orizzontale:

$$\varphi_B^{\textcircled{1}} = \frac{X(2R)}{2EJ} - \frac{(2R)\alpha\Delta T}{h}.$$

Separiamo ora il quarto di circonferenza BC , tenendo

conto che B è una sezione di emisimmetria e che C è una sezione di simmetria. Si ottiene così una struttura una volta labile e una volta iperstatica, che può essere resa staticamente determinata rimuovendo l'appoggio in B :



Congruenza:

$$\begin{cases} \varphi_B^{\textcircled{2}} = \varphi_B^{\textcircled{1}} \\ \eta_B^{\textcircled{2}} = 0 \end{cases}$$

$$M(\gamma) = X_1 R \sin \gamma - X/2$$

$$d\varphi_B^{\textcircled{2}} = \frac{M}{EJ} ds$$

$$d\eta_B^{\textcircled{2}} = -\frac{M}{EJ} R \sin \gamma ds$$

Procedendo con il metodo cinematico sulla struttura principale, si ottiene:

$$\varphi_B^{\textcircled{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) d\gamma = \frac{R^2}{EJ} X_1 - \frac{\pi R}{4EJ} X,$$

$$\begin{aligned} \theta_B^2 &= - \int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{EJ} (X_1 R \sin \gamma - X/2) \sin \gamma d\gamma \\ &= - \frac{R^2}{2EJ} \left(\frac{\pi R}{2} X_1 - X \right) \end{aligned}$$

$$\theta_B^2 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{2}{\pi R} X = \frac{4}{\pi R} \frac{X}{2}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B^2 = \varphi_B^1 &\Rightarrow \frac{2R}{\pi EJ} X - \frac{\pi R}{4EJ} X = \frac{XR}{EJ} - \frac{2R\alpha\Delta t}{h} \\ &\Rightarrow \frac{R}{EJ} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) X = R \frac{2\alpha\Delta t}{h} \end{aligned}$$

La soluzione risulta dunque:

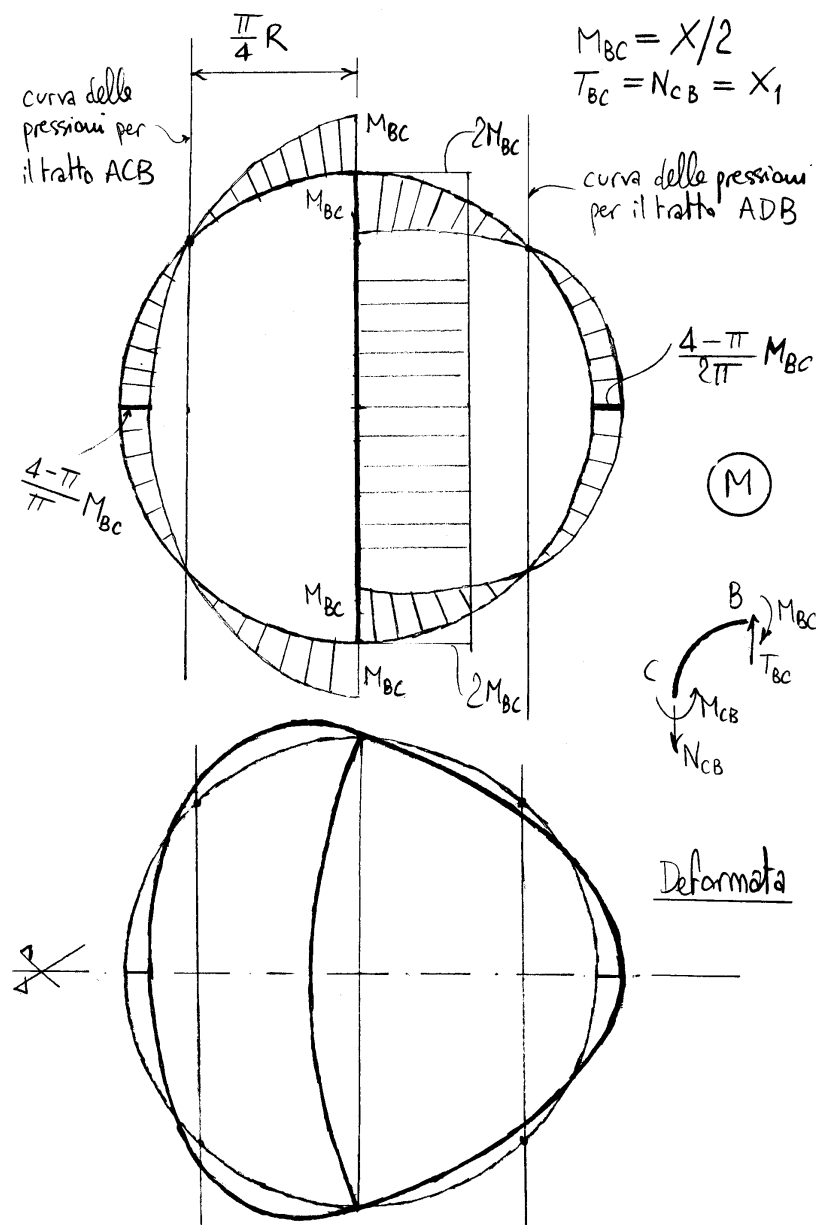
$$\begin{cases} X = \frac{8\pi}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{h} \\ X_1 = \frac{16}{4\pi + \pi^2 - 8} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hR} \end{cases}$$

Il rapporto $b = (X/2)/X_1$ tra la coppia delle forze agenti in B misurata distanza tra la sezione B e la retta d'azione della risultante in B:

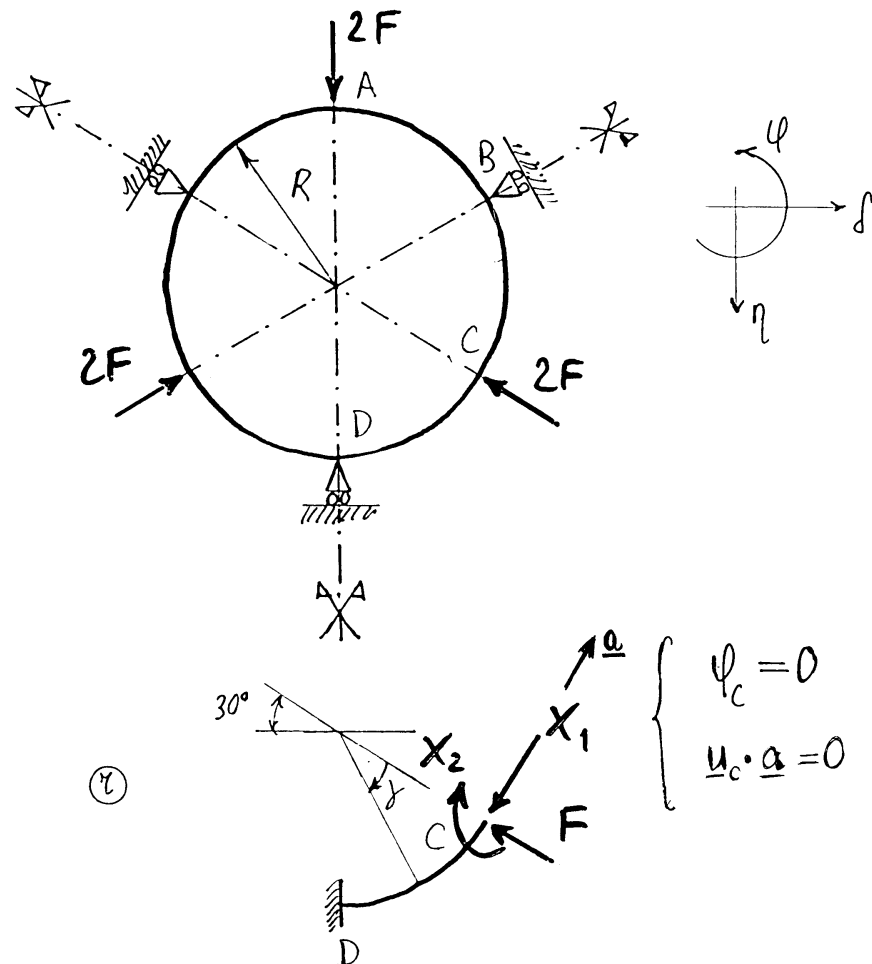
$$b = \frac{\pi}{4} R < R$$

Il momento cambia dunque di segno tra B e C e in C vale:

$$M_C = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} X - \frac{1}{2} X = \frac{4-\pi}{2\pi} X$$



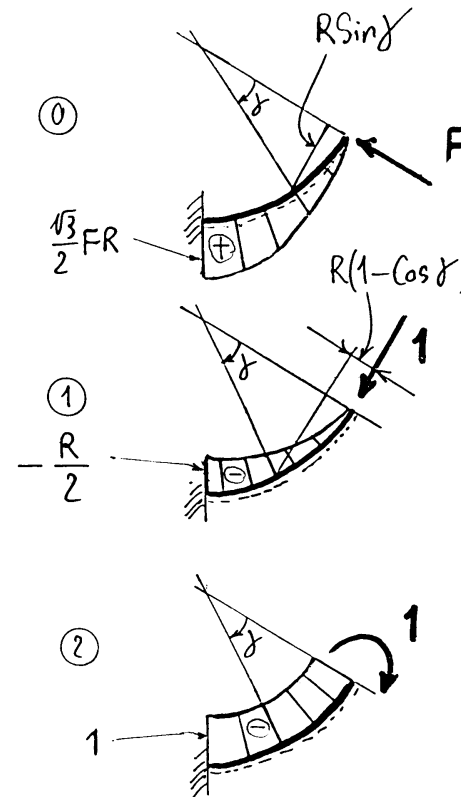
5.4.2 Anello soggetto a forze concentrate



$$M^{(7)}(s) = M^{(0)}(s) + X_1 M^{(1)}(s) + X_2 M^{(2)}(s)$$

$$ds = R d\gamma$$

$$0 \leq \gamma \leq 60^\circ$$



$$M^{(0)}(\gamma) = F R \sin \gamma$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M^{(1)}(\gamma) = -R(1 - \cos \gamma)$$

$$1 - \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

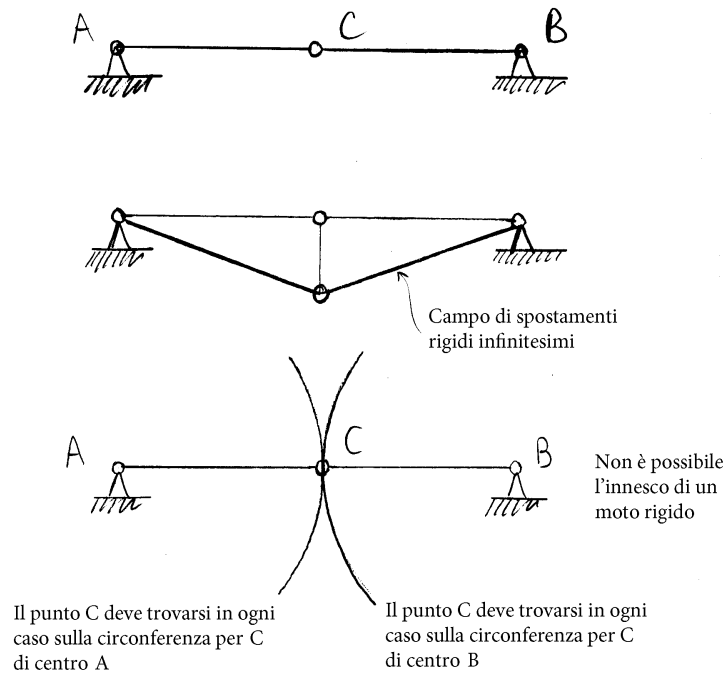
$$M^{(2)}(\gamma) = -1$$

$$\begin{cases} \int_0^{\pi/3} \left\{ -R(1 - \cos \gamma) \left[FR \sin \gamma - X_1 R(1 - \cos \gamma) - X_2 \right] \right\} \frac{R d\gamma}{EI} = 0 \\ \int_0^{\pi/3} \left\{ -1 \left[FR \sin \gamma - X_1 R(1 - \cos \gamma) - X_2 \right] \right\} \frac{R d\gamma}{EI} = 0 \end{cases}$$

5.5 Sistemi di pendoli

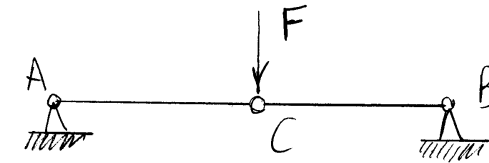
5.5.1 Sistema di pendoli labile e iperstatico non equilibrato

Vi sono dei sistemi di travi per i quali esistono dei campi di spostamenti rigidi infinitesimi ma non dei campi di spostamenti rigidi finiti.¹ Tali sistemi di travi, a parte la singola trave vincolata da un appoggio fisso e da un carrello con piano di scorrimento ortogonale alla linea d'asse (fig. 1.11 p. 17) sono essenzialmente dei sistemi di pendoli allineati come quello riportato in figura. Se tali sistemi sono caricati in modo tale che l'equilibrio

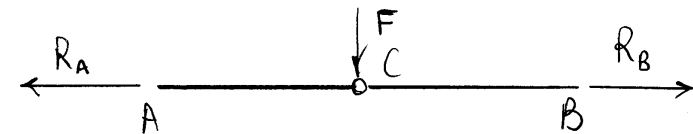


non sia soddisfatto nella configurazione indeformata non possono comunque mettersi in moto proprio per il fatto che non esiste un possibile campo di spostamenti rigidi finito. Nel caso dell'esempio una forza siffatta è rappresentata da una forza verticale applicata in C.

¹ Cfr. il par. 1.3.1, p. 17.



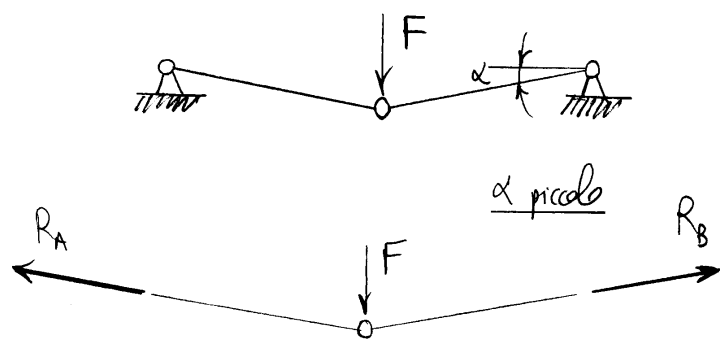
Il fatto che tale forza mette in gioco la labilità infinitesima della struttura si riflette nella circostanza che le reazioni degli appoggi in A e in B non sono in grado di equilibrare la forza F .



Infatti, per equilibrio alla rotazione del tratto AC intorno al punto C, la reazione R_A deve passare per C, così come la R_B . Le due reazioni devono essere orizzontali e non possono quindi

equilibrare la forza F verticale.

Vediamo di analizzare il sistema come limite di sistemi in cui le aste AC e BC sono inclinate.



Risulta:

$$R_A = R_B = \frac{F}{2 \sin \alpha} \approx \frac{F}{2 \alpha}.$$

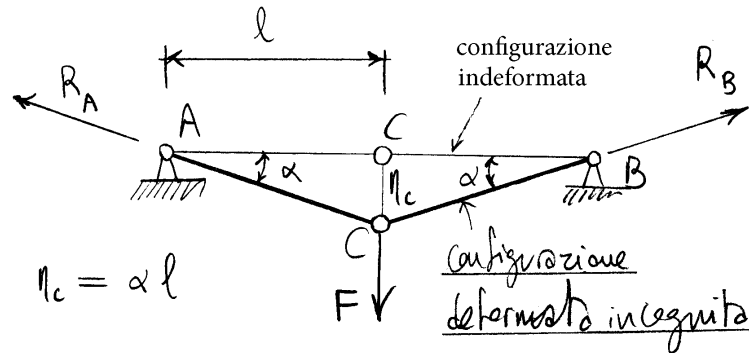
$$\frac{F}{2 \tan \alpha} \approx \frac{F}{2 \alpha}$$

Ne consegue:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_A = \infty.$$

Si arriva alla conclusione che per l'inclinazione delle aste tendente a zero le reazioni vincolari tendono all'infinito. Siamo, cioè, nella condizione in cui una cedevolezza assiale delle aste piccola a piacere provoca conseguenze cinematiche non trascurabili, essendo il suo effetto amplificato da una forza normale grande a piacere. Vediamo di analizzare la situazione in cui l'asta è deformabile assialmente. Siamo in un caso in cui l'equilibrio va scritto nella configurazione deformata (nella configurazione indeformata l'equilibrio non sussiste).

I pendoli AC e BC sono soggetti solo a forza normale e quindi restano rettilinei. Procedendo con il metodo degli spostamenti, si può allora assumere quale incognita lo spostamento del punto C, che per simmetria deve essere verticale. L'allungamento dell'asta AC vale:



$$\Delta l = \frac{l}{\cos \alpha} - l = l \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

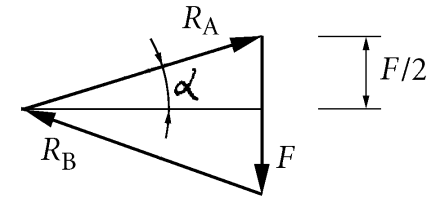
Dato che la rigidità assiale di AC vale $\frac{EA}{l}$ la forza normale nell'asta, pari alla reazione in A, vale:

$$R_A = \frac{EA}{l} \Delta l,$$

L'equilibrio richiede infine che sia, come illustrato in figura:

$$R_A = \frac{F}{2 \sin \alpha},$$

e quindi:



$$(1 - \cos \alpha) \tan \alpha = \frac{F}{2EA}.$$

Se α è piccolo può porsi:

$$\tan \alpha \approx \alpha, \quad 1 - \cos \alpha = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Dunque:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}.$$

Si possono quindi calcolare lo spostamento del punto C e la reazione R_A , che risultano:

$$\eta_c = \alpha l = l \sqrt[3]{\frac{F}{EA}},$$

$$R_A = \frac{F}{2\alpha}.$$

Si supponga che le aste siano costituite da due barre di ferro tondo di diametro $\phi 20 \text{ mm}$ e lunghe 3.50 m . Siano inoltre $F = 5000 \text{ N}$ ed $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Si ottiene:

$$\alpha = 2.42^\circ,$$

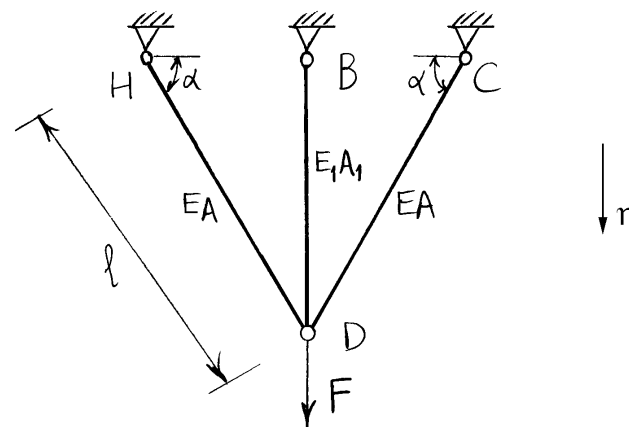
$$\eta_c = 14.8 \text{ cm},$$

$$R_A = 59075 \text{ N},$$

$$\sigma = \frac{R_A}{A} = \frac{59075}{314.16} = 188 \text{ N/mm}^2.$$

Si noti che le forze che mettono in gioco la labilità (infinitesima) del sistema vengono equilibrate, nella configurazione deformata, da reazioni che tendono all'infinito al tendere a zero della cedevolezza, indipendentemente dall'entità delle forze applicate. È evidente che una tale situazione statica, salvo che non sia stata prevista ad arte, è normalmente da evitare.

5.5.2 Cavalletto iperstatico assialsimmetrico caricato simmetricamente

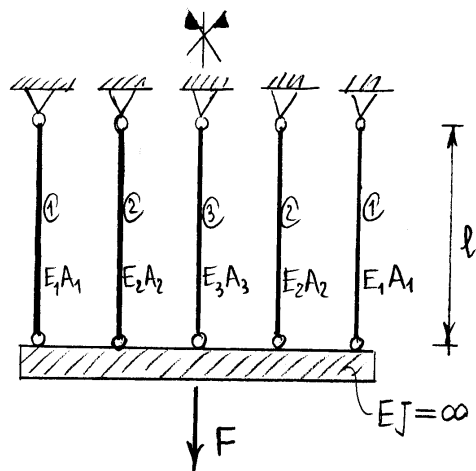


$$\begin{cases} g = 3 \times 3 = 9 \\ v = 5 \times 2 = 10 \\ i = 1 \end{cases}$$

oppure, considerando il nodo D vincolato dai pendoli:

$$\begin{cases} g = 2 \\ v = 3 \\ i = 1 \end{cases}$$

5.5.3 Sistema di pendoli paralleli



$$\begin{cases} g = 6 \times 3 = 18 \\ v = 10 \times 2 = 20 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases} \quad \text{oppure, considerando} \\ \text{la trave vincolata} \\ \text{dai pendoli:} \quad \begin{cases} g = 3 \\ v = 5 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases}$$

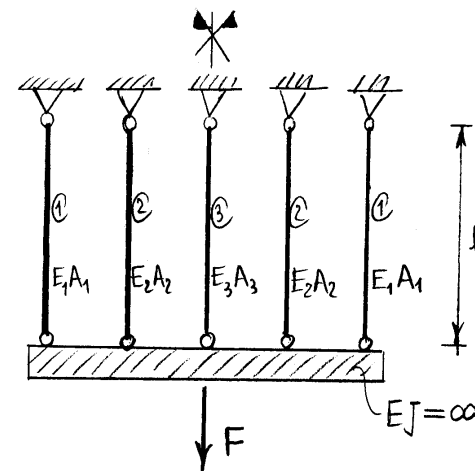
$\eta \equiv$ spostamento verticale della trave rigida

$K_i \equiv$ rigidità assiale dell' i -esimo pendolo:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{l}$$

Risulta:

$$X_1 = K_1 \eta, \quad X_2 = K_2 \eta, \quad X_3 = K_3 \eta.$$



$$\begin{cases} g = 6 \times 3 = 18 \\ v = 10 \times 2 = 20 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases} \quad \text{oppure, considerando} \\ \text{la trave vincolata} \\ \text{dai pendoli:} \quad \begin{cases} g = 3 \\ v = 5 \\ l = 1 \\ i = 3 \end{cases}$$

$\eta \equiv$ spostamento verticale della trave rigida

$K_i \equiv$ rigidità assiale dell' i -esimo pendolo:

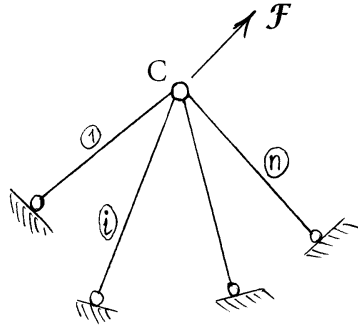
$$K_i = \frac{E_i A_i}{l}$$

Risulta:

$$X_1 = K_1 \eta, \quad X_2 = K_2 \eta, \quad X_3 = K_3 \eta.$$

5.5.4 Sistema di pendoli connessi in un nodo

Si consideri un sistema di n pendoli connessi ad una estremità in un nodo cerniera C soggetto ad una forza concentrata $\mathcal{F}$. Il sistema è sog-



getto a sola forza normale e quindi occorre mettere in conto la deformabilità assiale. Escludendo il caso già trattato, labile, di due pendoli aventi la stessa direzione, il sistema è determinato dallo spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo, spostamento che diventa quindi l'unica incognita del metodo degli spostamenti.

L'equazione vettoriale di equilibrio alla traslazione del nodo richiede:

$$\sum_i \mathbf{N}_i = \mathcal{F},$$

dove $\mathbf{N}_i$ è la forza assiale trasmessa al nodo dall' i -esimo pendolo, avente la direzione dell'asse del pendolo.

Occorre allora esprimere le forze assiali $\mathbf{N}_i$ in funzione dello spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo:

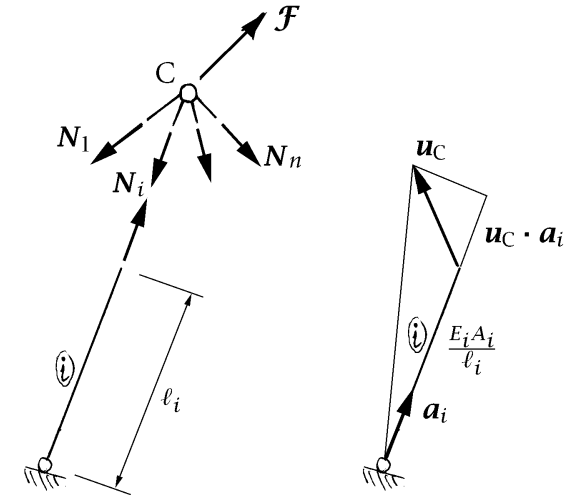
$$\mathbf{N}_i = k_i \mathbf{u}_C,$$

dove k_i è il *tensore di rigidezza assiale* dell' i -esimo pendolo. Per esplicitare tale tensore si considerino i versori $\mathbf{a}_i$ delle direzioni dei pendoli, di versi positivi uscenti dalle estremità dei pendoli, e le rigidezze assiali $k_i = \frac{E_i A_i}{\ell_i}$ dei pendoli. Risulta:

$$\mathbf{N}_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{u}_C,$$

poiché $\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i$ è l'allungamento del pendolo. Il tensore di rigidezza assiale vale dunque:

$$\mathbf{k}_i = k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$



L'equazione di equilibrio del nodo diventa quindi:

$$\sum_i \mathbf{k}_i \mathbf{u}_C = \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_C = \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F},$$

dove:

$$\mathbf{k}_C = \sum_i k_i (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i),$$

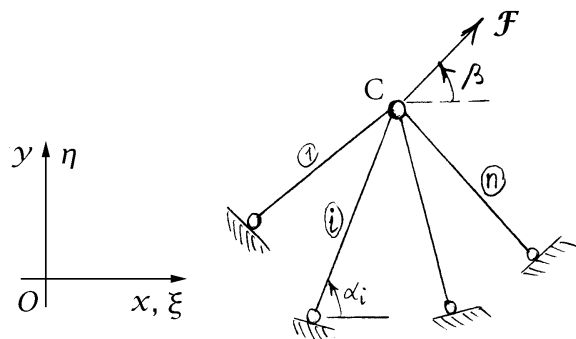
rappresenta il *tensore di rigidezza alla traslazione* del nodo C .

Gli sforzi normali N_i nei pendoli valgono quindi:

$$N_i = k_i (\mathbf{u}_C \cdot \mathbf{a}_i) = k_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{k}_C^{-1} \mathcal{F}).$$

L'analisi precedente vale in generale per i sistemi spaziali di pendoli connessi in un nodo. Nel caso di un sistema piano si assuma un sistema di riferimento piano Oxy e siano α_i e β gli angoli che individuano rispetto all'asse x l'asse dell' i -esimo pendolo e, rispettivamente, la retta d'azione della forza applicata $\mathcal{F}$. Le componenti del tensore $\mathbf{k}_C$ di rigidezza risultano allora:

$$k_{xx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_x = \sum_i k_i \cos^2 \alpha_i,$$



$$k_{yy} = \sum_i k_i \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin^2 \alpha_i,$$

$$k_{xy} = k_{yx} = \sum_i k_i \mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i) \mathbf{e}_y = \sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i.$$

Detto poi F il modulo della forza nodale $\mathcal{F}$, le componenti di questa risultano:

$$\{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} F \cos \beta \\ F \sin \beta \end{Bmatrix}.$$

Se infine ξ_C e η_C sono le componenti rispetto agli assi x e y dello spostamento $\mathbf{u}_C$ del nodo, le equazioni scalari di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale risultano rispettivamente:

$$\left(\sum_i k_i \cos^2 \alpha_i \right) \xi_C + \left(\sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \eta_C = F \cos \beta,$$

$$\left(\sum_i k_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \xi_C + \left(\sum_i k_i \sin^2 \alpha_i \right) \eta_C = F \sin \beta.$$

TELAIE E TRAVATURE RETICOLARI

Nel caso di travi ad asse rettilineo il problema flessionale e quello assiale sono disaccoppiati per cui in generale la necessità di tenere conto obbligatoriamente della deformazione dovuta alla forza normale si può presentare solo nel caso di sistemi composti esclusivamente o parzialmente da travi ad asse rettilineo. I sistemi di travi ad asse rettilineo prevalentemente inflessi sono detti *telai* mentre quelli soggetti prevalentemente a forza normale sono detti *travature reticolari*. È evidente che il ritenere che un sistema di travi ad asse rettilineo sia un telaio oppure una travatura reticolare presenta un certo grado di ambiguità legata al tipo di forze applicate. Infatti basta osservare a tale scopo che se una trave ad asse rettilineo è soggetta lungo la linea d'asse a forze di tipo flessionale non può che inflettersi.

Si ricorda che un sistema si intende prevalentemente inflesso se il contributo della forza normale al calcolo di spostamenti e rotazioni è trascurabile. Se il sistema è iperstatico la deformazione dovuta alla forza normale non interviene nella determinazione delle incognite iperstatiche. Si sottolinea il fatto che ciò che si trascura è la deformazione, non la forza normale. Nel calcolo delle tensioni che agiscono nelle sezioni rette occorre tenere conto delle forze normali.

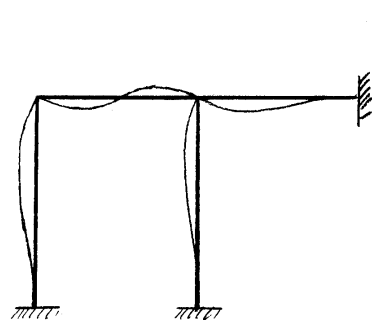
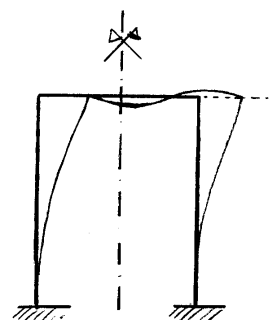
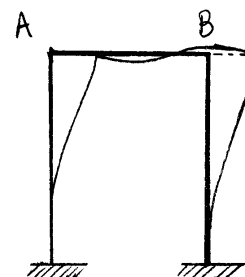
Un sistema si intende invece soggetto prevalentemente a forza normale se i carichi applicati generano una flessione nulla o comunque piccola e trascurabile nei confronti della forza normale. La flessione si intende piccola e trascurabile nei confronti della forza normale se i momenti flettenti associati alla flessione provocano delle tensioni normali trascurabili nei confronti di quelle generate dalla forza normale. Si sottolinea il fatto

che in tal caso ad essere trascurato è il momento flettente e le tensioni ad esso associate.

Se un telaio non è assialmente iperstatico, la forza normale sarà determinata via equilibrio dalla soluzione flessionale. Se invece il telaio è assialmente iperstatico, la forza normale sarà determinata nella struttura principale utilizzata per la soluzione flessionale mettendo in conto la deformabilità assiale. Utilizzare la struttura principale flessionale significa continuare a trascurare l'effetto della forza normale sulla congruenza flessionale, poiché per effetto dell'allungamento delle aste tale congruenza, precedentemente imposta, non sarà in generale più soddisfatta. Per soddisfarla occorrerebbe modificare le reazioni iperstatiche flessionali, ma di quantità che si suppone generino dei momenti trascurabili nei riguardi della forza normale.

6.1 Telai piani

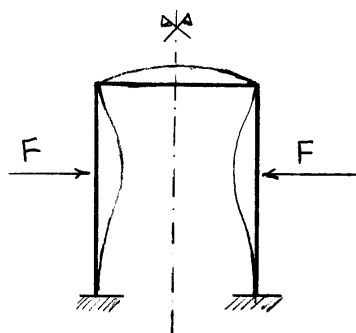
È utile distinguere i telai in *telai a nodi fissi* e in *telai a nodi spostabili*. Un telaio è detto a nodi fissi se i nodi del telaio non possono spostarsi e quindi se possono solo ruotare, altrimenti è detto a nodi spostabili. Se nel calcolo dei telai non si trascurasse l'effetto della deformabilità assiale tutti i telai, salvo poche eccezioni, sarebbero a nodi spostabili. Un telaio in generale a nodi spostabili potrebbe essere in realtà considerato a nodi fissi in casi particolari, per esempio se simmetrico e caricato simmetricamente come in

Telaio a nodi fissiTelaio a nodi spostabili

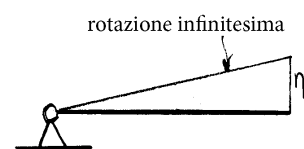
Telaio a un nodo
spostabile poiché
gli spostamenti orizzontali
dei punti A e B sono
uguali

casi lo spostamento è possibile e avviene ortogonalmente alla linea d'asse. Ne consegue che un generico campo di spostamenti flessionali del telaio

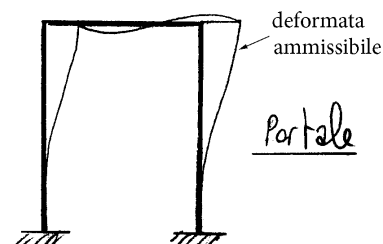
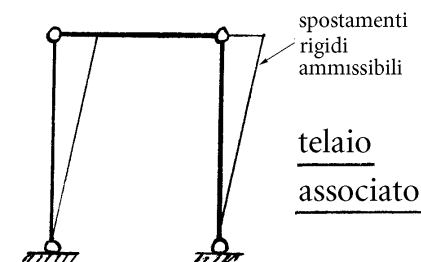
figura. In particolare un telaio è detto *a n nodi spostabili* se n è il numero



Telaio a nodi fissi
per simmetria strutturale
e di carico

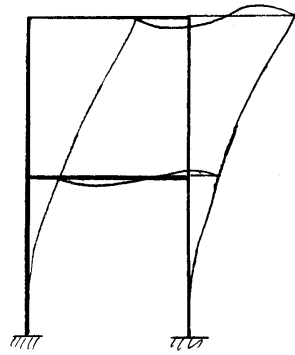


e un generico campo di spostamenti rigidi infinitesimi del telaio associato hanno qualitativamente gli stessi spostamenti di nodo. Il numero degli spostamenti indipendenti di nodo di un telaio coincide allora con il grado di labilità del telaio associato.

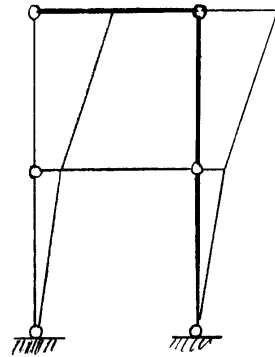
Portale

degli spostamenti di nodo indipendenti tra loro. Si noti che se non venisse trascurata la deformabilità assiale tutti gli spostamenti dei nodi sarebbero indipendenti tra loro.

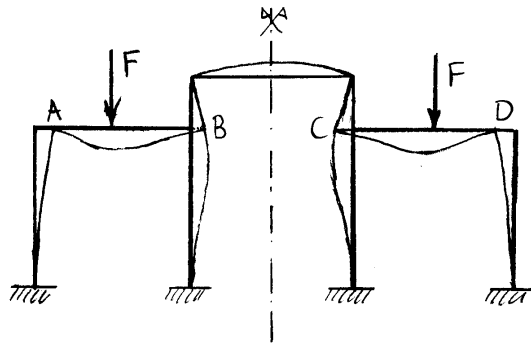
Per determinare il numero dei nodi spostabili si può fare riferimento ad un telaio associato ottenuto dallo stesso telaio inserendo cerniere in corrispondenza di tutti i nodi, comprese le sezioni di estremità vincolate esternamente. Si tenga ora conto che lo spostamento dell'estremità libera di una mensola soggetta ad un generico campo di spostamenti flessionali e di un'asta incernierata soggetta ad un generico campo di spostamenti rigidi infinitesimi sono qualitativamente gli stessi, ovvero sia in entrambi i



Telaio a due nodi spostabili

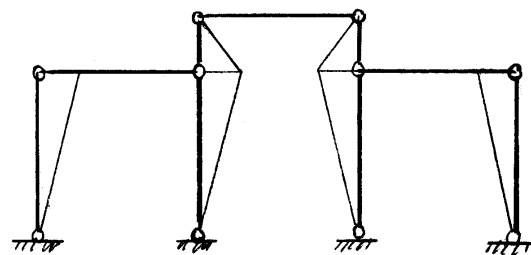


telaio associato
(due gradi di libertà)



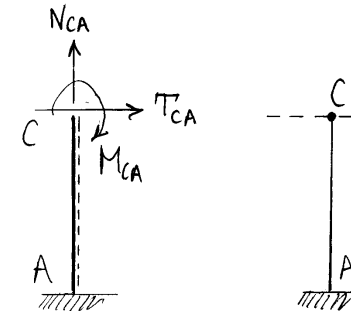
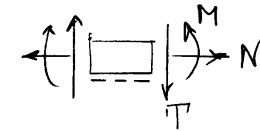
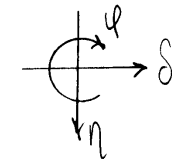
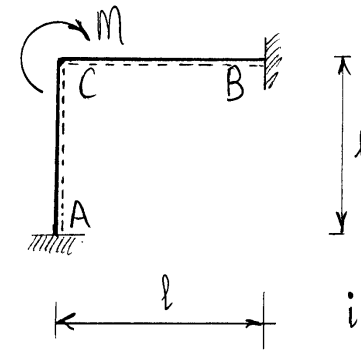
Telaio cattedrale

Telaio simmetrico simmetricamente caricato. Poiché i punti A, B, C, D si spostano della stessa quantità rappresenta un telaio a un nodo spostabile.

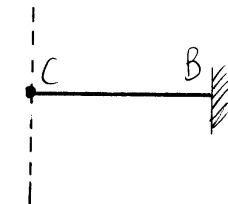
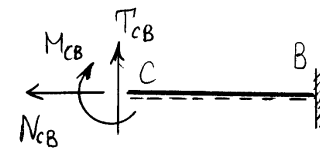


telaio associato (1 grado di libertà per spostamenti rigidi simmetrici)

6.1.1 Telaio a un solo nodo fisso soggetto ad una coppia



retta per C ortogonale all'asse AC, su cui deve trovarsi il punto C dopo la deformazione (se si trascura l'effetto dello sforzo normale)

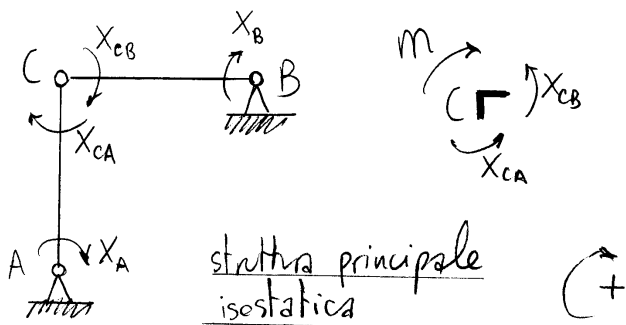


retta per C ortogonale all'asse CB, su cui deve trovarsi il punto C dopo la deformazione (se si trascura l'effetto dello sforzo normale)

Dovendo il punto C trovarsi, dopo la deformazione, contemporaneamente su due rette che hanno il solo punto C in comune, il punto C non si sposta e quindi:

$$\eta_C = \delta_C = 0.$$

Vediamo la soluzione con il metodo delle forze.



Equilibrio del nodo:

$$X_{CA} + X_{CB} = M$$

Congruenza:

$$\varphi_B = 0 \Rightarrow \frac{X_B l}{3EJ} - \frac{X_{CB} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \frac{X_A l}{3EJ} - \frac{X_{CA} l}{6EJ} = 0$$

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} \Rightarrow \frac{X_{CA} l}{3EJ} - \frac{X_A l}{6EJ} = \frac{X_{CB} l}{3EJ} - \frac{X_B l}{6EJ}$$

$$\begin{cases} X_{CA} + X_{CB} = M \\ 2X_B - X_{CB} = 0 \\ 2X_A - X_{CA} = 0 \\ X_A - X_B - 2(X_{CA} - X_{CB}) = 0 \end{cases}$$

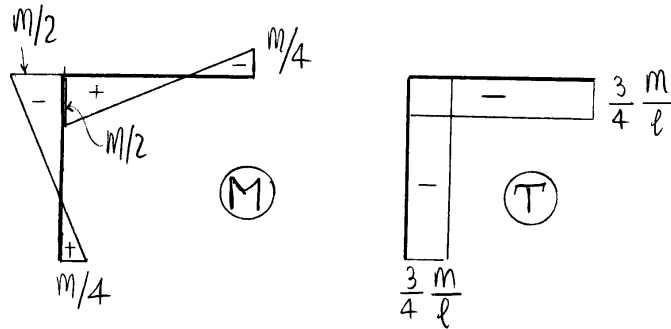
Sistema di 4 equazioni in 4 incognite. La seconda e la terza equivalgono alla soluzione di una trave incastro-appoggio soggetta ad una coppia all'estremità:

$$X_B = X_{CB}/2, \quad X_A = X_{CA}/2.$$

La quarta equazione diviene:

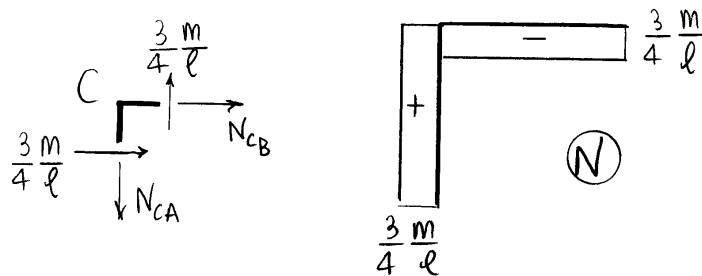
$$X_{CA} - X_{CB} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_{CA} = X_{CB} = \frac{M}{2} \\ X_A = X_B = \frac{M}{4} \end{cases}$$

$$\psi_c = \psi_{CA} = \psi_{CB} = \frac{\frac{m}{2} l}{3EJ} - \frac{\frac{m}{4} l}{6EJ} = \frac{ml}{8EJ}$$



equilibrio alla traslazione del nodo C $\Rightarrow$

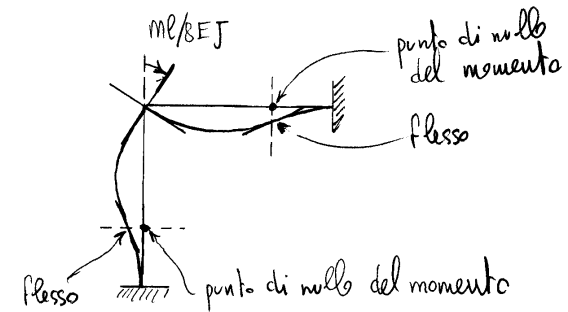
$$\begin{cases} N_{CA} = \frac{3}{4} \frac{m}{l} \\ N_{CB} = -\frac{3}{4} \frac{m}{l} \end{cases}$$



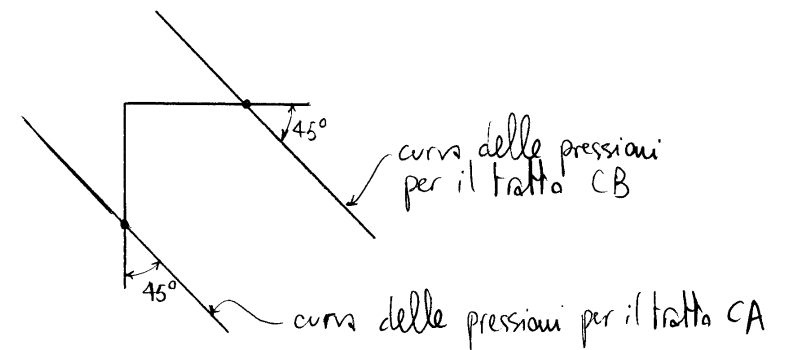
Notare che la forza normale non è nulla e che quindi è essenziale trascurare i suoi effetti sulla deformazione per poter affermare che il nodo C ruota

senza spostarsi.

Deformata:

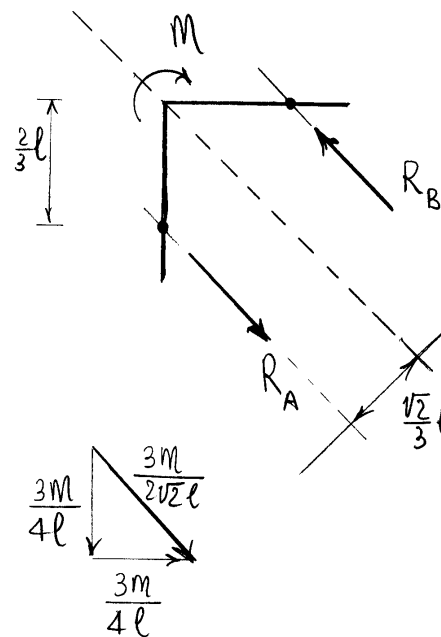


Curva delle pressioni

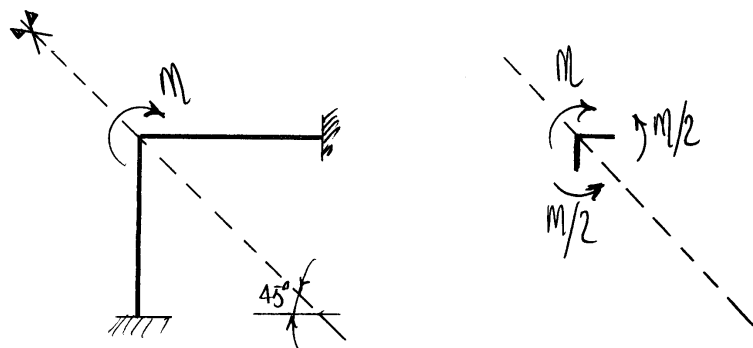


La struttura presenta un asse di simmetria geometrica e materiale e la coppia M , applicata nel nodo C , rappresenta un carico emisimmetrico

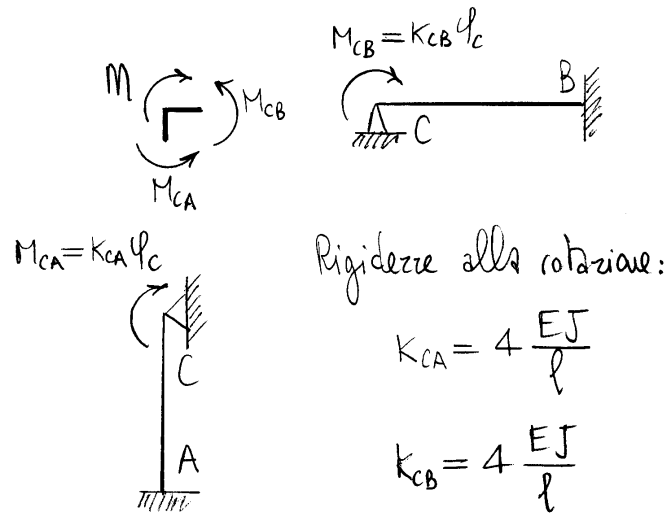
(antisimmetrico). Ciò impone che i momenti flettenti agenti a destra e a sinistra del nodo C siano emisimmetrici, cioè uguali in modulo e di verso concorde. Non solo, ciò impone anche che le rette d'azione delle risultanti degli incastri in A e in B, parallele fra loro poiché le due risultanti devono equivalere ad una coppia, siano anche parallele all'asse di simmetria. La soluzione del problema iperstatico impone che le rette d'azione delle risultanti devono passare a $2l/3$ dal nodo per cui il braccio della coppia vale $2\sqrt{2}l/3$.



$$R_A = R_B = \frac{3M}{2\sqrt{2}l}$$



Si applica ora il metodo degli spostamenti. Dato che, come detto, il punto C non si sposta, si può prendere quale unica incognita la rotazione φ_C del nodo C.



$$K_{CA} = 4 \frac{EJ}{l}$$

$$K_{CB} = 4 \frac{EJ}{l}$$

Equilibrio alla rotazione del nodo C :

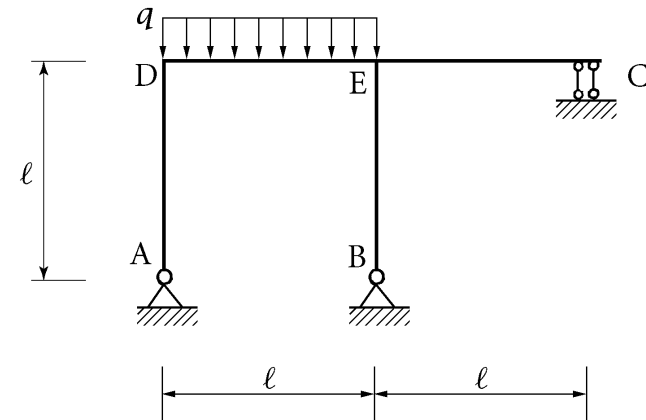
$$-M_{CA} - M_{CB} + M = 0,$$

$$K_{CA} \varphi_C + K_{CB} \varphi_C = M,$$

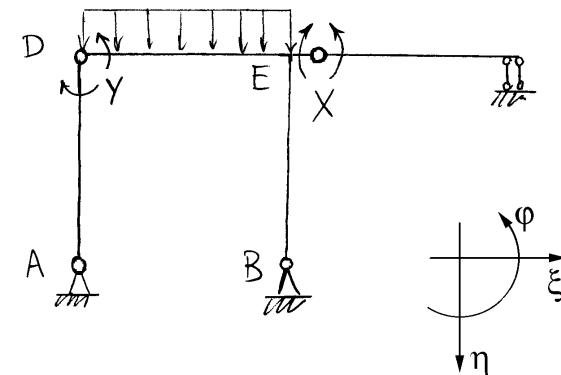
$$\varphi_C = \frac{M}{K_{CA} + K_{CB}} = \frac{Ml}{8EJ},$$

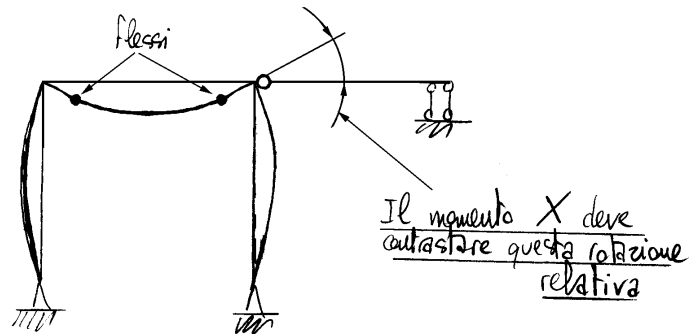
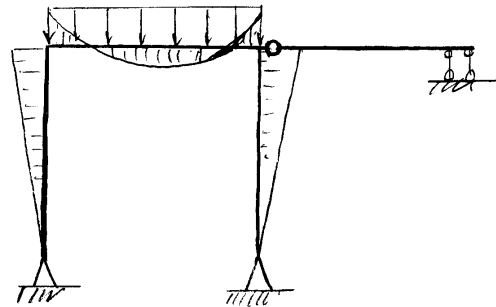
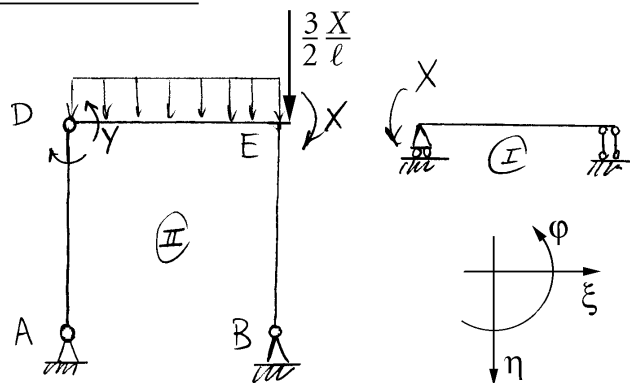
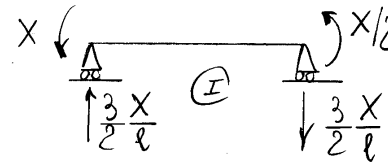
$$M_{CA} = M_{CB} = M/2.$$

6.1.2 Telaio a un nodo spostabile soggetto a un carico ripartito



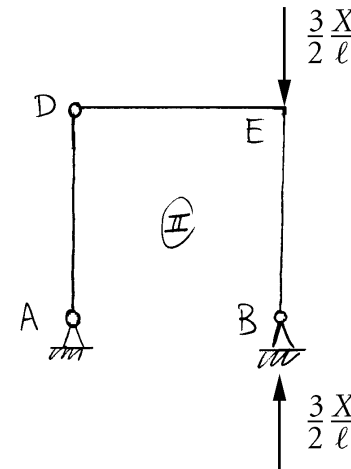
Sistema principale



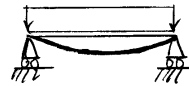
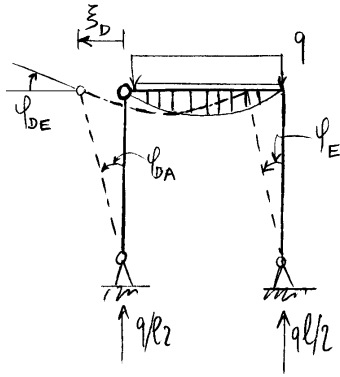
Previsione del verso della X Schema risolventeTrave incastro-appoggio (a meno di uno spostamento orizzontale)

$$\phi_E^{(I)} = \frac{Xl}{4EJ}$$

Carico $\frac{3X}{2l}$



La struttura è soggetta a sola forza normale e quindi resta indeformata.

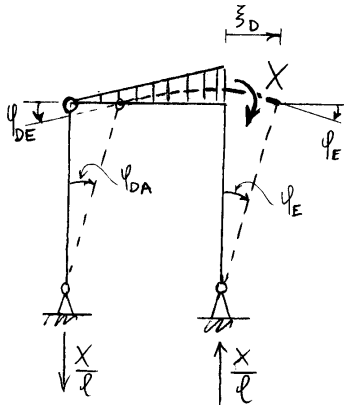
Carico q 

$$\varphi_{DE} = \frac{-ql^3}{24EI}$$

$$\varphi_{DA} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\varphi_E = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\xi_D = \frac{-ql^4}{24EI}$$

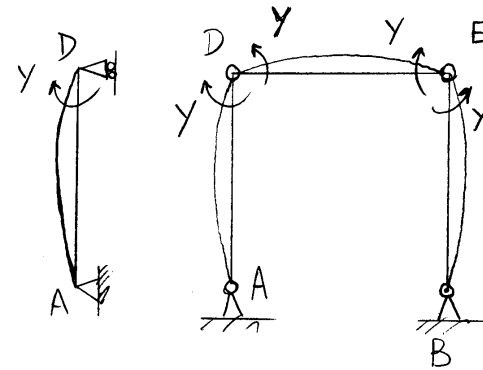
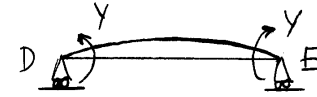
Coppia X 

$$\varphi_{DE} = \frac{Xl}{6EI}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{Xl}{3EI}$$

$$\varphi_E = -\frac{Xl}{3EI}$$

$$\xi_D = +\frac{Xl^2}{3EI}$$

Coppie Y (punti D ed E fissi)

$$\begin{cases} \varphi_{DA} = -\frac{Yl}{3EI} \\ \varphi_{DE} = \frac{Yl}{2EI} \end{cases}$$

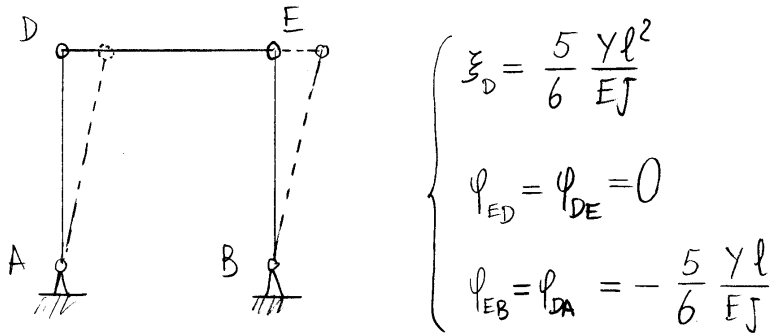
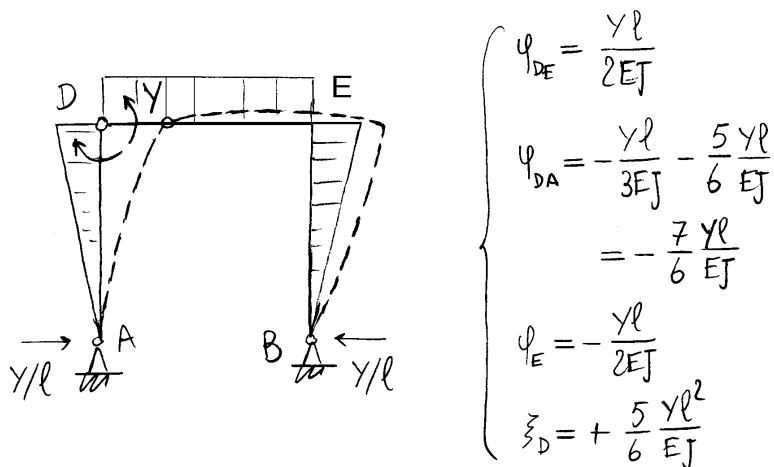
$$\begin{cases} \varphi_{EB} = \frac{Yl}{3EI} \\ \varphi_{ED} = -\frac{Yl}{2EI} \end{cases}$$

Se i nodi D ed E vengono tenuti fissi in E si ha un incremento $\Delta\varphi_E$ pari a:

$$\Delta\varphi_E = -\varphi_{EB} - \varphi_{ED} = \frac{5}{6} \frac{Yl}{EI}$$

Coppie Y (ripristino della congruenza)

Il nodo E è rigido e tale $\Delta\varphi_E$ non può realizzarsi. Per ripristinare la congruenza occorre ruotare il tratto BE di $-\Delta\varphi_E$ attorno al punto B :

Coppie Y (globale)Equazioni di congruenza

$$\varphi_E^I = \varphi_E^{II} \begin{cases} \frac{Xl}{4EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{2EJ} \\ -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{2EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} - \frac{Xl}{3EJ} - \frac{7}{6} \frac{Yl}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6X = ql^2 - 8X - 12Y \\ -ql^2 + 4X + 12Y = ql^2 - 8X - 28Y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12Y + 14X = ql^2 \\ 40Y + 12X = 2ql^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6Y + 7X = \frac{ql^2}{2} \\ 10Y + 3X = \frac{ql^2}{2} \end{cases}$$

$$-4Y + 4X = 0 \Rightarrow \boxed{X = Y = \frac{ql^2}{26}}$$

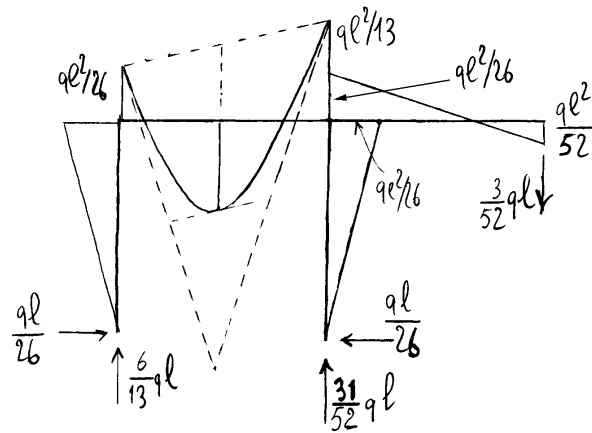
Spostamenti globali

$$\begin{aligned} \xi_D &= \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{ql^4}{3 \times 26EJ} + \frac{5ql^4}{6 \times 26EJ} = \frac{-ql^4}{24EJ} + \frac{7ql^4}{6 \times 26EJ} = \\ &= \left(-\frac{1}{24} + \frac{7}{12 \times 13} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{-13 + 14}{8 \times 12 \times 13} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^4}{312EJ} \\ \varphi_E &= \frac{ql^3}{4 \times 26EJ} \end{aligned}$$

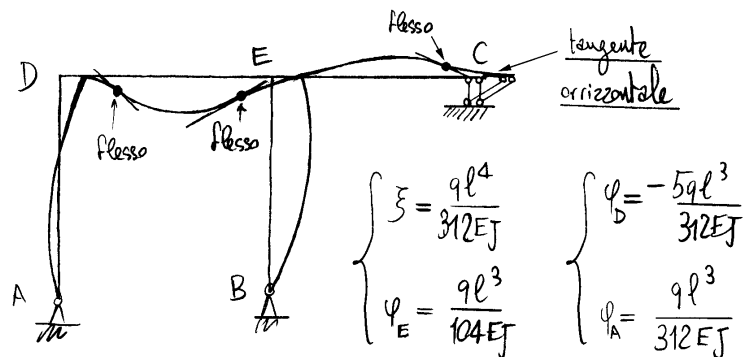
$$\varphi_D = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{6 \times 26EI} + \frac{ql^3}{2 \times 26EI} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{3 \times 13} = -\frac{5}{24 \times 13} \frac{ql^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \frac{\gamma l}{6EI} - \frac{\xi}{l} = \frac{(\frac{ql^2}{26})l}{6EI} - \frac{ql^3}{312EI} = \frac{ql^3}{312EI}$$

Diagramma del momento flettente

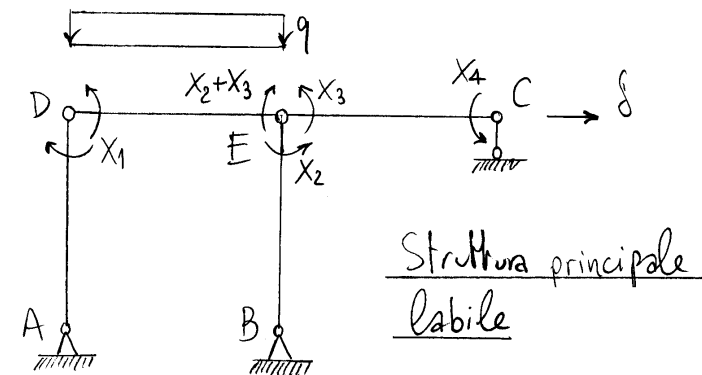
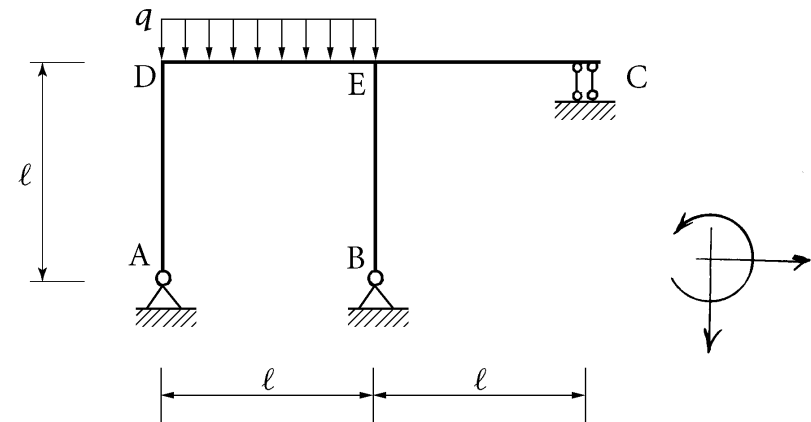


Deformata



6.1.3 Metodo dei telai a nodi spostabili

Ci si limita a illustrare il metodo sull'esempio a un nodo spostabile già risolto col metodo delle forze.



$$5 \text{ incognite} \begin{cases} 4 \text{ statiche: } X_1, X_2, X_3, X_4 \\ 1 \text{ cinematica: } \delta \end{cases}$$

$$5 \text{ equazioni} \begin{cases} 4 \text{ di congruenza: } \varphi_{DA} = \varphi_{DE}, \varphi_{ED} = \varphi_{EB} \\ \varphi_{ED} = \varphi_{EC}, \varphi_C = 0 \\ 1 \text{ di equilibrio: traslazione orizzontale} \\ \text{travata DEC} \end{cases}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{X_1 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l}$$

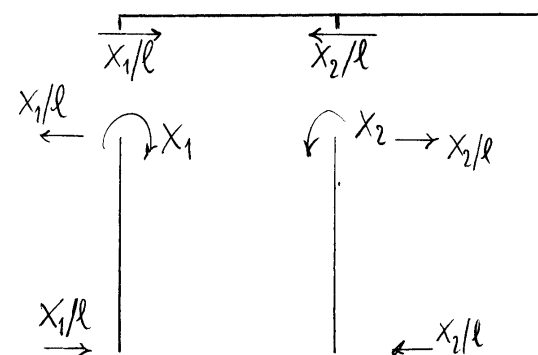
$$\varphi_{DE} = \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{(X_2 + X_3)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{ED} = -\frac{(X_2 + X_3)l}{3EJ} - \frac{X_1 l}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_{EB} = \frac{X_2 l}{3EJ} - \frac{\delta}{l}$$

$$\varphi_{EC} = \frac{X_3 l}{3EJ} - \frac{X_4 l}{6EJ}$$

$$\varphi_C = -\frac{X_3 l}{6EJ} + \frac{X_4 l}{3EJ}$$



equilibrio:

$$X_1 = X_2$$

Sistema risolvibile

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ 4X_1 + X_2 + X_3 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 4X_2 + 2X_3 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = X_2 \\ X_3 = 2X_4 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 5X_2 + 2X_4 + \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ 5X_2 + 4X_4 - \frac{6EJ}{l^2} \delta = \frac{ql^2}{4} \\ 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: 2X_4 = \frac{12EJ}{l^2} \delta \Rightarrow \delta = \frac{X_4 l^2}{6EJ}$$

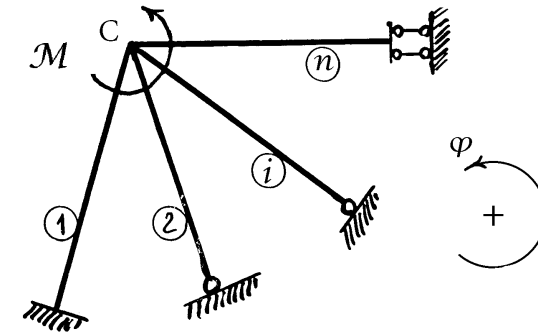
$$\textcircled{1} \begin{cases} 5X_2 + 3X_4 = \frac{ql^2}{4} \\ 3X_2 + 7X_4 = \frac{ql^2}{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 2X_2 - 4X_4 = 0 \Rightarrow X_2 = 2X_4$$

$$13X_4 = \frac{ql^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_4 = \frac{1}{52} ql^2 \\ X_1 = X_2 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_3 = \frac{1}{26} ql^2 \\ X_2 + X_3 = \frac{1}{13} ql^2 \\ \delta = \frac{1}{312} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

6.1.4 Schema fondamentale dei telai a nodi fissi

Si consideri un sistema di n travi ad asse rettilineo connesse ad una estremità in un nodo rigido C soggetto ad una coppia concentrata $\mathcal{M}$. Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura il nodo non può subire spostamenti, salvo il caso di due sole travi aventi la stessa direzione, caso che però rientra nell'analisi seguente se il nodo si suppone vincolato esternamente da un appoggio fisso. L'unico nodo della struttura può quindi solo ruotare e il metodo degli spostamenti richiede una sola incognita, la rotazione φ_C del nodo.



L'equazione di equilibrio alla rotazione del nodo richiede:

$$\sum_i M_i = \mathcal{M}.$$

Occorre allora esprimere i momenti M_i in funzione della rotazione φ_C del nodo:

$$M_i = k_i \varphi_C,$$

dove k_i è la rigidezza alla rotazione dell' i -esima trave. Si ottiene quindi:

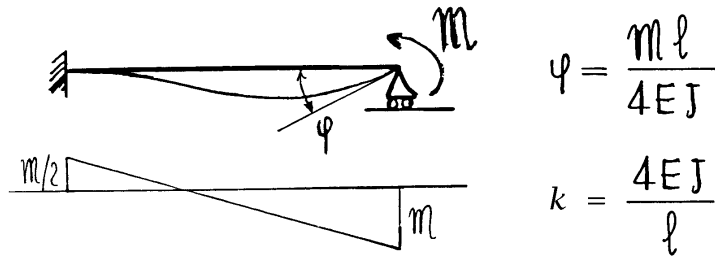
$$\sum_i k_i \varphi_C = \mathcal{M} \Rightarrow \varphi_C = \frac{\mathcal{M}}{k_C},$$

dove:

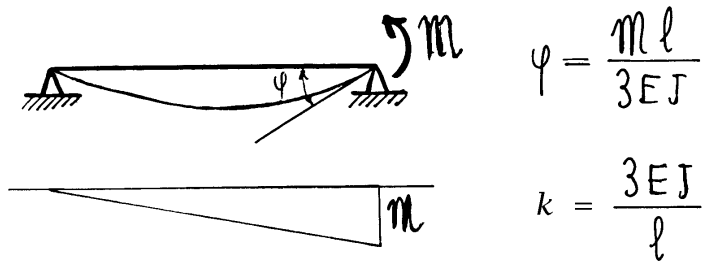
$$k_C = \sum_i k_i,$$

rappresenta la rigidezza alla rotazione del nodo C.

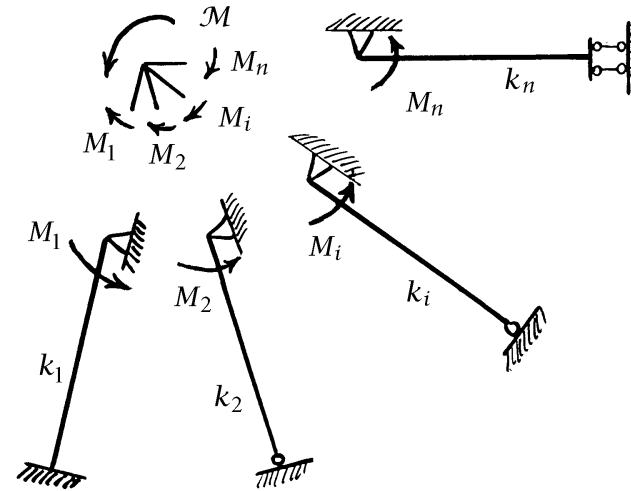
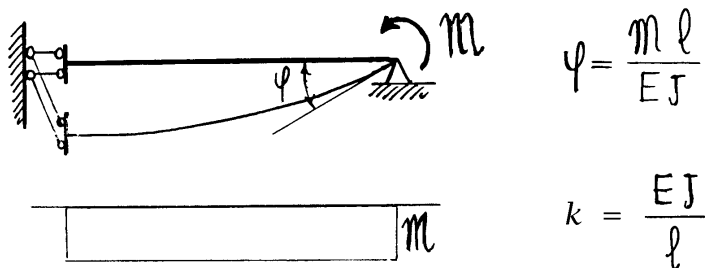
Rigidezza alla rotazione della trave incastro-appoggio:



Rigidezza alla rotazione della trave appoggio-appoggio:



Rigidezza alla rotazione della trave doppio pendolo-appoggio:



I momenti M_i che agiscono in C alla estremità delle travi valgono quindi:

$$M_i = \frac{k_i}{k_c} M,$$

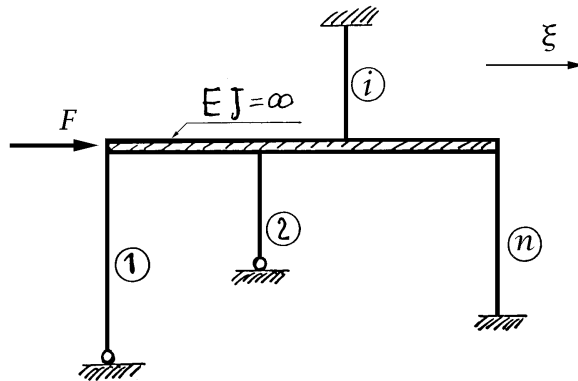
dove i rapporti $\frac{k_i}{k_c}$ tra le rigidezze delle aste e la rigidezza del nodo rappresentano i *coefficienti di ripartizione* del momento M applicato nel nodo.

6.1.5 Schema fondamentale dei telai a nodi spostabili

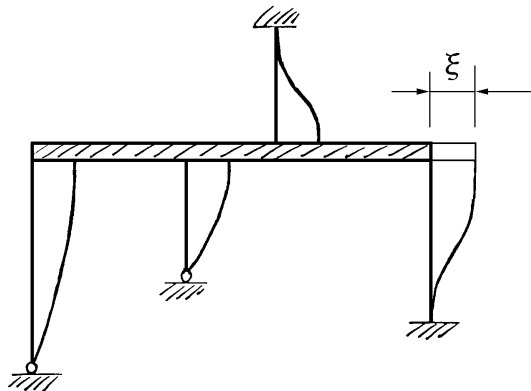
Si consideri un sistema composto:

1. di una trave ad asse rettilineo che resta indeformata flessionalmente, o perché tale deformazione è impedita da opportuni vincoli o perché infinitamente rigida, e soggetta in un suo punto ad una forza concentrata F avente la direzione della trave stessa;
2. di n travi ad asse rettilineo ortogonali alla trave precedente e connesse a questa ad una estremità.

Se si trascura la deformabilità assiale delle travi componenti la struttura, la trave indeformabile non può traslare nella direzione ortogonale alla



trave stessa e non può ruotare, salvo il caso in cui sia connessa, ad una o a due travi, in un solo punto. Tale caso particolare rientra però nell'analisi seguente se la trave indeformabile è opportunamente vincolata. La trave indeformabile può quindi solo traslare nella direzione della trave stessa e il metodo degli spostamenti richiede questa traslazione quale unica incognita.



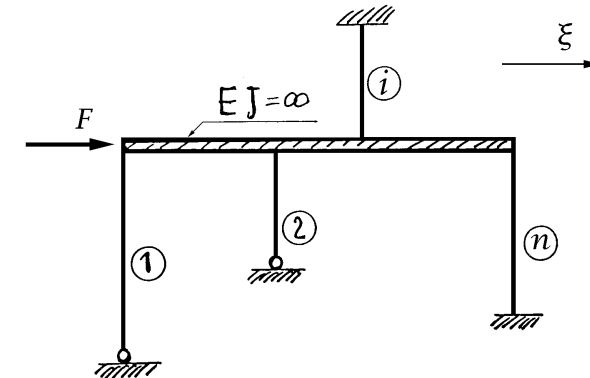
L'equazione di equilibrio alla traslazione della trave indeformabile, nella direzione della stessa trave, si scrive:

$$\sum_i T_i = F.$$

Occorre allora esprimere i tagli T_i in funzione dello spostamento ξ della trave:

$$T_i = k_i \xi,$$

dove k_i è la *rigidezza tagliante* dell' i -esima trave, ovverossia la forza che occorre applicare alla sua estremità per provocare lo spostamento unitario in direzione ortogonale al suo asse (senza che la sezione di estremità ruoti). Si ottiene quindi:



$$\sum_i k_i \xi = F \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{F}{k},$$

dove:

$$k = \sum_i k_i,$$

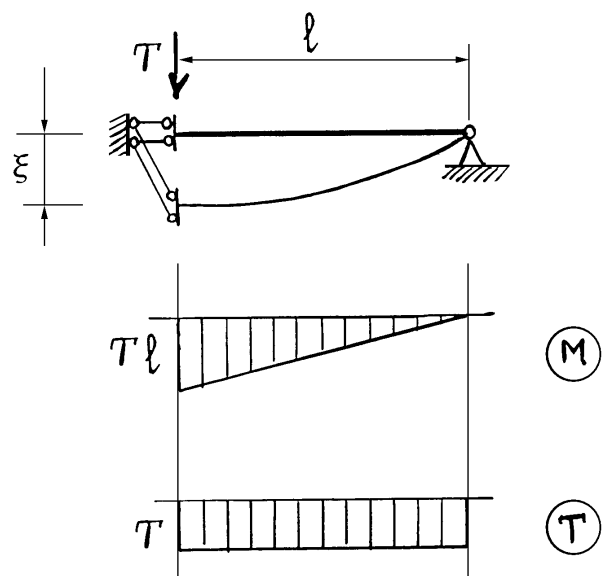
rappresenta la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile.

I tagli T_i che agiscono alle estremità delle travi valgono quindi:

$$T_i = \frac{k_i}{k} F,$$

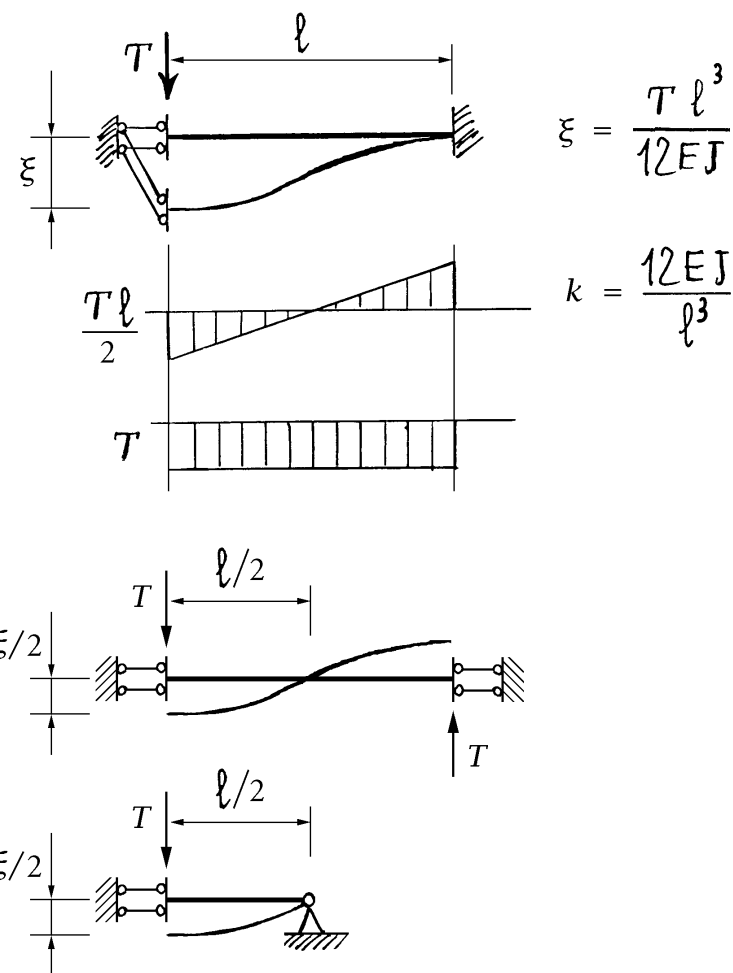
dove i rapporti $\frac{k_i}{k}$ tra le rigidezze delle travi deformabili e la rigidezza alla traslazione della trave indeformabile rappresentano i *coefficienti di ripartizione* della forza F applicata alla trave indeformabile.

Rigidezza tagliante
della trave appoggio-doppio pendolo



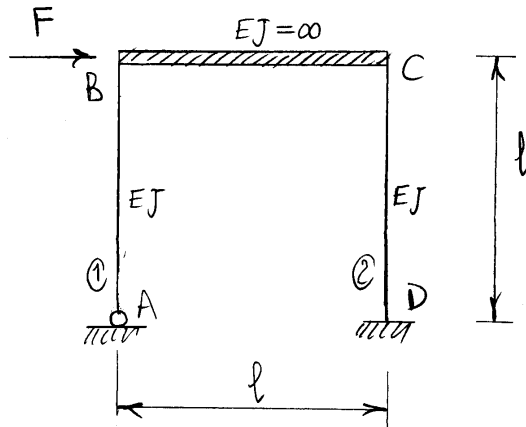
$$\xi = \frac{T l^3}{3EJ} \Rightarrow k = \frac{3EJ}{l^3}$$

Rigidezza tagliante della trave incastro-doppio pendolo



6.1.6 Telai con traversi rigidi

Portale con traverso rigido



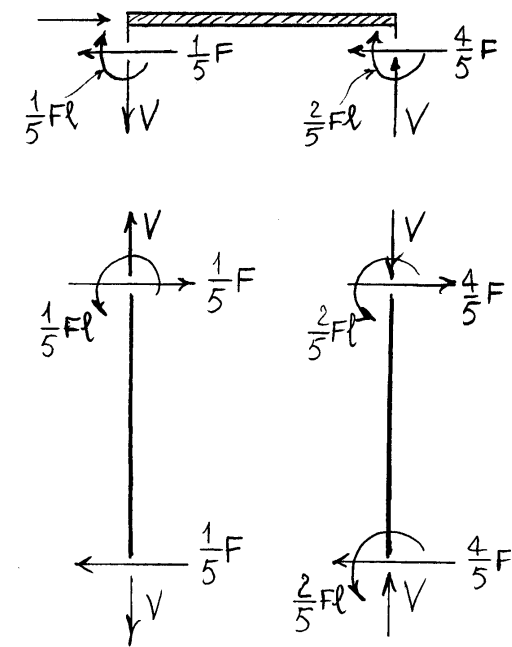
Rigidità tagliante della colonna ① : $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante della colonna ② : $k_2 = 12 \frac{EJ}{l^3}$

Rigidità tagliante globale : $k = k_1 + k_2 = 15 \frac{EJ}{l^3}$

Coefficienti di ripartizione del carico orizzontale :

$$c_1 = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

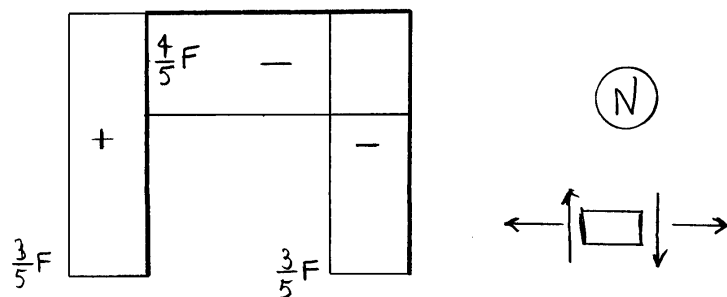
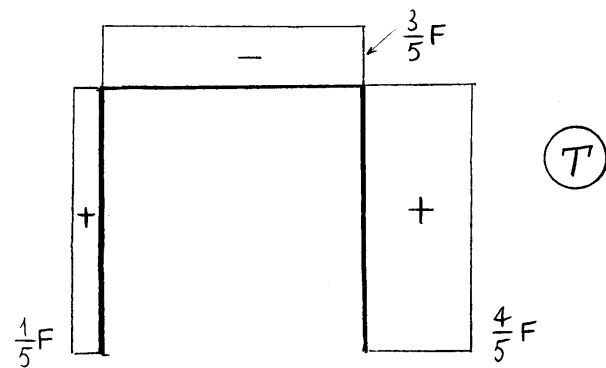
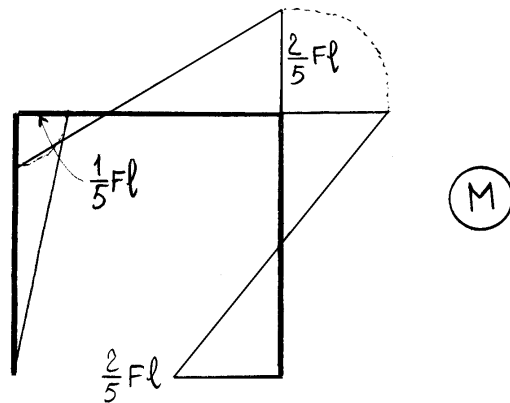


Spostamento del traverso :

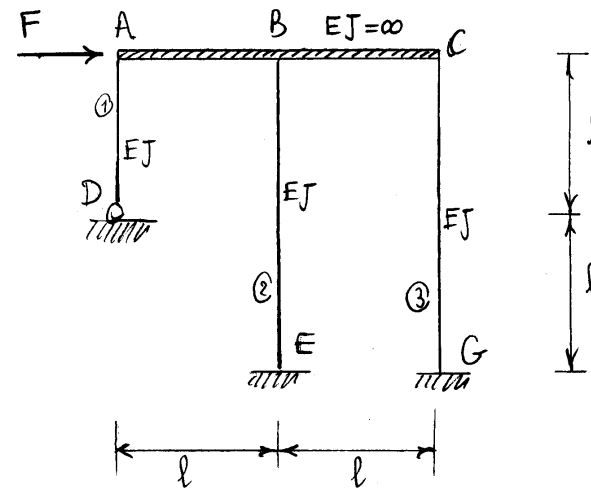
$$\xi_{BC} = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{15 EJ}$$

Equilibrio alla rotazione del traverso :

$$Vl = \frac{3}{5} Fl \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{5} F$$



Telaio con traverso rigido e tre ritti

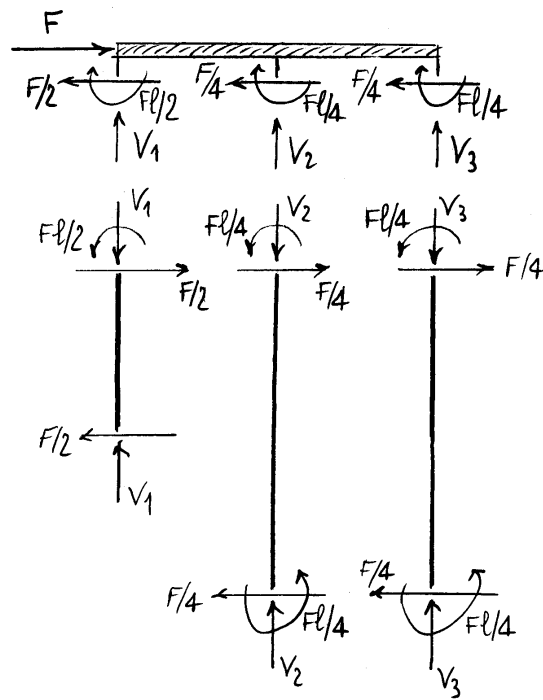


Rigidezze taglianti: $k_1 = 3 \frac{EJ}{l^3}$, $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$, $k_3 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{l^3}$.

Rigidezza globale: $k = 6 \frac{EJ}{l^3}$.

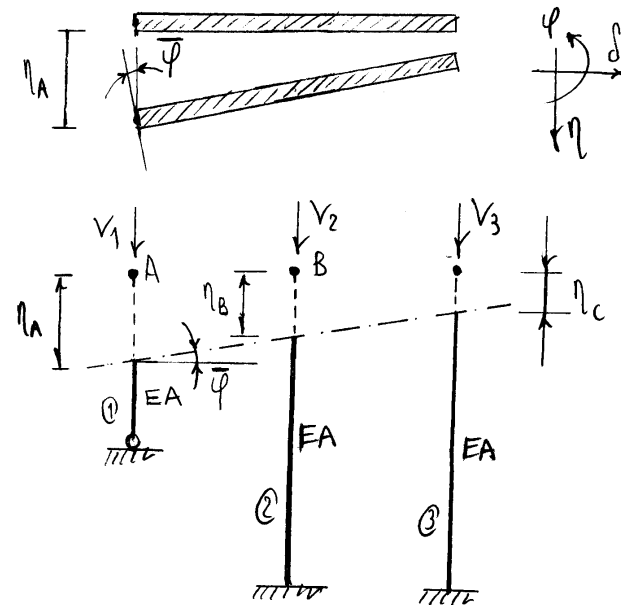
Spostamento trasverso: $\xi = \frac{F}{k} = \frac{Fl^3}{6EJ}$.

Coefficienti di ripartizione: $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{4}$.



Gli equilibri alla rotazione ed alla traslazione verticale del traverso rigido non sono sufficienti per determinare gli sforzi normali V_1, V_2, V_3 nei ritti. Per rimuovere l'indeterminazione, che è di tipo assiale, occorre rimuovere l'ipotesi di indeformabilità assiale

dei ritti. Procedendo poi via metodo delle deformazioni, si possono assumere quali incognite lo spostamento verticale η_A del punto A e la rotazione φ del traverso rigido. In funzione dei parametri η_A e φ si determinano gli sforzi normali nei ritti e si impongono poi le due equazioni di equilibrio, sufficienti a determinare le due incognite.



Spostamenti η_B e η_C in funzione di η_A e $\bar{\varphi}$:

$$\begin{cases} \eta_B = \eta_A - \bar{\varphi} l \\ \eta_C = \eta_A - 2\bar{\varphi} l \end{cases}.$$

Rigidzze assiali : $k_1 = \frac{EA}{l}$, $k_2 = \frac{EA}{2l}$, $k_3 = \frac{EA}{2l}$.

Sforzi normali (di compressione) nei ritti :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{EA}{l} \eta_A \\ V_2 = \frac{EA}{2l} \eta_B = \frac{EA}{2l} (\eta_A - \bar{\varphi} l) \\ V_3 = \frac{EA}{2l} \eta_C = \frac{EA}{2l} (\eta_A - 2\bar{\varphi} l) \end{cases}.$$

Equilibrio alla traslazione verticale del traverso :

$$V_1 + V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow 2\eta_A - \frac{3}{2}\bar{\varphi} l = 0.$$

Equilibrio alla rotazione del traverso attorno al punto C :

$$-V_1 2l - V_2 l - \frac{Fl}{2} - \frac{Fl}{4} - \frac{Fl}{4} = 0,$$

e quindi :

$$-\frac{5}{2}EA\eta_A + \frac{1}{2}EA l \bar{\varphi} - Fl = 0.$$

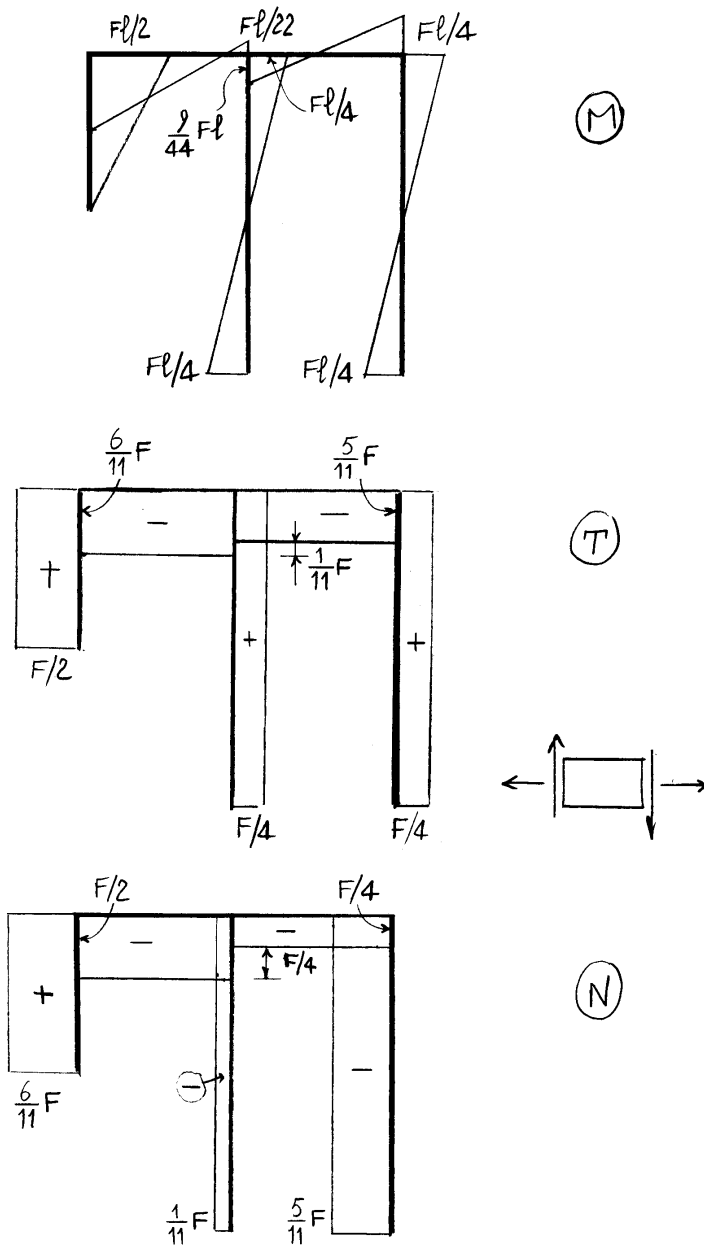
Si ottiene :

$$\begin{cases} 4\eta_A - 3l\bar{\varphi} = 0 \\ 5\eta_A - l\bar{\varphi} = -2\frac{Fl}{EA} \end{cases},$$

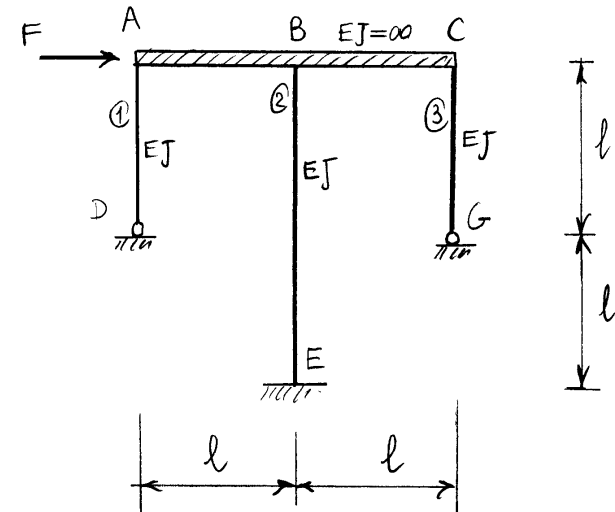
$$\begin{cases} \eta_A = -\frac{6}{11}\frac{Fl}{EA} \\ \bar{\varphi} = -\frac{8}{11}\frac{F}{EA} \end{cases},$$

e infine :

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{6}{11}F \\ V_2 = \frac{1}{11}F \\ V_3 = \frac{5}{11}F \end{cases}.$$



Telaio simmetrico con traverso rigido e tre ritti

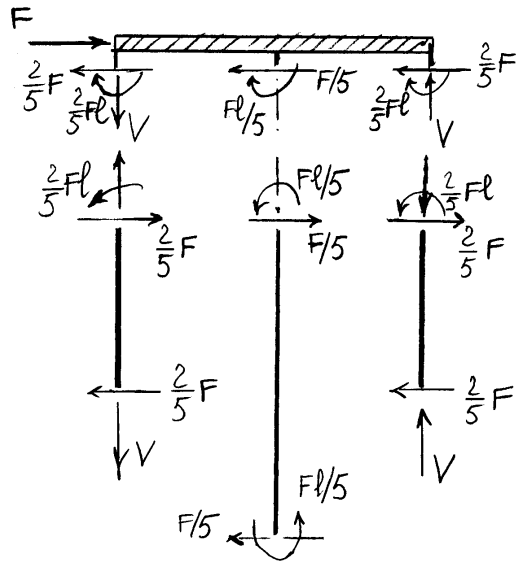


Rigidezze taglianti: $k_1 = 3 \frac{EJ}{\ell^3}$, $k_2 = \frac{3}{2} \frac{EJ}{\ell^3}$, $k_3 = 3 \frac{EJ}{\ell^3}$.

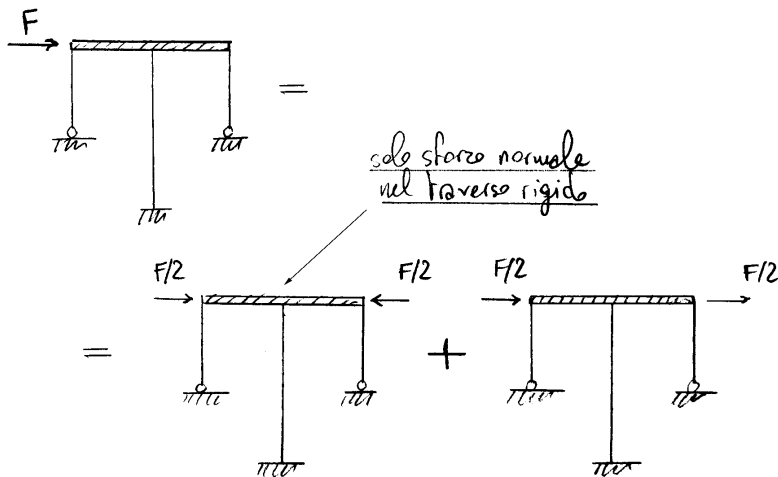
Rigidezza globale: $k = \frac{15}{2} \frac{EJ}{\ell^3}$.

Spostamento trasverso: $\xi = \frac{F}{k} = \frac{2}{15} \frac{F\ell^3}{EJ}$.

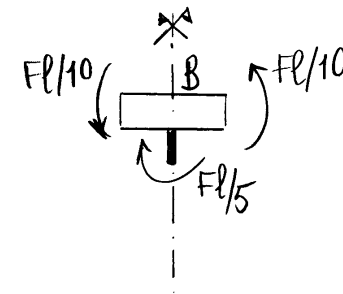
Coefficienti di ripartizione: $c_1 = \frac{2}{5}$, $c_2 = \frac{1}{5}$, $c_3 = \frac{2}{5}$.



La struttura è simmetrica e il carico può essere scisso nella somma di un carico simmetrico e di un carico antisimmetrico:

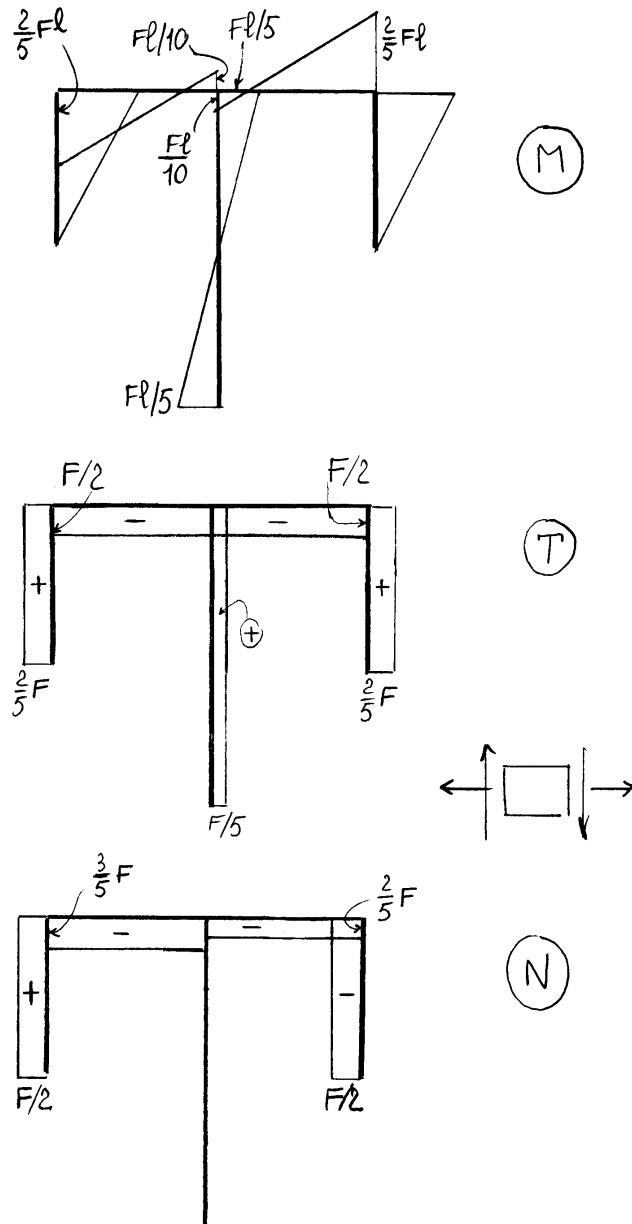


Ne consegue che in corrispondenza della sezione B posta sull'asse di simmetria il momento $Fl/5$ trasmesso dal ritto BE si scioglie in due quote emisimmetriche due pari a $Fl/10$, lo sforzo normale nel ritto BE



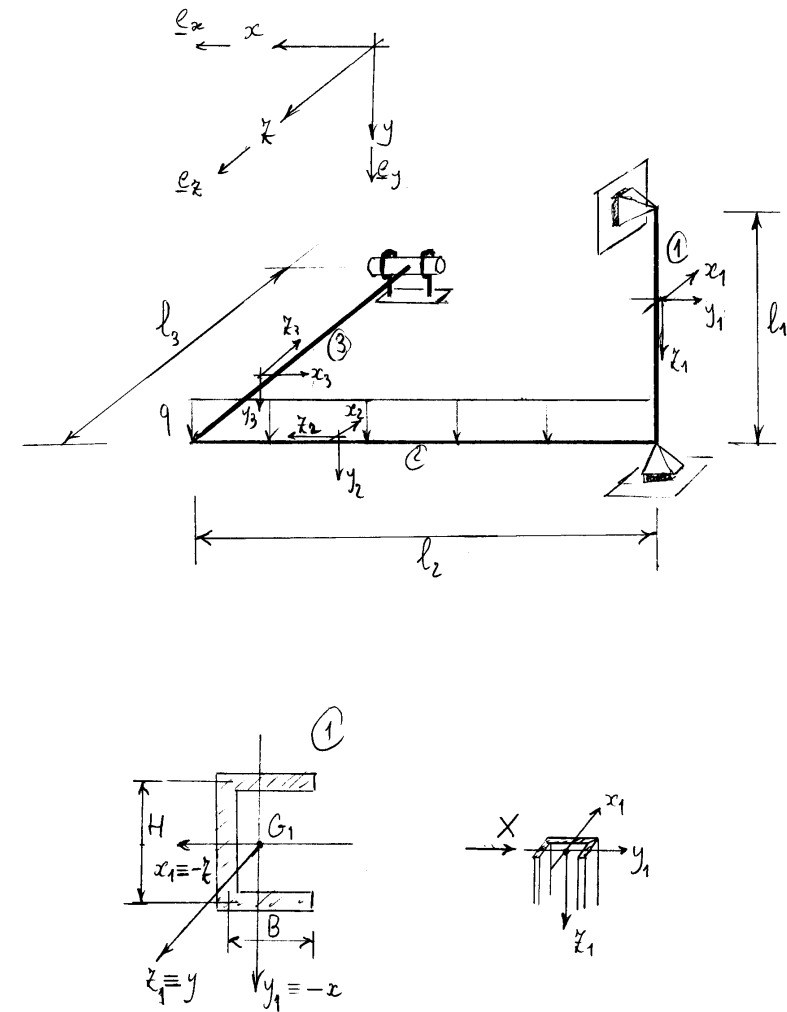
è nullo e gli sforzi normali nei ritti AD e CG sono emisimmetrici, uguali in modulo ed opposti in verso. L'equilibrio alla rotazione della trave richiede:

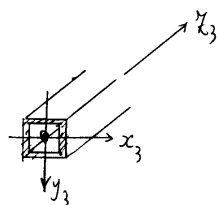
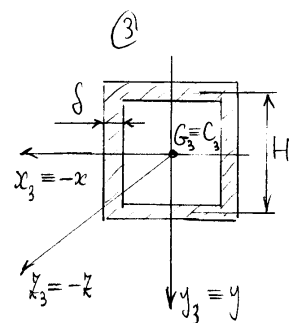
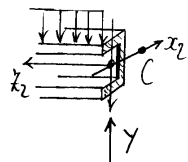
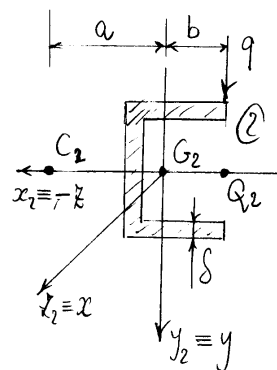
$$V = F/2.$$



6.2 Telai spaziali

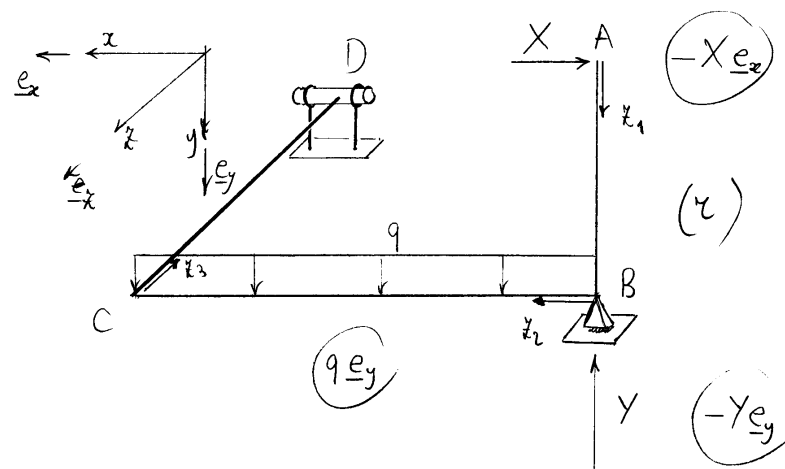
Si considera quale esempio il telaio spaziale di figura composto da tre aste, una volta iperstatico, e lo si risolve col metodo delle forze utilizzando il principio dei lavori virtuali per esplicitare l'equazione di congruenza.





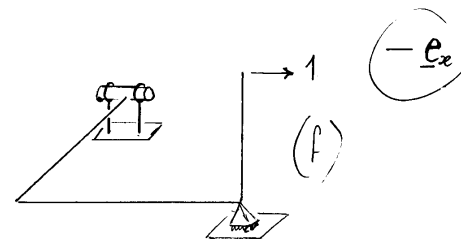
$$J_{t_3} = \frac{4\Omega^2}{\int_s \frac{ds}{\delta}}$$

$$J_{t_2} = J_{t_1} = \frac{1}{3} \int_s \delta^3 ds$$



Rotazione attorno ad x

$$Y l_2 - q l_2 (l_3 + b) = 0 \Rightarrow Y = q l_2 \left(1 + \frac{b}{l_3}\right)$$



Momenti flettenti:

Trave ①

$$M_{x_1}^{(l)}(z_1) = -z_1 \quad M_{x_1}^{(r)} = -X z_1$$

Trave (2)

$$\begin{cases} M_{x_2}^{(a)} = Y x_2 - \frac{q x_2^2}{2} \\ M_{c_2}^{(a)} = -Y a + q(a+b)x_2 \\ M_{x_2}^{(f)} = -l_1 \quad M_{x_2}^{(v)} = Y x_2 - \frac{q x_2^2}{2} - X l_1 \end{cases}$$

Trave (3)

$$\begin{cases} M_{x_3}^{(a)} = Y x_3 - q l_2 (x_3 + b) \\ M_{x_3}^{(a)} = Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} \end{cases}$$

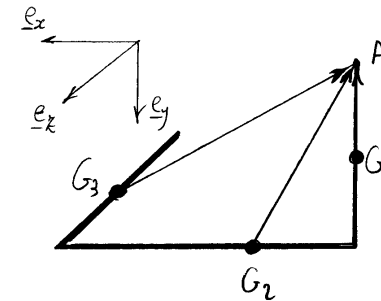
$$\begin{cases} M_{y_3}^{(f)} = x_3 \\ M_{x_3}^{(f)} = -l_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{y_3}^{(v)} = X x_3 \\ M_{x_3}^{(v)} = Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} - X l_1 \end{cases}$$

Equazione di congruenza:

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} \frac{X}{E J_{x_1}} x_1^2 dx_1 + \int_0^{l_2} \frac{-l_3}{E J_{x_2}} \left(Y x_2 - \frac{q x_2^2}{2} - X l_3 \right) dx_2 \\ + \int_0^{l_3} \frac{X}{E J_{y_3}} x_3^2 dx_3 + \int_0^{l_3} \frac{-l_3}{G J_{t_3}} \left(Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2} - X l_3 \right) dx_2 = 0 \end{aligned}$$

APPENDICE: Particolari sul calcolo dei momenti



$$A - G_1 = -x_3 e_y$$

$$A - G_2 = -x_2 e_x - l_1 e_y$$

$$A - G_3 = x_3 e_x - l_2 e_x - l_1 e_y$$

$$\underline{M}^{(F)} = -(A-G) \times (-\underline{e}_x) = (A-G) \times \underline{e}_x$$

$\underline{M}^{(F)}$ dalla parte della normale uscente positiva

Momento fittizio

Trave ① $A-G = -\xi_1 \underline{e}_y$

$$\underline{M}_1^{(R)} = -\xi_1 \underline{e}_y \times \underline{e}_x = \xi_1 \underline{e}_z = -\xi_1 \underline{e}_{x_1}$$

Trave ② $A-G = -l_1 \underline{e}_y - \xi_2 \underline{e}_x$

$$\underline{M}_2^{(F)} = -l_1 \underline{e}_y \times \underline{e}_x = l_1 \underline{e}_z = -l_1 \underline{e}_{x_2}$$

Trave ③ $A-G = \xi_3 \underline{e}_x - l_2 \underline{e}_x - l_1 \underline{e}_y$

$$\begin{aligned} \underline{M}_3^{(F)} &= \xi_3 \underline{e}_x \times \underline{e}_x - l_1 \underline{e}_y \times \underline{e}_x = \xi_3 \underline{e}_y + l_1 \underline{e}_z = \\ &= \xi_3 \underline{e}_{y_3} - l_1 \underline{e}_{z_3} \end{aligned}$$

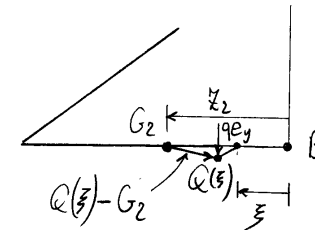
Momento dovuto ai soli carichi esterni

Trave ①

$$\underline{M}^{(0)} = 0$$

Trave ②

$$\begin{aligned} \underline{M}^{(0)} &= -(\beta - G_2) \times (-\gamma \underline{e}_y) - \int_0^{\xi_2} (\alpha - G_2) \times q \underline{e}_y d\xi \\ &= \gamma(\beta - G_2) \times \underline{e}_y - q \int_0^{\xi_2} (\alpha - G_2) \times \underline{e}_y d\xi \end{aligned}$$



$$\beta - G_2 = -\xi_2 \underline{e}_x$$

$$Q(\xi) - G_2 = (\xi - \xi_2) \underline{e}_x + b \underline{e}_z$$

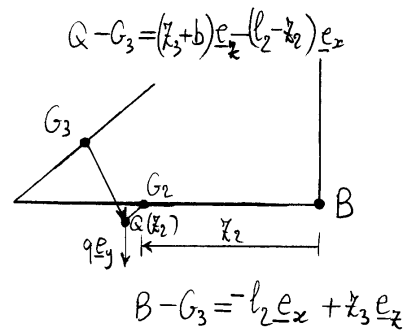
$$\begin{aligned} \underline{M}^{(0)} &= -\gamma \xi_2 \underline{e}_x - q \int_0^{\xi_2} \left\{ (\xi - \xi_2) \underline{e}_x - b \underline{e}_z \right\} d\xi \\ &= \gamma \xi_2 \underline{e}_{x_2} - q \frac{\xi_2^2}{2} \underline{e}_{x_2} + q b \xi_2 \underline{e}_{z_2} \end{aligned}$$

$$\underline{T}_2^{(0)} = (\gamma - q \xi_2) \underline{e}_{y_2}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{M}_{C_2}^{(0)} &= \underline{M}_{x_2}^{(0)} + \underline{e}_{z_2} \cdot (G_2 - C_2) \times \underline{T}_2^{(0)} = \\
 &= q b z_2 + (Y - q z_2) a \underline{e}_{x_2} \cdot (-\underline{e}_{x_2}) \times \underline{e}_{y_2} = \\
 &= -Y a + q(b+a) z_2
 \end{aligned}$$

Trave (3)

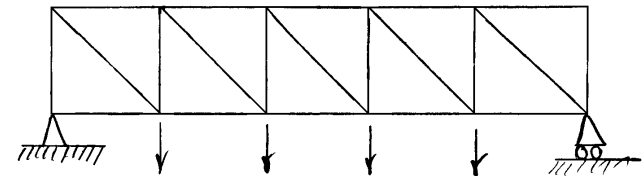
$$\begin{aligned}
 \underline{M}^{(0)} &= -(B - G_3) \times (-Y \underline{e}_y) - \int_0^{l_2} (Q - G_3) \times q \underline{e}_y dz_2 = \\
 &= Y(B - G_3) \times \underline{e}_y - q \int_0^{l_2} (Q - G_3) \times \underline{e}_y dz_2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \underline{M}^{(0)} &= -Y l_2 \underline{e}_z - Y z_3 \underline{e}_x + q l_2 (z_3 + b) \underline{e}_x + q \frac{l_2^2}{2} \underline{e}_z \\
 &= \{Y z_3 - q l_2 (z_3 + b)\} \underline{e}_{x_3} + \left(Y l_2 - q \frac{l_2^2}{2}\right) \underline{e}_{z_3}
 \end{aligned}$$

6.3 Travature reticolari

Le travature reticolari sono sistemi di travi soggette prevalentemente a forze di tipo assiale, nelle quali non è quindi trascurabile la deformabilità assiale delle singole travi. Le travi che compaiono nelle strutture reticolari vengono tradizionalmente denominate "aste". Tali aste sono collegate tra di loro alle estremità tramite nodi cerniera oppure nodi incastro.

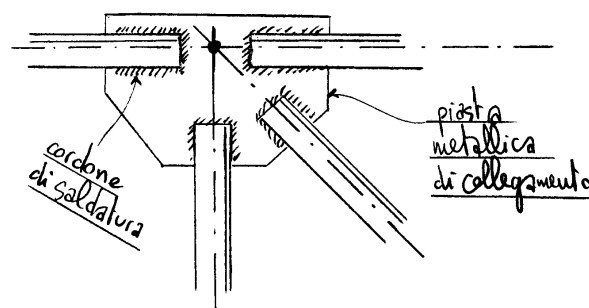


Se le aste sono incernierate (articolate) nei nodi e se le forze esterne agiscono solo nei

nodi, l'unica sollecitazione presente è quella di forza normale. Se vi sono forze esterne agenti lungo le aste, queste risultano anche inflesse. Se però le forze prevalenti sono quelle applicate nei nodi, prevalgono le forze normali sulle azioni flettenti. Per esempio, il peso proprio delle aste componenti le strutture reticolari producono normalmente dei momenti flettenti trascurabili rispetto all'entità delle forze normali. Inoltre, delle azioni flettenti, se importanti, si può tenere conto in un secondo momento sovrapponendo gli effetti.

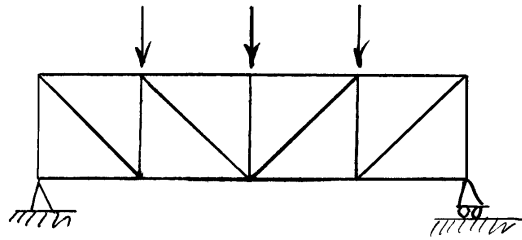
Se le aste sono collegate tra loro da nodi rigidi, tramite i nodi vengono trasmessi dei momenti flettenti. Tuttavia, se il numero delle aste non

è inferiore a quello necessario ad avere un sistema non labile nel caso le aste fossero articolate nei nodi tali azioni flettenti sono trascurabili. Una travatura reticolare con nodi rigidi può quindi essere risolta come se le aste fossero articolate nei nodi.

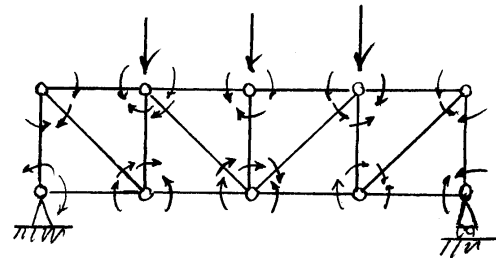


tipico nodo incastrato

In effetti, in tal caso, il problema iperstatico potrebbe risolversi considerando le aste articolate nei nodi. Per ripristinare la congruenza occorre che le rotazioni

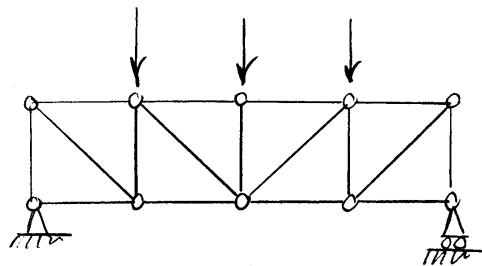


travatura
reticolare
a nodi rigidi



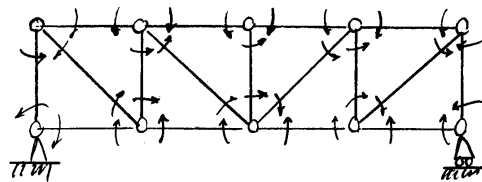
sistema
principale

||



solo forze
normali

+



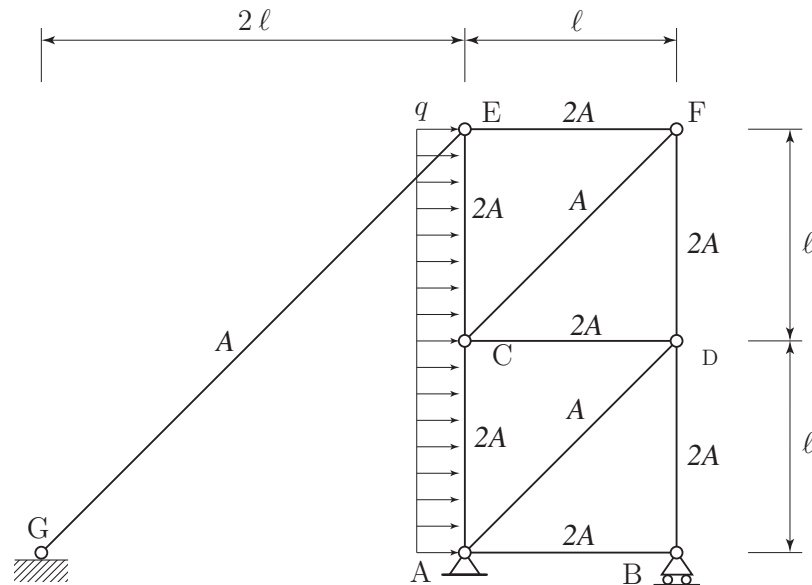
si devono originare
le stesse rotazioni
relative che si
originano nel sistema
soggetto ai soli carichi
esterni

relative dovute ai carichi esterni (applicati solo nei nodi e che quindi originano solo forze normali) uguagliano quelle dovute alle incognite iperstatiche.

Poiché le rotazioni dovute all'effetto delle forze normali sono "piccole" rispetto a quelle dovute all'effetto dei momenti flettenti, la congruenza sarà rispettata in corrispondenza a "piccoli" valori delle incognite iperstatiche, gli effetti delle quali sono quindi normalmente trascurabili.

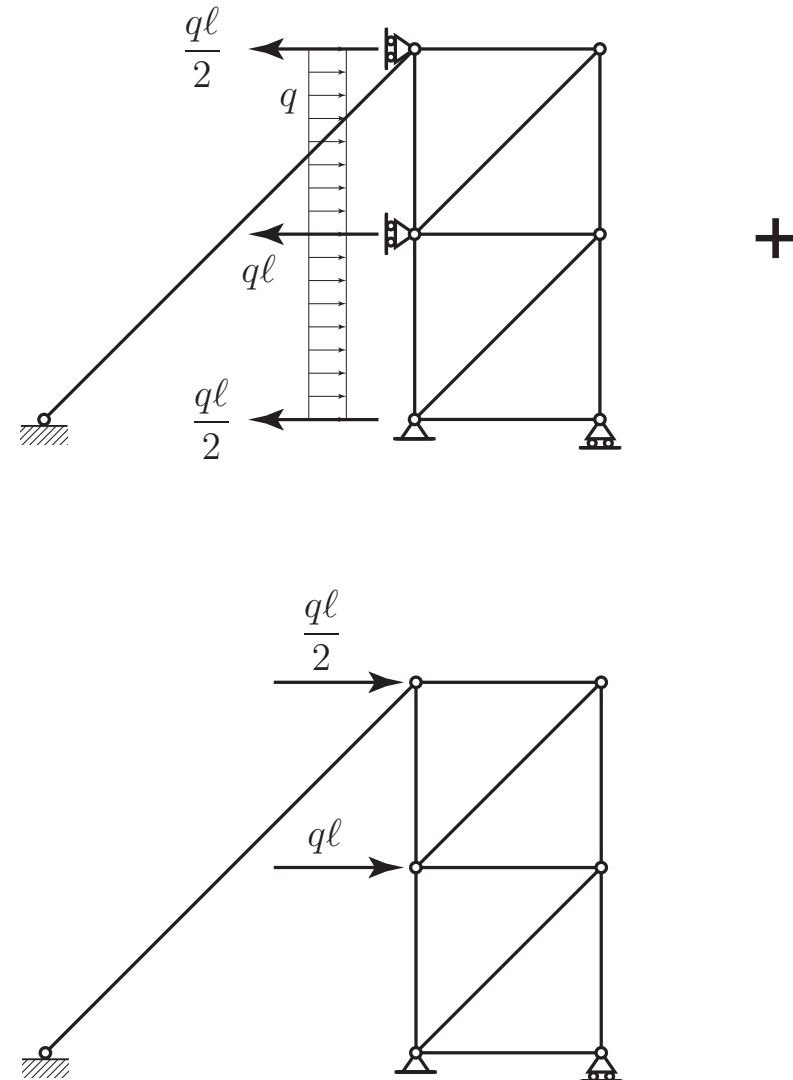
6.3.1 Travatura reticolare tirantata iperstatica

La struttura reticolare a nodi cerniera di figura essendo triangolata è isostatica internamente. Esternamente è vincolata da un appoggio fisso in A, un carrello in B e un pendolo (il tirante) in E. In tutto quattro vincoli semplici. Non essendo labile risulta quindi una volta iperstatica.

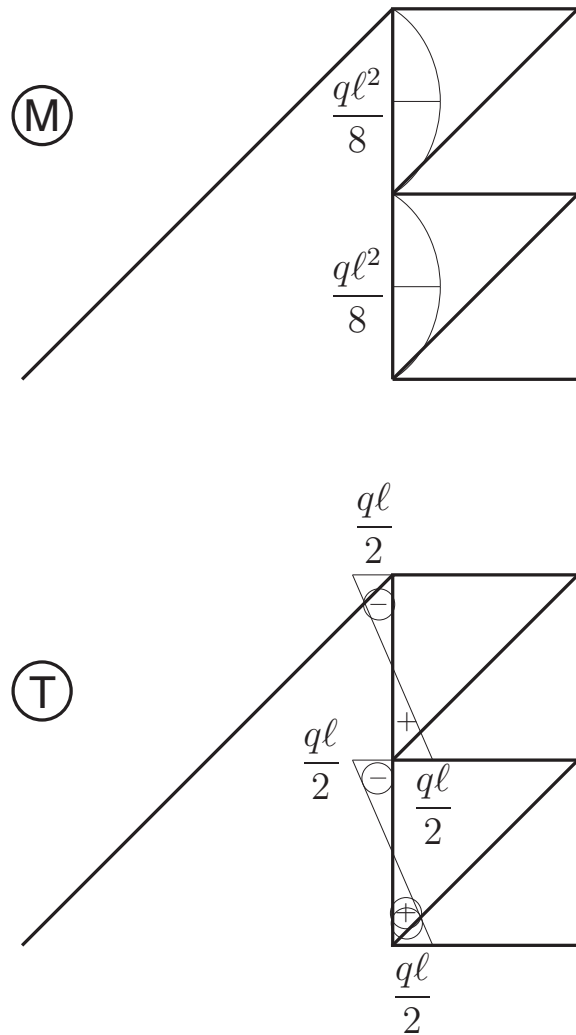


Essendo soggetta nel montante ACE ad un carico distribuito flessionale alcune aste del sistema risultano inflesse. Si separano gli effetti flessionali da quelli assiali bloccando lo spostamento orizzontale dei nodi C ed E tramite dei *vincoli ausiliari*. Si risolve innanzitutto lo schema con i nodi bloccati e soggetto al carico esterno, schema nel quale le forze normali nelle aste sono nulle. In tale schema si valutano le reazioni dei vincoli ausiliari. Si risolve poi, con il metodo delle forze, uno schema in cui si applicano in C ed E le reazioni dei vincoli ausiliari cambiate di segno, in modo tale da ottenere la soluzione globale per sovrapposizione degli effetti. In quest'ultimo schema, caricato solo nei nodi, le aste sono soggette a sola forza normale.

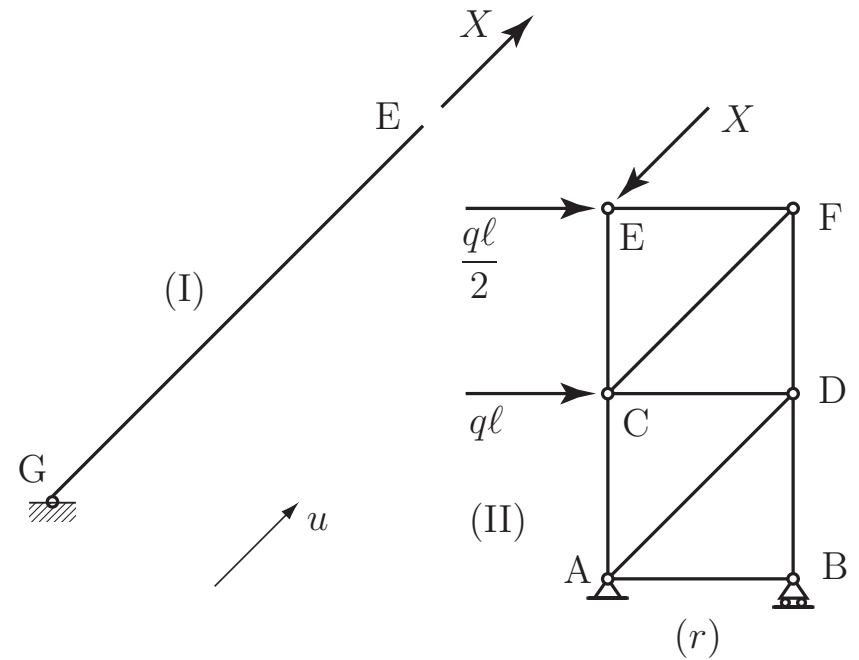
Sovrapposizione degli effetti



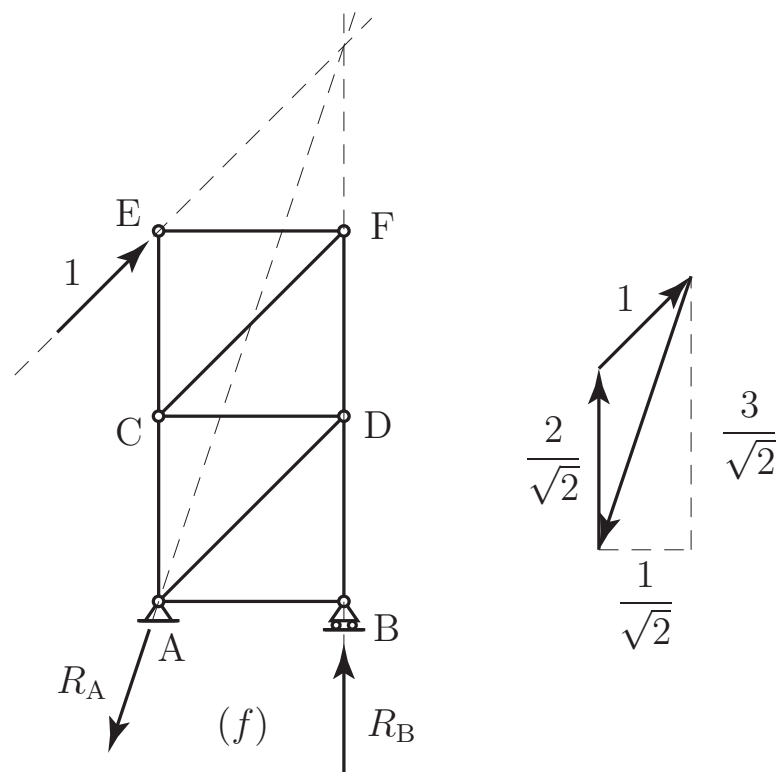
Soluzione flessionale



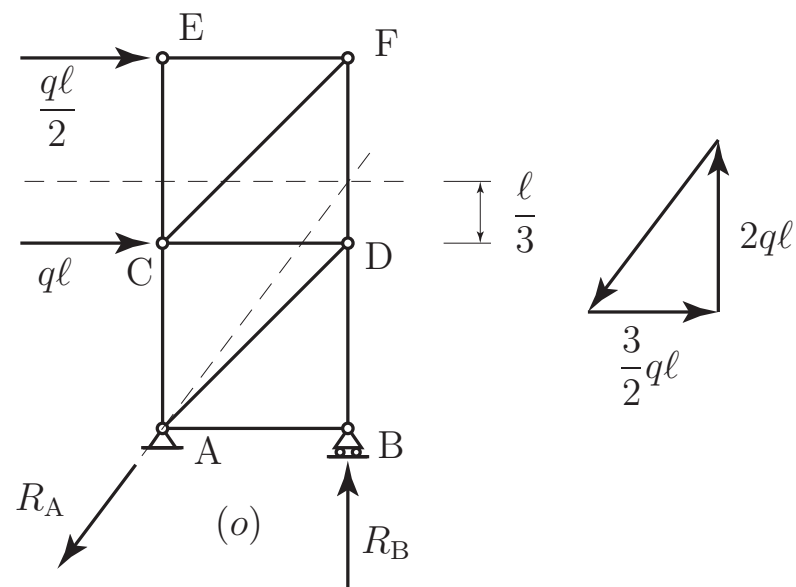
Soluzione assiale



Struttura principale



Struttura fittizia



Schema principale soggetto ai soli carichi esterni

$$u_E^{(II)} = \frac{2\sqrt{2}\ell}{EA}X$$

$$L_{vi} = \int_{\ell} N^{(f)} \frac{N^{(r)}}{EA} ds = \sum_i N_i^{(f)} \frac{N_i^{(r)}}{E_i A_i} \ell_i$$

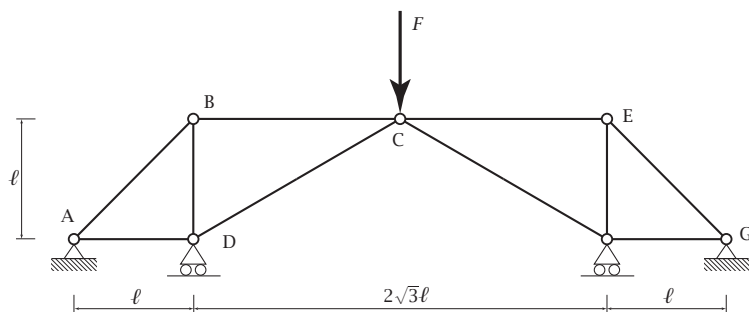
$$N_i^{(r)} = N_i^{(o)} - XN_i^{(r)}$$

$$X = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{15 + 16\sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} q\ell = 0.7684q\ell$$

asta	luce	area	$N^{(f)}$	$N^{(o)}$	$N^{(r)}$	$N^{(r)} _{X=0.77q\ell}$	tipo asta
AC	ℓ	$2A$	$2/\sqrt{2}$	$q\ell/2$	$-2X/\sqrt{2} + q\ell/2$	$-0.59q\ell$	puntone
CE	ℓ	$2A$	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	$-0.54q\ell$	puntone
BD	ℓ	$2A$	$-2/\sqrt{2}$	$-2q\ell$	$2X/\sqrt{2} - 2q\ell$	$-0.91q\ell$	puntone
DF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AB	ℓ	$2A$	0	0	0	0	=
CD	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-3q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - 3q\ell/2$	$-0.96q\ell$	puntone
EF	ℓ	$2A$	$-1/\sqrt{2}$	$-q\ell/2$	$X/\sqrt{2} - q\ell/2$	$-0.04q\ell$	puntone
AD	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$3q\ell/\sqrt{2}$	$-X + 3q\ell/\sqrt{2}$	$1.35q\ell$	tirante
CF	$\sqrt{2}\ell$	A	1	$q\ell/\sqrt{2}$	$-X + q\ell/\sqrt{2}$	$-0.06q\ell$	puntone

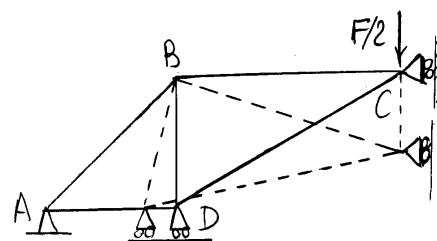
6.3.2 Arco reticolare a tre cerniere

La struttura reticolare iperstatica sotto illustrata viene risolta utilizzando il metodo delle forze, scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali e supponendo che tutte le aste abbiano area uguale. Viene inoltre compilata una tabella riassuntiva che riporta lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone; Vengono poi calcolati con il metodo cinematico gli spostamenti dei punti B e C, viene disegnata la deformata elastica della struttura e viene calcolata l'energia elastica di deformazione.



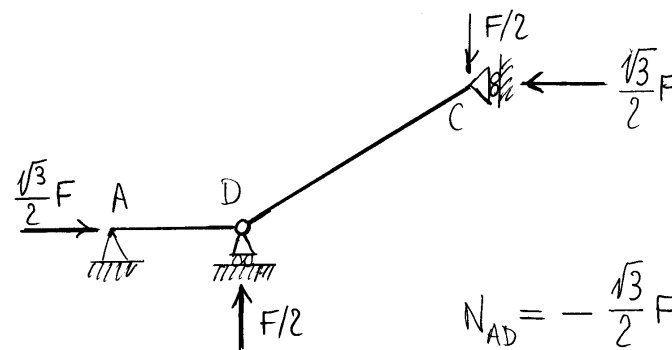
Soluzione di confronto

Risulta possibile deformare le aste AD e CD senza deformare le restanti aste soddisfacendo le condizioni imposte dai vincoli.



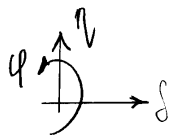
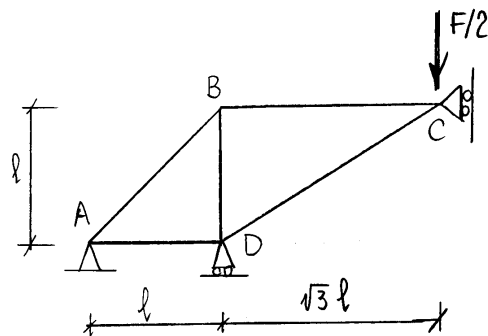
Dato che il nodo B non è caricato risulta quindi

possibile assorbire il carico $F/2$ tramite le aste AD e CD soddisfacendo la congruenza e ottenendo così la soluzione del sistema iperstatico.

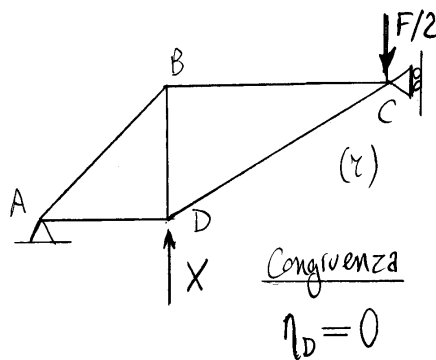


$$N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

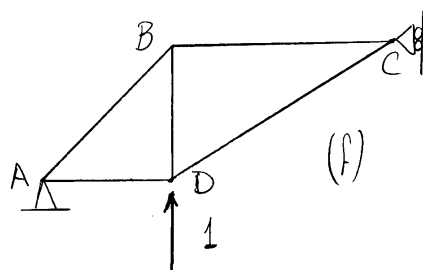
$$N_{CD} = -F$$

Soluzione col metodo delle forze

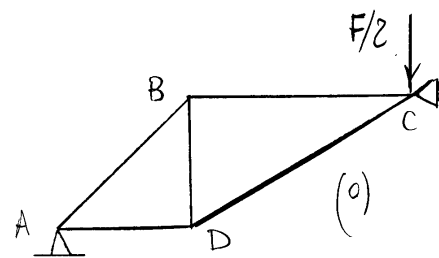
Struttura equivalente
per simmetria



Struttura principale
(schema degli
spostamenti - deformazioni
congruenti)

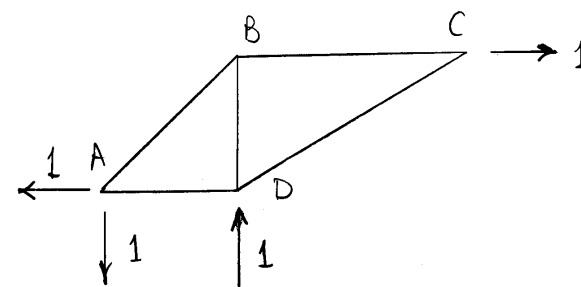


schema delle
forze - caratteristiche della
sollecitazione equilibrate
(per il calcolo di η_D
nella struttura principale)



Struttura principale
sovrapposta alle sole forze
esterne

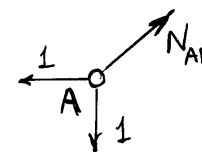
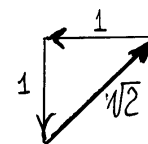
Schema (f)



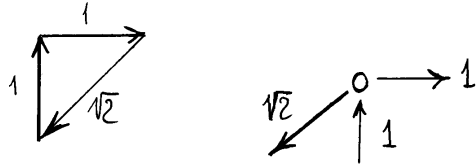
Equilibrio nodo C $\Rightarrow$ Asta CD scarica, $N_{BC} = 1$

Equilibrio nodo D $\Rightarrow$ Asta AD scarica, $N_{BD} = -1$

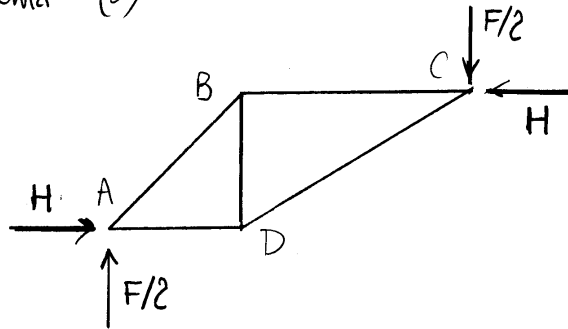
Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = \sqrt{2}$



Equilibrio nodo B (per controllo)

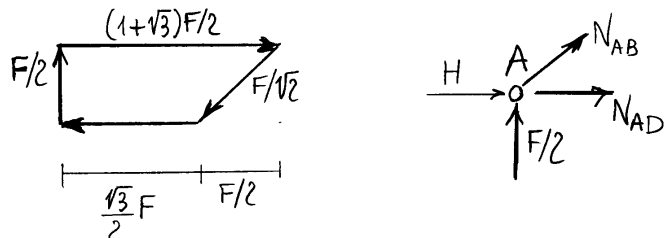


Schema (o)



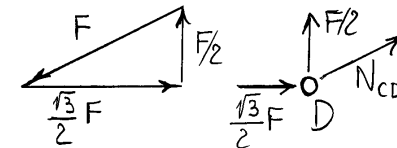
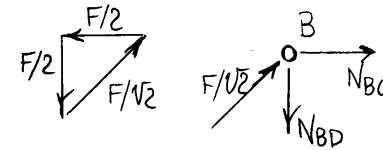
$$Hl = \frac{F}{2}(1+\sqrt{3})l \Rightarrow H = \frac{1+\sqrt{3}}{2}F$$

Equilibrio nodo A $\Rightarrow N_{AB} = -F/\sqrt{2}$, $N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{2}F$



Equilibri nodi B e D

$$N_{BC} = -\frac{F}{2}, \quad N_{BD} = \frac{F}{2}, \quad N_{CD} = -F$$



Equilibrio nodo C (per controllo)

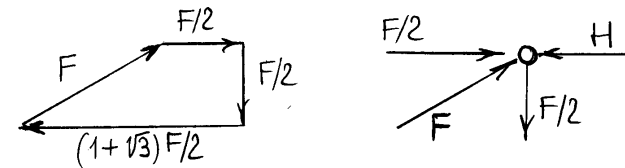


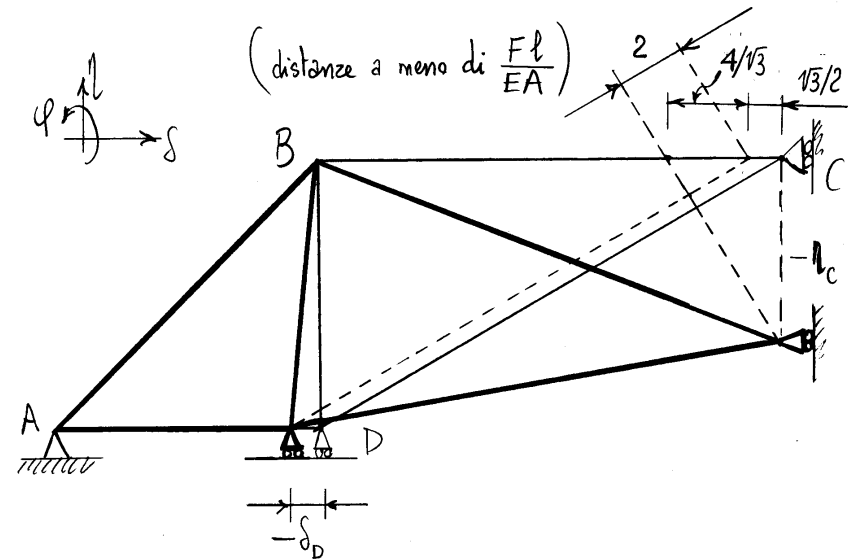
Tabella riassuntiva

					$X = F/2$	
Asta	l_i	$N^{(F)}$	$N^{(0)}$	$N^{(r)}$	Tipo	N (in modulo)
AB	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}$	$-\frac{F}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}}$	Scarica	0
AD	l	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}F$	Puntone	$\frac{\sqrt{3}}{2}F$
BD	l	-1	$\frac{F}{2}$	$-X + \frac{F}{2}$	Scarica	0
BC	$\sqrt{3}l$	1	$-\frac{F}{2}$	$X - \frac{F}{2}$	Scarica	0
CD	$2l$	0	$-F$	$-F$	Puntone	F

Principio dei lavori virtuali:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \eta_D &= \sum_{\text{Aste } i} N_i^{(F)} \frac{N_i^{(r)} l_i}{EA} \\
 &= \frac{l}{EA} \left\{ \sqrt{2} \left(\sqrt{2}X - \frac{F}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} - 1 \left(-X + \frac{F}{2} \right) + 1 \left(X - \frac{F}{2} \right) \sqrt{3} \right\} \\
 &= (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) \frac{l}{EA} \left(X - \frac{F}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\eta_D = 0 \Rightarrow X = \frac{F}{2}$$



$$-\delta_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$-\eta_C = \sqrt{3} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \frac{Fl}{EA} \Rightarrow \eta_C = \frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_B = \eta_B = 0$$

Lavoro di deformazione (su tutta la struttura)

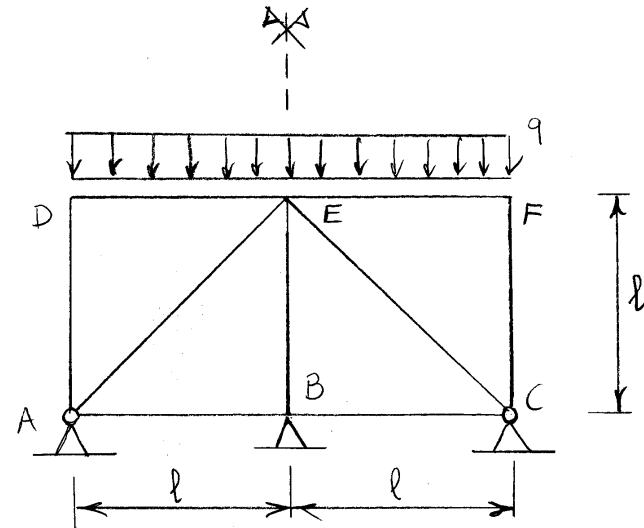
$$L_d = \frac{1}{2} \sum_{\text{aste}} \frac{N_i^2 l_i}{EA} = \frac{l}{EA} \left\{ \frac{3}{4} F^2 + 2 F^2 \right\} = \frac{11}{4} \frac{F^2 l}{EA}$$

Verifica con il teorema di Clapeyron

$$L_d = -\frac{1}{2} F \eta_c = \frac{11}{4} \frac{F^2 l}{EA}$$

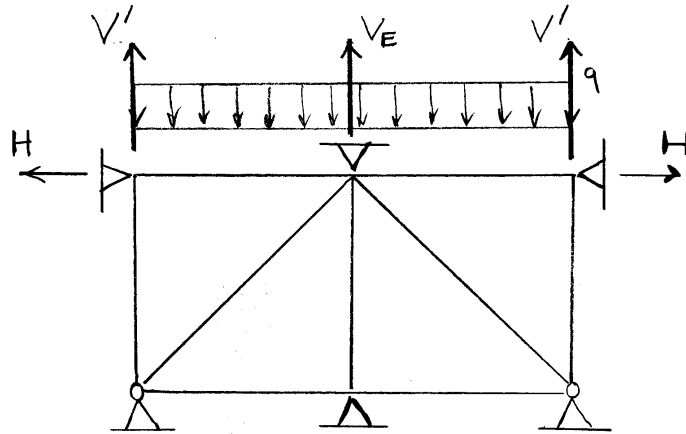
6.3.3 Travatura reticolare a nodi rigidi

La struttura reticolare di figura, con due nodi cerniera e quattro nodi rigidi, essendo triangolata sarebbe isostatica internamente se tutti i suoi nodi fossero cerniere. Esternamente è vincolata da tre appoggi fissi in A, B e C. Quindi lo schema con tutti nodi cerniera è tre volte iperstatico esternamente.

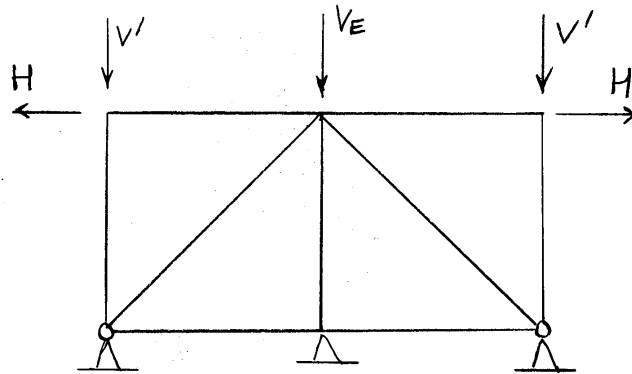


Essendo soggetta nel montante DEF ad un carico distribuito flessionale alcune delle aste sono soggette a dei momenti flettenti che non sono trascurabili. Tenuto conto che per simmetria il nodo E può solo spostarsi verticalmente, si separano gli effetti flessionali da quelli assiali bloccando gli spostamenti orizzontali dei nodi D ed F e gli spostamenti verticali dei nodi D, E ed F tramite dei *vincoli ausiliari*. Si risolve innanzitutto lo schema flessionale con i nodi bloccati e soggetto al carico esterno, schema nel quale le forze normali nelle aste sono nulle. In tale schema si valutano le reazioni dei vincoli ausiliari.

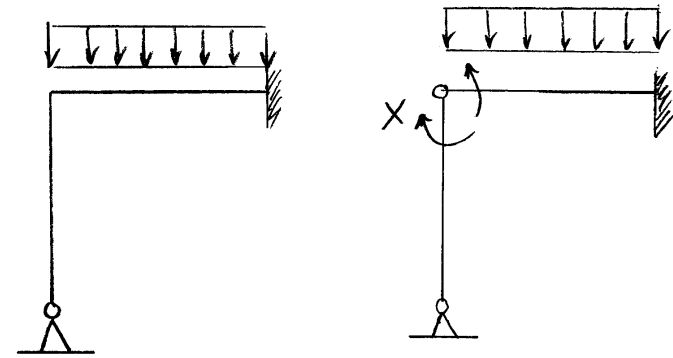
Si risolve poi lo schema assiale con applicate in D, E ed F le reazioni dei vincoli ausiliari cambiate di segno, in modo tale da ottenere la soluzione globale per sovrapposizione degli effetti. Tale schema lo si risolve in modo



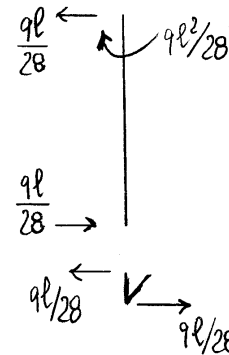
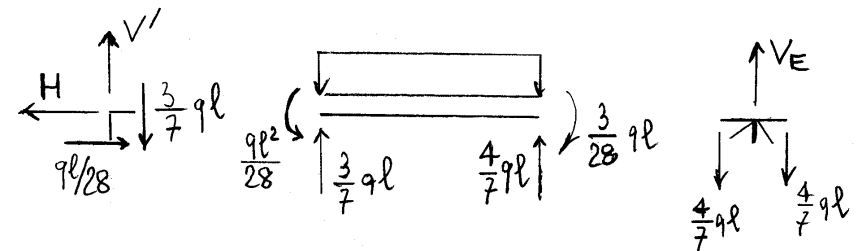
approssimato sostituendo tutti i nodi rigidi con dei nodi cerniera. Dato che lo schema è caricato solo nei nodi, le aste sono soggette a sola forza normale. Viene così trascurata la flessione dovuta alla presenza dei nodi rigidi, flessione che comunque modificherebbe anche le forze normali nelle aste, che quindi nello schema con tutti i nodi cerniera sono valutate in modo approssimato.



Soluzione flessionale



$$\frac{Xl}{4EJ} - \frac{ql^3}{48EJ} = -\frac{Xl}{3EJ} \Rightarrow X = \frac{ql^2}{28}$$

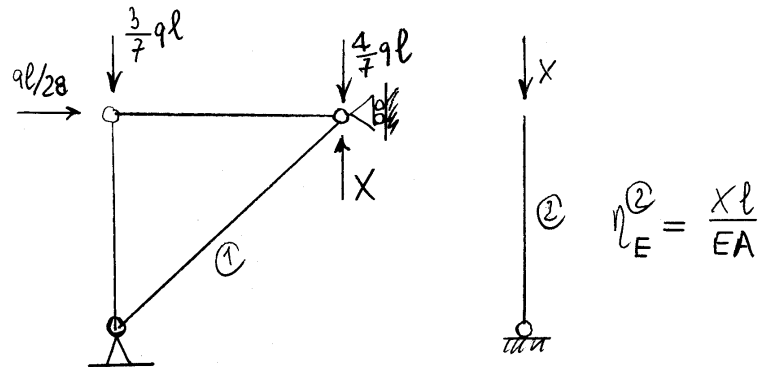
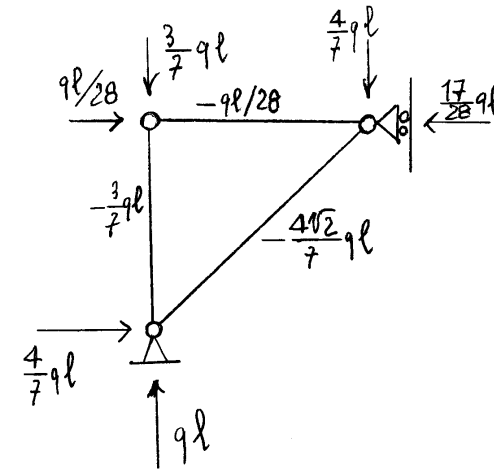
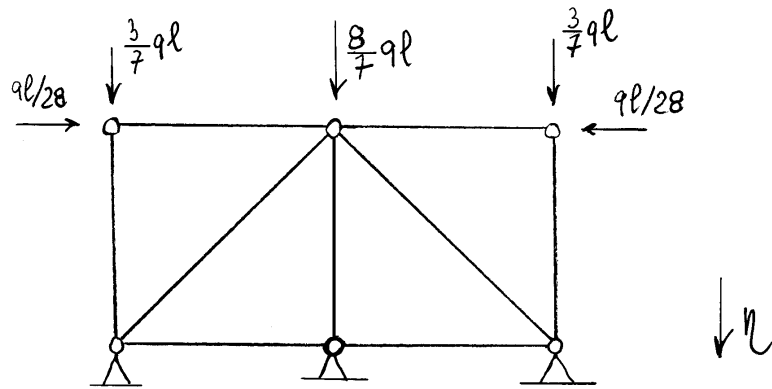


$$V' = \frac{3}{7} ql$$

$$H = \frac{1}{28} ql$$

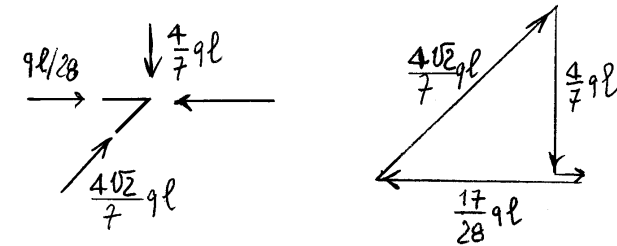
$$V_E = \frac{8}{7} ql$$

Soluzione assiale

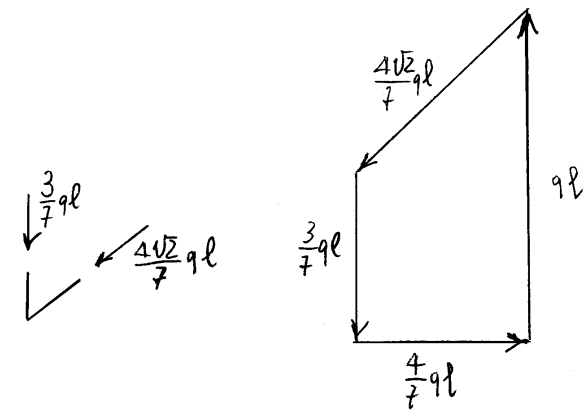


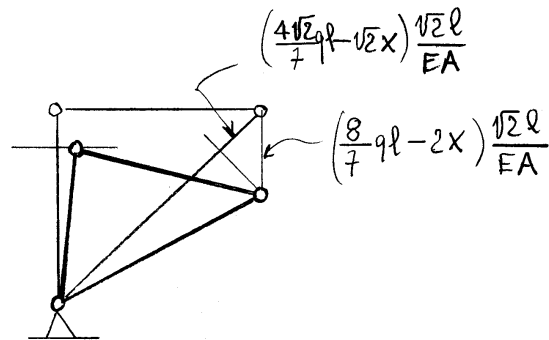
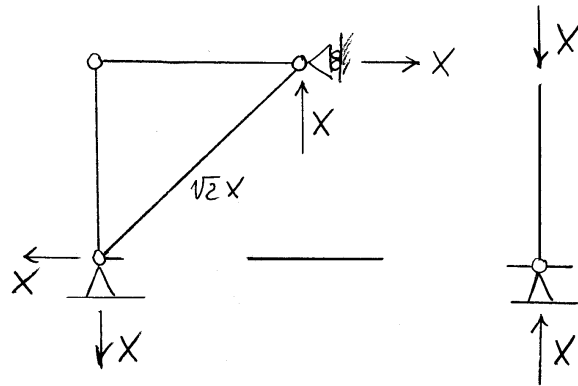
$$\eta_E^{(1)} = \eta_E^{(2)}$$

Nodo E



Nodo A





$$\left(\frac{8}{7}\sqrt{2}ql - 2\sqrt{2}X\right)\frac{l}{EA} = X\frac{l}{EA} \Rightarrow X = \alpha ql$$

$$\alpha = \frac{8\sqrt{2}}{7(1+2\sqrt{2})} = 0.4222 \quad N_{AB} = 0$$

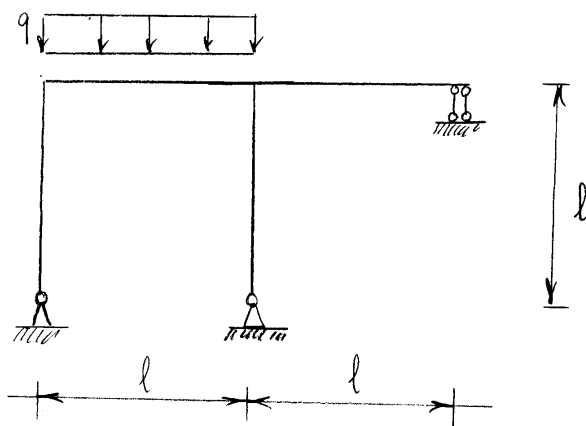
$$N_{AD} = -\frac{3}{7}ql = -0.4286ql \quad N_{AE} = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{7} + \sqrt{2}\alpha\right)ql = -0.2110ql$$

$$N_{DE} = -\frac{ql}{28} = -0.0357ql \quad N_{BE} = -\alpha ql = -0.4222ql$$

ANALISI DEI METODI DELLE FORZE E DEGLI SPOSTAMENTI

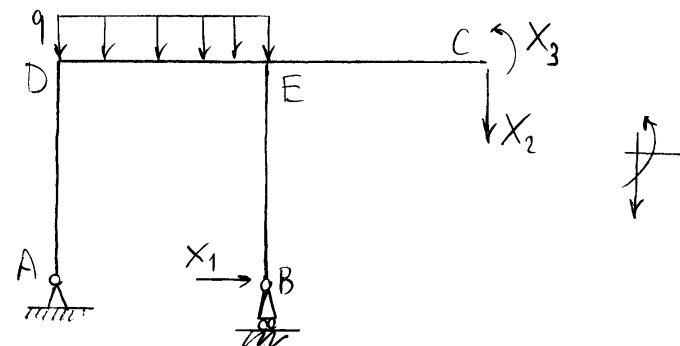
7.1 Equazioni di congruenza (metodo delle forze)

Se la struttura è n volte iperstatica, si sopprimono n vincoli sovrabbondanti ottenendo così il sistema isostatico, o comunque non iperstatico, principale. Ai vincoli soppressi vengono sostituite le reazioni vincolari incognite $X_i (i = 1, \dots, n)$. Il sistema effettivo e il sistema principale risultano identici cinematicamente se alle incognite iperstatiche si attribuiscono i valori effettivi. È chiaro che in generale esistono diverse scelte riguardo agli



n vincoli da sopprimere, dovendo questi soddisfare alla sola condizione che siano n vincoli iperstatici e a scelte diverse corrispondono differenti strutture principali. Si insiste sul fatto che gli n vincoli da sopprimere non sono arbitrari, ma devono essere tali che la cinematica rigida infinitesima della struttura non venga modificata dalla loro soppressione.

Si consideri quale esempio il telaio a un nodo spostabile di figura, già risolto col metodo delle forze con una data scelta delle incognite iperstatiche. La struttura principale ora prescelta è ottenuta eliminando il doppio pendolo in C e il vincolo semplice che impedisce lo spostamento orizzontale in B.



Per valori arbitrari delle incognite iperstatiche X_i ($i=1, \dots, n$) il sistema principale è equilibrato ma in generale non congruente, ovvero gli spostamenti u_i ($i=1, \dots, n$) corrispondenti ai vincoli soppressi non rispettano le condizioni imposte dai vincoli stessi nella struttura effettiva. Se con $\bar{u}_i$ indichiamo lo spostamento imposto dal vincolo ($\bar{u}_i = 0$ se il vincolo è rigido) le condizioni di congruenza si scrivono:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

Queste rappresentano n equazioni nelle n incognite X_i . Se il vincolo è cedevole elasticamente $\bar{u}_i$ dipende dalla X_i .

Si vuole indagare la forma delle equazioni di congruenza, sia allo scopo di dedurre informazioni generali sulla solubilità del sistema di equazioni che allo scopo di dedurre metodi generali per la scrittura dello stesso sistema. La struttura principale è soggetta ai carichi (eventualmente a cedimen-

ti anelastici dei vincoli oppure a distorsioni di varia natura) e alle reazioni iperstatiche incognite X_i ($i=1, \dots, n$). Per valutare lo spostamento i -esimo u_i si può utilizzare la sovrapposizione degli effetti, illustrata in dettaglio nello schema allegato nel caso dell'esempio. Si ottiene l'equazione:

$$u_i = u_{0i} + \sum_{j=1}^n c_{ij} X_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove u_{0i} rappresenta lo spostamento u_i nella struttura principale soggetta ai soli carichi (e/o distorsioni) mentre il generico coefficiente c_{ij} , detto cedevolezza, rappresenta lo spostamento u_i nella struttura principale soggetta al solo carico $X_j = 1$.

Per il teorema di Betti risulta:

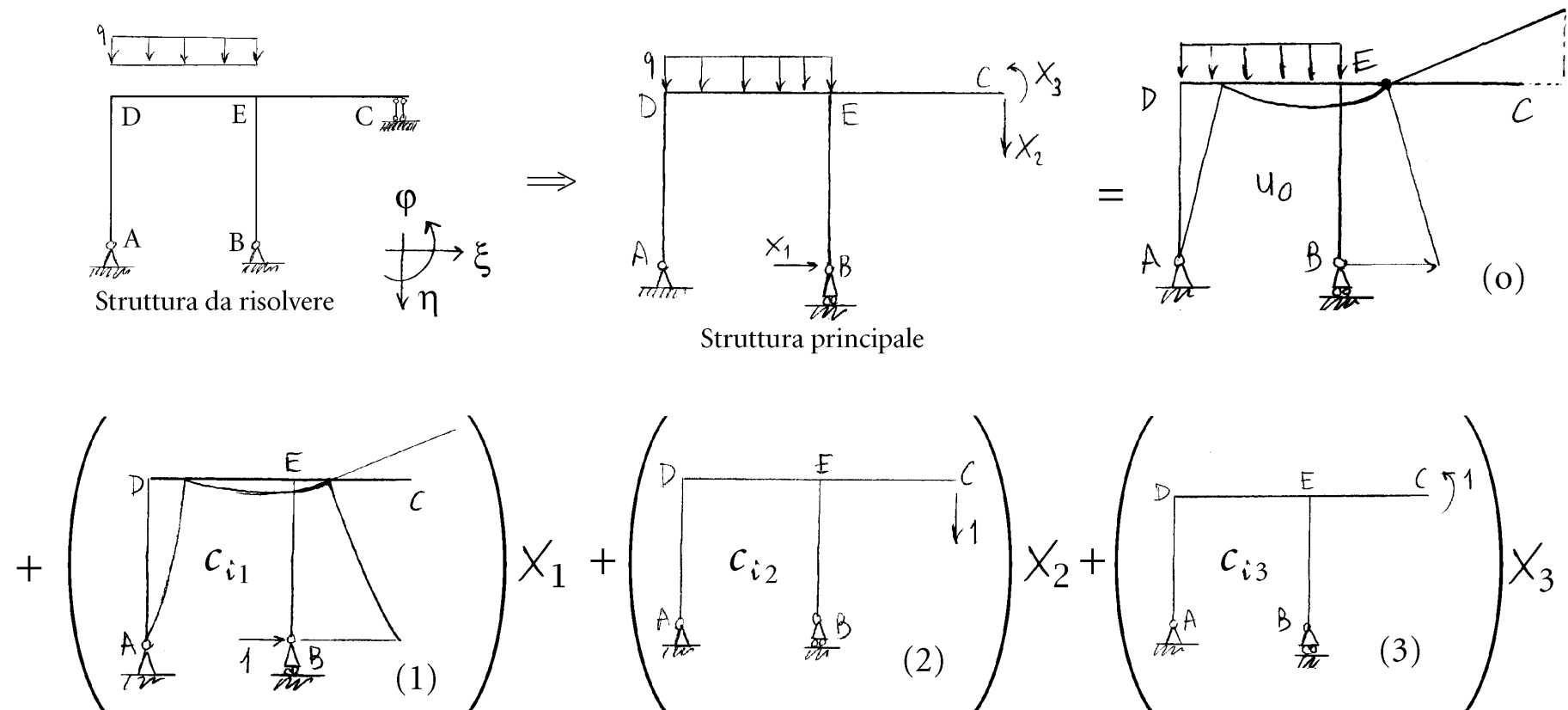
$$c_{ij} = c_{ji} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Scritto il sistema risolvibile in forma matriciale

$$\underline{u}_0 + \underline{c} \underline{X} = \underline{\bar{u}} \quad ,$$

la matrice $\underline{c}$, di cedevolezza, è quindi simmetrica:

$$\underline{c} = \underline{c}^T.$$



Sovrapposizione degli effetti che conduce alle equazioni

$$u_i = u_{0i} + c_{i1}X_1 + c_{i2}X_2 + c_{i3}X_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Non solo, ma poiché nella struttura principale soggetta alle sole X_i il lavoro di deformazione risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \underline{X}^T \underline{c} \underline{X},$$

dalla condizione

$$L_e \geq 0 \quad \& \quad (L_e = 0 \Leftrightarrow \underline{X} = \underline{0}),$$

si deduce che $\underline{c}$ è definita positiva e quindi invertibile. Esiste perciò una e una sola soluzione del problema iperstatico:

$$\underline{X} = \underline{c}^{-1} (\underline{\bar{u}} - \underline{u}_0).$$

Per la scrittura delle equazioni di congruenza, occorre determinare gli spostamenti u_i della struttura principale soggetta ai carichi e alle reazioni iperstatiche. Si può procedere per via cinematica oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

7.1.1 Principio dei lavori virtuali

Procedendo con il principio dei lavori virtuali, al fine del calcolo dello spostamento u_i occorre considerare quale struttura fittizia delle forze la struttura principale soggetta alla $X_i = 1$. Occorre dunque considerare n strutture fittizie.

Limitandosi al caso piano, le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano pertanto:

$$\begin{cases} N^{(r)} = N^{(0)} + \sum_{i=1}^n X_i N^{(i)} \\ T^{(r)} = T^{(0)} + \sum_{i=1}^n X_i T^{(i)} \\ M^{(r)} = M^{(0)} + \sum_{i=1}^n X_i M^{(i)} \end{cases}$$

dove $N^{(0)}$, $T^{(0)}$ e $M^{(0)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione dovute ai soli carichi e $N^{(i)}$, $T^{(i)}$ e $M^{(i)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione nella i -esima struttura fittizia.

Limitandosi ai sistemi di travi inflesse, le deformazioni della

struttura reale valgono quindi:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(r)} &= \varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i N^{(i)}}{EA} \\ K^{(r)} &= K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} + \sum_{i=1}^n \frac{X_i M^{(i)}}{EJ}, \\ \gamma^{(r)} &= \gamma^{(d)}\end{aligned}$$

dove $\varepsilon^{(d)}$, $\gamma^{(d)}$ e $K^{(d)}$ sono gli effetti delle distorsioni sulla struttura principale. Gli spostamenti cercati risultano dunque:

$$\begin{aligned}u_i &= \int_s \left\{ N^{(i)} \left(\varepsilon^{(d)} + \frac{N^{(o)}}{EA} \right) + T^{(i)} \gamma^{(d)} \right. \\ &\quad \left. + M^{(i)} \left(K^{(d)} + \frac{M^{(o)}}{EJ} \right) \right\} ds \Bigg\} u_{oi} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{j=1}^n X_j \int_s \left\{ \frac{N^{(i)} N^{(j)}}{EA} + \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} \right\} ds}_{c_{ij}}.\end{aligned}$$

7.1.2 Indeformabilità assiale

Nel caso in cui si trascuri l'indeformabilità assiale delle travi, l'iperstaticità del sistema da mettere in conto è solo quella di tipo flessionale. Ovverossia, non occorre tenere conto delle iperstaticità dovute a vincoli di tipo assiale, cioè a vincoli che, a seguito della indeformabilità assiale delle aste, non modificano il modo di deformarsi della struttura. Siano n_f l'iperstaticità di tipo flessionale e n_a quella di tipo assiale:

$$n = n_a + n_f.$$

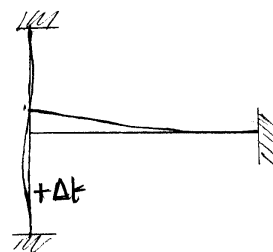
La struttura principale si ottiene eliminando n_f vincoli flessionali sovrabbondanti. La struttura principale risulta determinata per quel che riguarda

le caratteristiche della sollecitazione di tipo flessionale, e cioè taglio T e momento M , mentre continua ad essere n_a volte iperstatica riguardo alla forza normale, forza che non influisce sul modo di deformarsi della struttura. Se $n_a = 0$, una volta risolto il problema iperstatico di tipo flessionale, è possibile determinare la forza normale per via del solo equilibrio. Se $n_a \neq 0$ questo non è possibile. Occorre allora rimuovere l'ipotesi di indeformabilità assiale nella struttura principale caricata dalle forze esterne più le reazioni iperstatiche di tipo flessionale già determinate, e scegliere quindi una nuova struttura principale, questa volta effettivamente iperstatica, eliminando n_a vincoli sovrabbondanti. Quando si trascura la deformabilità assiale delle aste, oltre

alla deformazione dovuta al taglio, il principio dei lavori virtuali si scrive:

$$u_i = \int_s \left\{ N^{(i)} \varepsilon^{(d)} + T^{(i)} \gamma^{(d)} + M^{(i)} \left(\kappa^{(d)} + \frac{M^{(a)}}{EJ} \right) \right\} ds + \sum_{j=1}^{n_f} X_j \int_s \frac{M^{(i)} M^{(j)}}{EJ} ds \quad (i=1, \dots, n_f)$$

Osservare che nelle aste soggette ad una distorsione $\varepsilon^{(d)}$ di tipo assiale lo sforzo normale deve essere staticamente determinato (nella struttura principale). In caso contrario, per rendere determinato il problema, occorre rimuovere anche degli



opportuni vincoli di tipo assiale e supporti deformabili assialmente tutte le aste interessate da tali vincoli, come nel caso illustrato in figura.

7.1.3 Soluzione del telaio a un nodo spostabile

Struttura principale

Configurazione equilibrata dovuta al carico
e alle tre forze X_1, X_2 ed X_3

In generale non congruente per valori arbitrari di x_1, x_2 ed x_3

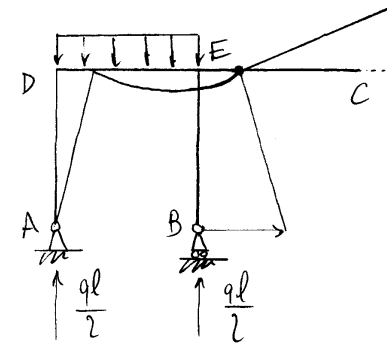
Anche congruente se X_1, X_2 ed X_3 sono i valori che assumono le incognite iperstatiche

Condizioni di congruenza (sugli spostamenti duali delle incognite)

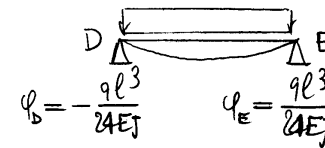
$$\begin{cases} u_B = 0 \\ v_C = 0 \\ \psi_C = 0 \end{cases}$$

Spostamenti calcolati utilizzando il metodo cinematico
(composizione degli spostamenti)

(0) Sole forze esterne:



$$\begin{cases} u_{01} = \frac{ql^4}{12EJ} \\ u_{02} = -\frac{ql^4}{24EJ} \\ u_{03} = \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$



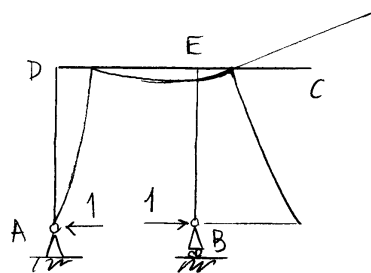
$$\varphi_A = \varphi_D \quad (\text{congruence in } D)$$

$$u_c = u_D = u_E = -q_D l = \frac{q l^4}{24 E J}$$

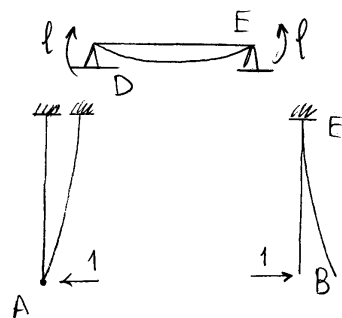
$$\varphi_c = \varphi_E = \frac{q l^3}{24 E J} \quad (\text{have approssimato})$$

$$U_B = U_E + \varphi_E l = \frac{q l^4}{12 E J}$$

$$V_c = -\varphi_E l = -\frac{q l^4}{24 E J}$$

(1) Sala forza X_1 unitaria :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ c_{21} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ c_{31} = \frac{l^2}{2EJ} \end{array} \right.$$



$$\varphi_D = -\frac{l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E = \frac{l^2}{2EJ}$$

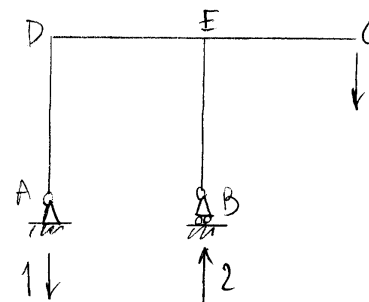
$$\varphi_A = -\frac{l^2}{2EJ} + \varphi_D = -\frac{l^2}{EJ}$$

$$v_A = 0$$

$$v_D = v_E = v_C = \frac{l^3}{3EJ} - \varphi_D l = \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_B = v_E + \varphi_E l + \frac{l^3}{3EJ} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{l^3}{EJ} = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$v_C = -\varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

(2) Sala forza X_2 unitaria :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{12} = -\frac{l^3}{2EJ} \\ c_{22} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} \\ c_{32} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ} \end{array} \right.$$



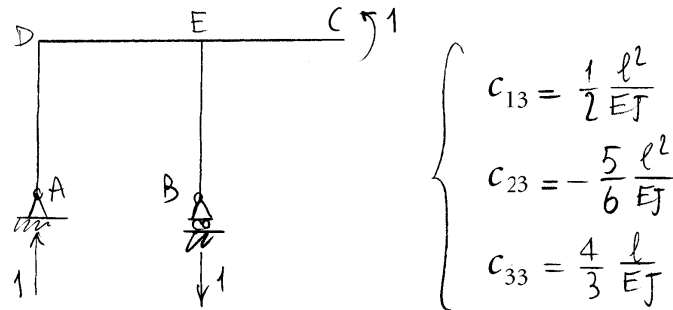
$$\varphi_A = \varphi_D = +\frac{l^2}{6EJ}$$

$$v_D = v_E = v_C = -\varphi_D l = -\frac{l^3}{6EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{-l^2}{3EJ} \Rightarrow v_B = v_E + \varphi_E l = -\frac{l^3}{2EJ}$$

$$v_C = +\frac{l^3}{3EJ} - \varphi_E l = +\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\varphi_C = \varphi_E - \frac{l^2}{2EJ} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EJ}$$

(3) Sola x_3 unitaria

$$\varphi_A = \varphi_D = -\frac{l}{6EI} \quad \varphi_E = \varphi_B = \frac{l}{3EI}$$

$$\varphi_C = \varphi_E + \frac{l}{EI} = \frac{4}{3} \frac{l}{EI}$$

$$v_D = v_E = v_C = -\varphi_A l = \frac{l^2}{6EI}$$

$$v_B = v_E + \varphi_E l = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \frac{l^2}{EI} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{EI}$$

$$v_C = -\varphi_E l - \frac{l^2}{2EI} = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{l^2}{EI} = -\frac{5}{6} \frac{l^2}{EI}$$

Matrice di cedevolezza:

$$\underline{c} = \frac{l}{6EI} \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix}.$$

Spostamenti dovuti ai soli carichi esterni:

$$\underline{u}_0 = \frac{ql^3}{24EI} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Equazioni di congruenza

$$\frac{ql^2}{4} \begin{Bmatrix} 2l \\ -l \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10l^2 & -3l^2 & 3l \\ -3l^2 & 4l^2 & -5l \\ 3l & -5l & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Equazioni risolventi:

$$\begin{cases} 20x_1l - 6x_2l + 6x_3 = -ql^2 \\ 12x_1l - 16x_2l + 20x_3 = -ql^2 \\ 12x_1l - 20x_2l + 32x_3 = -ql^2 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla seconda:

$$4X_2l - 12X_3 = 0 \Rightarrow X_2 = 3 \frac{X_3}{l}.$$

Sostituendo nella prima e nella seconda:

$$20X_1l - 12X_3 = -ql^2.$$

$$12X_1l - 28X_3 = -ql^2.$$

Sottraendo la seconda di queste dalla prima di queste:

$$8X_1l + 16X_3 = 0 \Rightarrow X_1 = -2 \frac{X_3}{l},$$

e infine:

$$-40X_3 - 12X_3 = -ql^2 \Rightarrow X_3 = \frac{ql^2}{52}.$$

Soluzione:

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{ql}{26} \\ X_2 = \frac{3}{52}ql \\ X_3 = \frac{ql^2}{52} \end{cases}.$$

Spostamenti:

$$\begin{cases} \xi = \frac{ql^4}{24EJ} + \frac{5}{6} \frac{l^3}{EJ} X_1 - \frac{l^3}{6EJ} X_2 + \frac{l^2}{6EJ} X_3 \\ \eta_D = -\frac{ql^3}{24EJ} - \frac{l^2}{2EJ} X_1 + \frac{l^2}{6EJ} X_2 - \frac{l}{6EJ} X_3 \\ \eta_E = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{l^2}{2EJ} X_1 - \frac{l^2}{3EJ} X_2 + \frac{l}{3EJ} X_3 \end{cases},$$

e quindi:

$$\begin{cases} \xi = \left(\frac{1}{24} - \frac{5}{6 \times 26} - \frac{3}{6 \times 52} + \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^4}{312EJ} \\ \eta_D = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{2 \times 26} + \frac{3}{6 \times 52} - \frac{1}{6 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = -\frac{5ql^3}{312EJ} \\ \eta_E = \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{2 \times 26} - \frac{3}{6 \times 52} + \frac{1}{3 \times 52} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{ql^3}{104EJ} \end{cases}.$$

7.2 Equazioni di equilibrio (metodo degli spostamenti)

Si assumono come incognite del problema gli spostamenti (generalizzati) dei nodi della struttura, cioè dei punti intersezione delle singole travi. Conoscendo tali spostamenti è possibile determinare univocamente lo stato di deformazione e di sollecitazione in ogni sezione della struttura integrando l'equazione della linea elastica per ogni trave della struttura.

Siano u_i ($i = 1, \dots, n$) gli spostamenti dei nodi (imposti) e siano R_i ($i = 1, \dots, n$) le relative reazioni vincolari (tenere presente che imporre condizioni cinematiche

equivale ad imporre dei vincoli), ovvero sia le forze che occorre applicare ai nodi per ottenere gli spostamenti u_i .

Per valori arbitrari degli spostamenti u_i incogniti la deformata della struttura è congruente ma in generale non equilibrata, ovvero sia le reazioni R_i associate non coincidono con le forze effettivamente applicate nei nodi. Se con F_i indichiamo le forze applicate in corrispondenza dei nodi ($F_i = 0$ se i nodi sono scarichi) le equazioni risolventi si scrivono pertanto:

$$(1) \quad R_i = F_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

con le F_i che si ritengono indipendenti dalle u_i .

Queste equazioni costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite u_i e hanno il significato di equazioni di equilibrio dei nodi, nodi che sono appunto soggetti alle forze F_i e a cui le aste trasmettono le forze $-R_i$.

Per indagare la forma delle equazioni di equilibrio si consideri innanzitutto che la struttura principale risolvibile è soggetta ai carichi (eventualmente a cedimenti anelastici dei vincoli oppure a distorsioni di varia natura) e alle imposizioni cinematiche u_i ($i = 1, \dots, n$) nei nodi. Per valutare la rea-

zione i -esima di vincolo perfetto R_i si può utilizzare la sovrapposizione degli effetti, illustrata in dettaglio nello schema allegato nel caso del telaio a un nodo spostabile già utilizzato per illustrare il significato delle equazioni di congruenza. Si ottiene l'equazione:

$$R_i = R_{0i} + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, n),$$

dove le R_{0i} rappresentano le reazioni R_i in corrispondenza della scelta $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$, avvenuta nella struttura con i nodi impediti di muoversi, e per tale motivo sono dette reazioni di vincolo perfetto. Inoltre il generico coefficiente k_{ij} rappresenta la reazione R_i nella struttura scarica con tutti i movimenti di nodo impediti salvo $u_j = 1$, cioè rappresenta una rigidezza della struttura, dimensionalmente una *forza per unità* di spostamento (generalizzato).

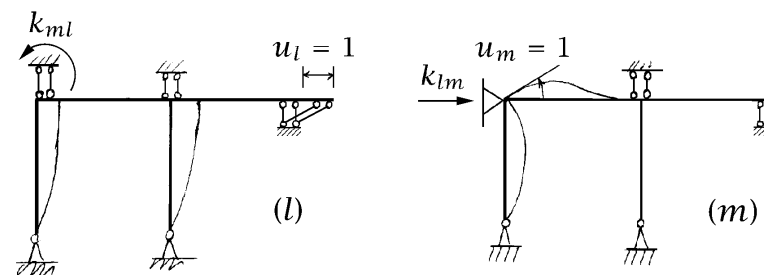
In forma matriciale il sistema si scrive:

$$R_0 + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{F}.$$

La matrice $\mathbf{k}$ è detta *matrice delle rigidezze* e risulta essere simmetrica:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}^T.$$

Infatti, si applichi il teorema di Betti alla struttura (l) soggetta all' l -esimo spostamento di nodo unitario ($u_l = 1$) e a tutti gli altri spostamenti nulli, e alla struttura (m) analogamente soggetta all' m -esimo spostamento di nodo unitario ($u_m = 1$) e a tutti gli altri spostamenti nulli. La struttura (m) è sog-



getta alle rigidezze k_{im} ($i = 1, 2, \dots, n$) e il loro lavoro per gli spostamenti del sistema (l) , che rappresenta il lavoro mutuo L_{ml} , vale:

$$L_{ml} = k_{lm} \times 1.$$

Analogamente il lavoro mutuo che compiono le forze del sistema (l) per gli spostamenti del sistema (m) valgono:

$$L_{lm} = k_{ml} \times 1,$$

e quindi risulta:

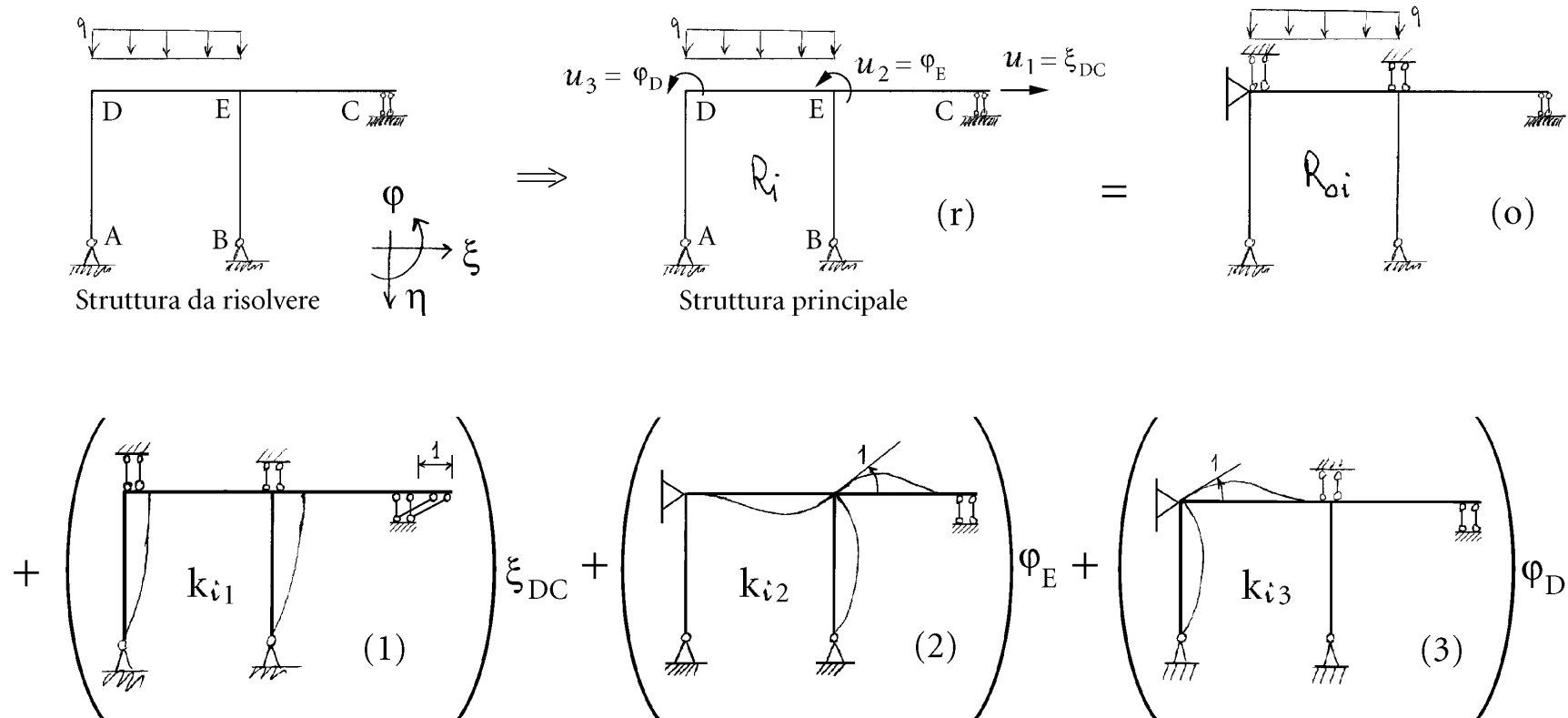
$$k_{lm} = k_{ml},$$

come volevasi dimostrare.

Il sistema risolvante può anche scriversi nella forma:

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{R}_0,$$

dove le forze $-\mathbf{R}_0$ sono le reazioni di vincolo perfetto cambiate di segno.



Sovrapposizione degli effetti che conduce alle equazioni

$$R_i = R_{oi} + k_{i1} \xi_{DC} + k_{i2} \varphi_E + k_{i3} \varphi_D \quad (i = 1, 2, 3)$$

Se si considera la struttura soggetta ai soli movimenti di nodo (forze esterne nulle, cioè $\underline{R}_0 = 0$), le reazioni $\underline{R}$ valgono

$$\underline{R} = \underline{k} \underline{u},$$

e il lavoro di deformazione, per il teorema di Clapeyron, risulta:

$$L_e = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{k} \underline{u}.$$

La condizione $L_e \geq 0$ e ($L_e = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0$) impone a $\underline{k}$ di essere definita positiva.

E' allora possibile ottenere la soluzione nella forma:

$$\underline{u} = \underline{k}^{-1} (\underline{F} - \underline{R}_0).$$

Per determinare le reazioni $\underline{R}_0$ di incastro perfetto e i coefficienti della matrice si può procedere via integrazione della linea elastica oppure utilizzando il principio dei lavori virtuali.

7.2.1 Principio dei lavori virtuali

Nel caso si utilizzi il principio dei lavori virtuali occorre assumere quale struttura delle forze equilibrata quella reale, mentre la i -esima struttura fittizia congruente sarà individuata dallo spostamento $u_i = 1$ e da tutti gli altri spostamenti $u_j = 0$ ($j \neq i$).

Le caratteristiche della sollecitazione della struttura reale risultano:

$$N^{(r)} = N^{(0)} + \sum_{i=1}^n N^{(i)} u_i,$$

$$T^{(r)} = T^{(0)} + \sum_{i=1}^n T^{(i)} u_i,$$

$$M^{(r)} = M^{(0)} + \sum_{i=1}^n M^{(i)} u_i,$$

dove $N^{(0)}, T^{(0)}, M^{(0)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione dovute ai soli carichi (ed eventualmente dovute alle distorsioni imposte) sulla struttura con i nodi bloccati ($u_i = 0, i = 1, \dots, n$), mentre $N^{(i)}, T^{(i)}, M^{(i)}$ sono le caratteristiche della sollecitazione nella i -esima struttura fittizia ($u_i = 1, u_j = 0, j = 1, \dots, n, j \neq i$). Sotto l'ipotesi di travi inflesse le caratteristiche della deformazione nella i -esima struttura fittizia risultano:

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{EA},$$

$$K^{(i)} = \frac{M^{(i)}}{EJ}.$$

Il lavoro virtuale esterno relativo alla i -esima struttura congruente vale:

$$L_{ve} = R_i \times 1 + \int_{\ell} (qv^{(i)} + pw^{(i)} + m\varphi^{(i)}) ds + \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}),$$

dove le R_i sono le reazioni nella struttura reale soggetta ai carichi $q(s)$, $p(s)$ e $m(s)$ distribuiti, ai carichi Q_h , P_h e $\mathcal{M}_h$ concentrati nei punti P_h e ai vincoli u_i .

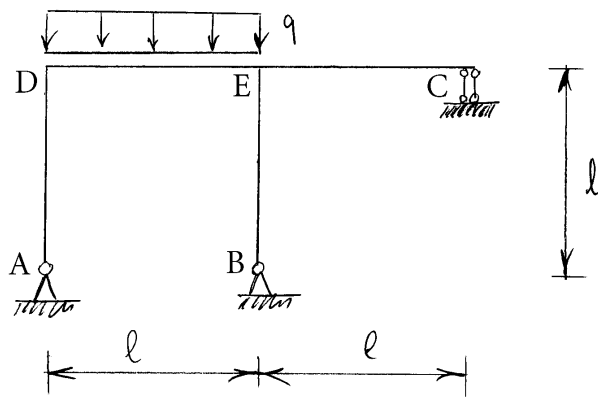
Uguagliando il lavoro virtuale esterno a quello interno si ottiene infine:

$$R_i = \left. \begin{aligned} & \int_{\ell} \left(\frac{N^{(0)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(0)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds + \\ & - \int_{\ell} (qv^{(i)} + pw^{(i)} + m\varphi^{(i)}) ds \\ & - \sum_h (Q_h v_h^{(i)} + P_h w_h^{(i)} + \mathcal{M}_h \varphi_h^{(i)}) \end{aligned} \right\} R_{oi}$$

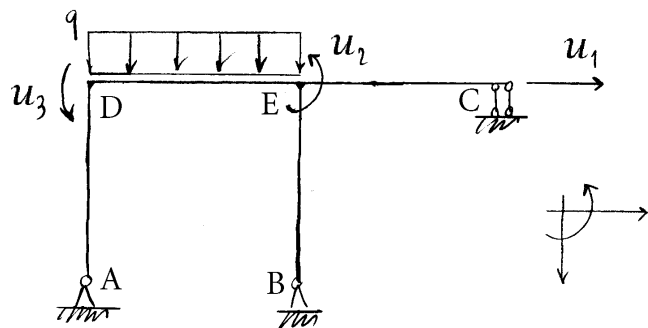
$$+ \sum_{j=1}^n u_j \underbrace{\int_{\ell} \left(\frac{N^{(j)} N^{(i)}}{EA} + \frac{M^{(j)} M^{(i)}}{EJ} \right) ds}_{k_{ij}}.$$

7.2.2 Soluzione del telaio a un nodo spostabile

Telaio a un nodo spostabile soggetto ad un carico distribuito



Struttura principale (metodo degli spostamenti)



Configurazione congruente dovuta al carico e ai tre spostamenti impressi u_1, u_2 e u_3 di nodo.

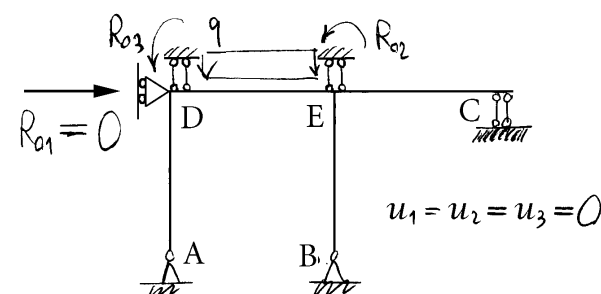
In generale non equilibrata per valori arbitrari di u_1, u_2 e u_3 .

Anche equilibrata se u_1, u_2 e u_3 sono i valori che assumono gli spostamenti reali.

Condizioni di equilibrio (sulle reazioni duali degli spostamenti)

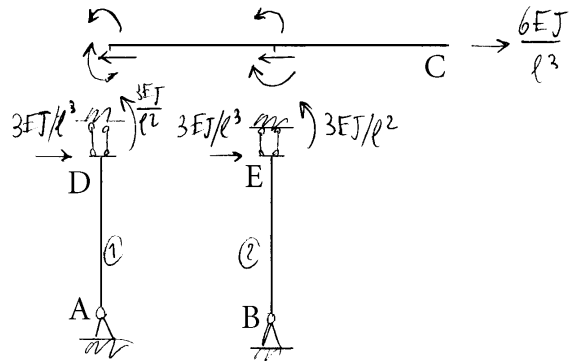
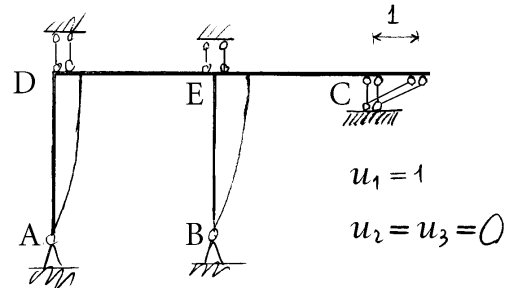
$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ R_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Reazioni di incastro perfetto :



$$R_{03} = \frac{ql^2}{12}, \quad \frac{ql^2}{12}, \quad \frac{ql^2}{24}, \quad \frac{ql^2}{12}, \quad R_{02} = -\frac{ql^2}{12}$$

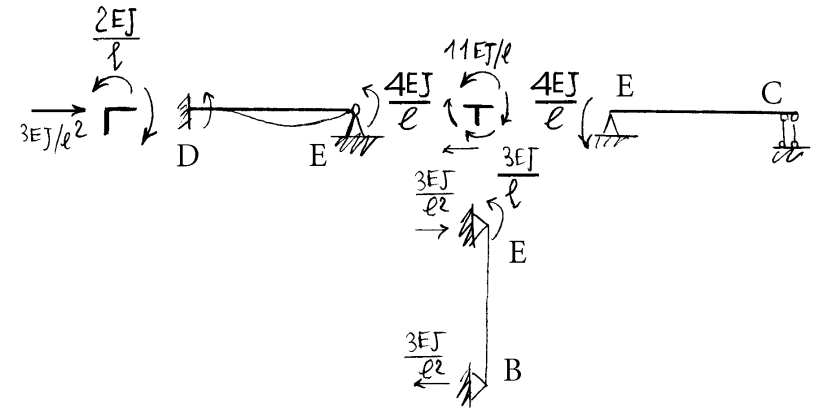
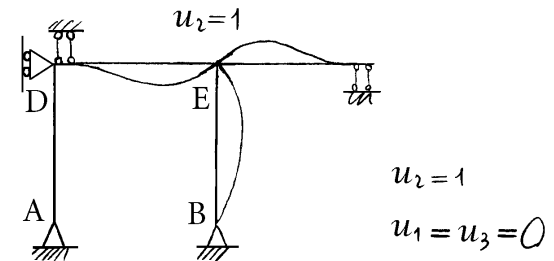
(1) Spostamento impresso u_1 unitario:



$$k_{11} = \frac{6EJ}{l^3}$$

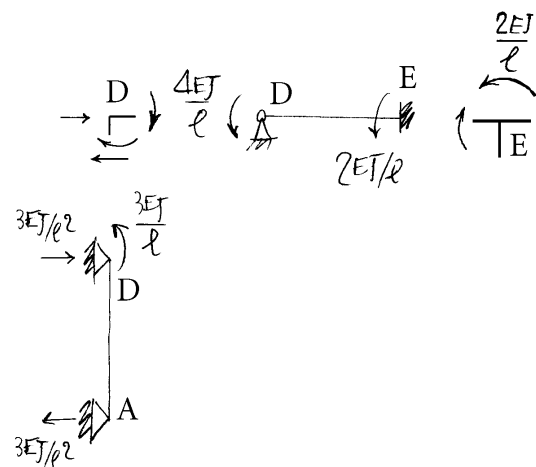
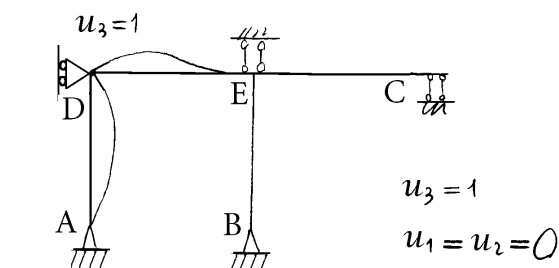
$$k_{13} = k_{12} = \frac{3EJ}{l^2}$$

(2) Spostamento impresso u_2 unitario:



$$\begin{cases} k_{12} = 3EJ/l^2 \\ k_{22} = 11EJ/l \\ k_{32} = 2EJ/l \end{cases}$$

(3) Spostamento impresso u_3 unitario:



$$\begin{cases} k_{13} = \frac{3EJ}{l^2} \\ k_{23} = \frac{2EJ}{l} \\ k_{33} = \frac{7EJ}{l} \end{cases}$$

Equazioni di equilibrio:

$$\frac{ql^2}{12} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & 3l \\ 3l & 11l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 7l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} (i) \quad & 6u_1 + 3lu_2 + 3lu_3 = 0 \\ (ii) \quad & 3u_1 + 11lu_2 + 2lu_3 = +\frac{ql^4}{12EJ} \\ (iii) \quad & 3u_1 + 2lu_2 + 7lu_3 = -\frac{ql^4}{12EJ} \end{aligned}$$

e manipolando tali equazioni si ha poi:

$$(iv) \quad u_2 + u_3 = -2\frac{u_1}{l}, \quad (\text{dalla } i)$$

$$(v) \quad 13u_2 + 9u_3 = -6\frac{u_1}{l}, \quad (\text{sommando la ii alla iii})$$

$$(vi) \quad 10u_2 + 6u_3 = 0, \quad (\text{togliendo la iv moltiplicata per 3 dalla v})$$

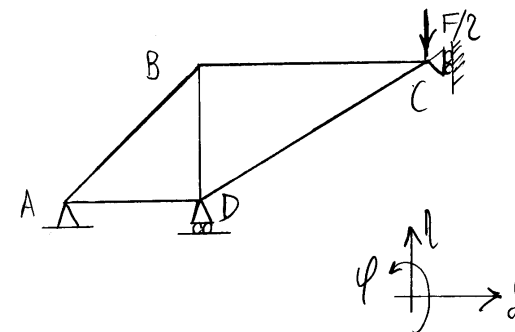
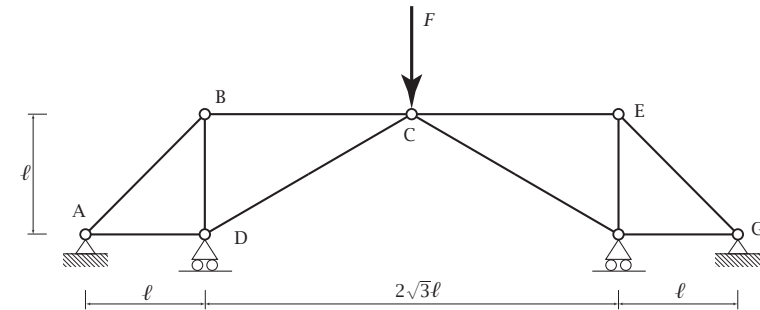
$$(vii) \quad u_2 = -\frac{3}{5}u_3, \quad (\text{dalla vi})$$

$$(viii) \quad u_1 = -\frac{1}{5}u_3l. \quad (\text{dalla v con la vii})$$

Inserendo le (vii) e (viii) nella (ii) si ottiene infine:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{312} \frac{q\ell^4}{EJ} \\ u_2 = \frac{1}{104} \frac{q\ell^3}{EJ} \\ u_3 = -\frac{5}{312} \frac{q\ell^3}{EJ} \end{cases} .$$

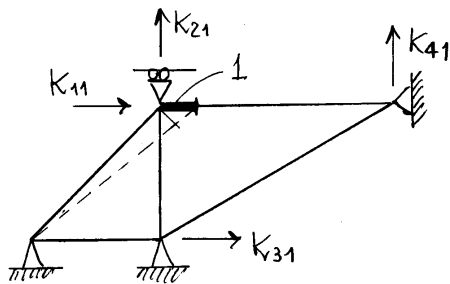
7.2.3 Struttura reticolare iperstatica simmetrica



Incognite: $\delta_B, \eta_B, \delta_D, \eta_C$

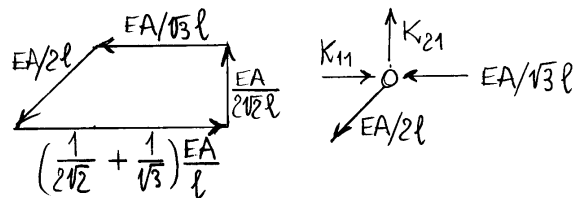
Prima colonna della matrice di rigidità

$$\delta_B = 1 \quad \eta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



$$-\frac{N_{BC}(\sqrt{3}l)}{EA} = 1 \Rightarrow N_{BC} = -\frac{EA}{\sqrt{3}l}$$

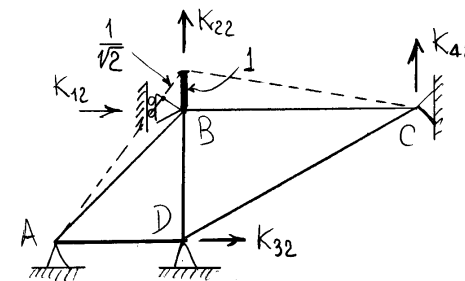
$$\frac{N_{AB}(\sqrt{2}l)}{EA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow N_{AB} = \frac{EA}{2l}$$



$$\begin{cases} K_{11} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{31} = K_{41} = 0 \end{cases}$$

Seconda colonna della matrice di rigidità

$$\eta_B = 1 \quad \delta_B = \delta_D = \eta_C = 0$$



$$N_{BD} = \frac{EA}{l}$$

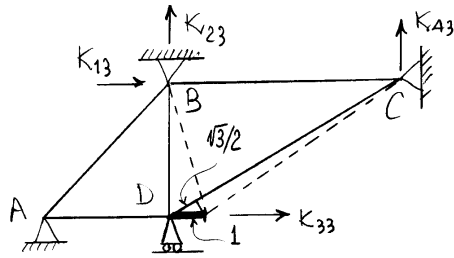
$$N_{AB} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l}$$

Equilibrio nodo B

$$\begin{cases} K_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l} \\ K_{22} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l} \\ K_{32} = K_{42} = 0 \end{cases}$$

Terza colonna della matrice di rigidezza

$$\delta_D = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \eta_C = 0$$



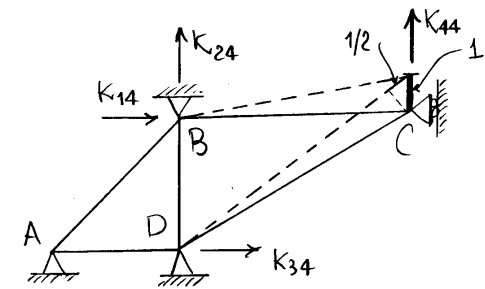
$$N_{AD} = \frac{EA}{l} \quad \begin{array}{c} \text{Nodo D} \\ \left(1 + \frac{3}{8}\right) \frac{EA}{l} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \end{array}$$

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \quad \begin{array}{c} \text{Nodo C} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \quad \frac{3}{8} \frac{EA}{l} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \end{array}$$

$$\begin{cases} K_{13} = K_{23} = 0 \\ K_{33} = \frac{11}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{43} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Quarta colonna della matrice di rigidezza

$$\eta_C = 1 \quad \delta_B = \eta_B = \delta_D = 0$$



$$N_{CD} = \frac{EA}{4l} \quad \begin{array}{c} \text{Nodo C} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \quad \frac{EA}{4l} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Nodo D} \\ \frac{EA}{4l} \quad \frac{EA}{8l} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \end{array}$$

$$\begin{cases} K_{14} = K_{24} = 0 \\ K_{34} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{EA}{l} \\ K_{44} = \frac{1}{8} \frac{EA}{l} \end{cases}$$

Risulta:

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_B \\ l_B \\ \delta_D \\ \eta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{F}{2} \end{Bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$\delta_B = \eta_B = 0,$$

$$\delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Fl}{EA},$$

$$\eta_C = -\frac{11}{2} \frac{Fl}{EA}.$$

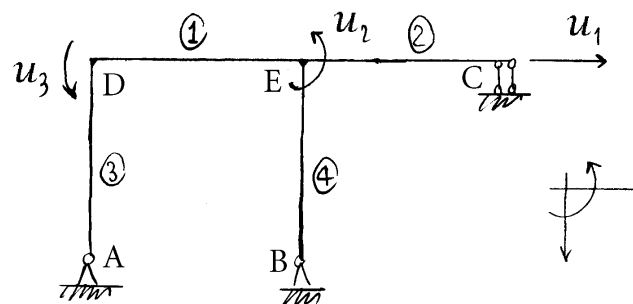
Le forze normali valgono infine:

$$N_{AD} = \frac{EA}{l} \delta_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

$$N_{CD} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{EA}{l} \delta_D + \frac{EA}{4l} \eta_C = -F.$$

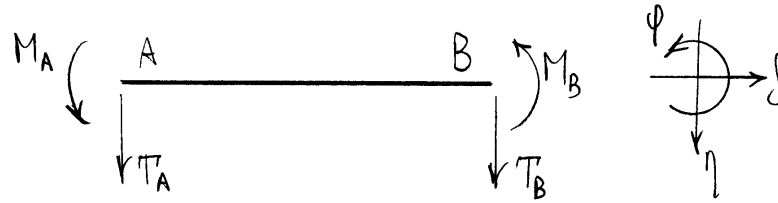
7.3 Assemblaggio della matrice delle rigidezze

La matrice delle rigidezze di un sistema di travi può essere implementata con una tecnica algoritmica detta *assemblaggio*, consistente nel valutare i contributi delle singole aste e di sommarli in modo opportuno. Tale tecnica è basata sul fatto che le equazioni di equilibrio dei nodi si scrivono sommando i contributi trasmessi ai nodi dalle estremità delle singole aste che convergono nei nodi stessi. Si implementano innanzitutto le matrici di rigidezza dei tipi di aste che compongono il telaio, matrici che moltiplicate per i vettori spostamento delle estremità delle aste stesse forniscono le forze di estremità che provocano i detti spostamenti. Sulla base delle matrici di rigidezza generiche si valutano poi le matrici di rigidezza effettive di tutte le aste del telaio. Si stabiliscono quindi le *incidenze* che gli spostamenti delle estremità delle aste hanno con gli spostamenti di nodo incogniti. Si esegue infine l'assemblaggio della matrice delle rigidezze, ovvero si generano a partire da zero gli elementi della matrice delle rigidezze sommando in base alle incidenze i contributi delle singole aste. Tale tecnica viene nel seguito illustrata nel caso del telaio a un nodo spostabile già risolto in precedenza col metodo degli spostamenti e per il quale la matrice delle rigidezze è già stata valutata. Per tale motivo il carico ripartito viene fatto entrare in

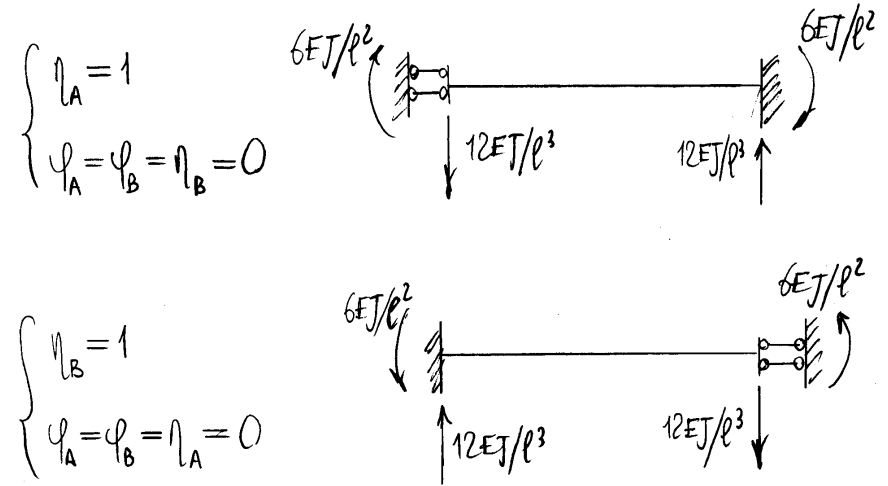
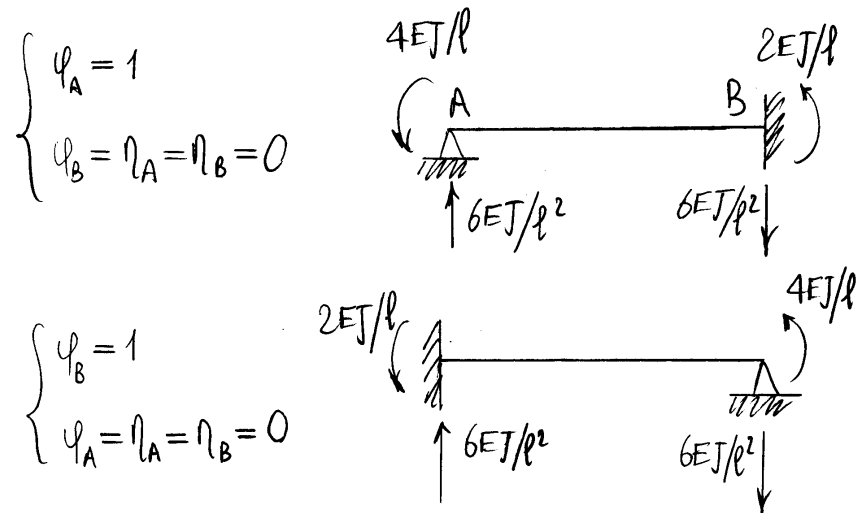


gioco, come già fatto, per il tramite delle reazioni di vincolo perfetto. Ma lo si potrebbe anche fare entrare in gioco, alternativamente, nella matrice delle rigidezze semplicemente aggiungendo ai tipi di aste da considerare un'asta con tutti gli spostamenti delle estremità vincolati e soggetta lungo la linea d'asse a un carico ripartito costante.

7.3.1 Matrice di rigidezza di una trave inflessa con tutti gli spostamenti di estremità vincolati



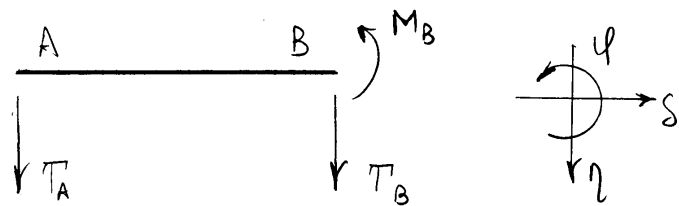
Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:



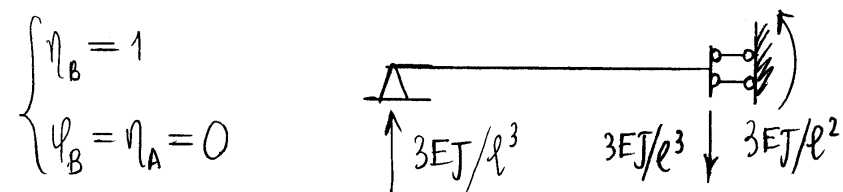
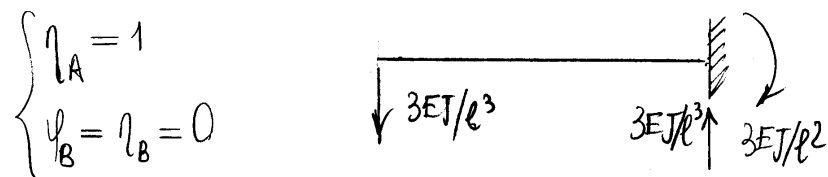
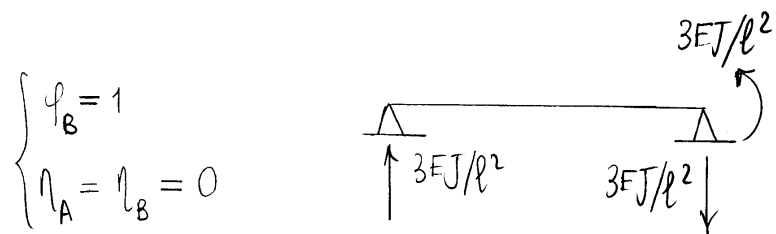
Si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & -6l & 6l \\ 2l^2 & 4l^2 & -6l & 6l \\ -6l & -6l & 12 & -12 \\ 6l & 6l & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_A \\ \phi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}$$

7.3.2 Matrice di rigidezza di una trave inflessa con una rotazione di nodo non vincolata



Generazione delle colonne della matrice della rigidezza dell'asta:



Si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} M_B \\ T_A \\ T_B \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -3l & 3l \\ -3l & 3 & -3 \\ 3l & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_A \\ \eta_B \end{Bmatrix}$$

7.3.3 Matrici di rigidezza delle travi componenti il telaio e loro assemblaggio

Incidenze aste tipo 1

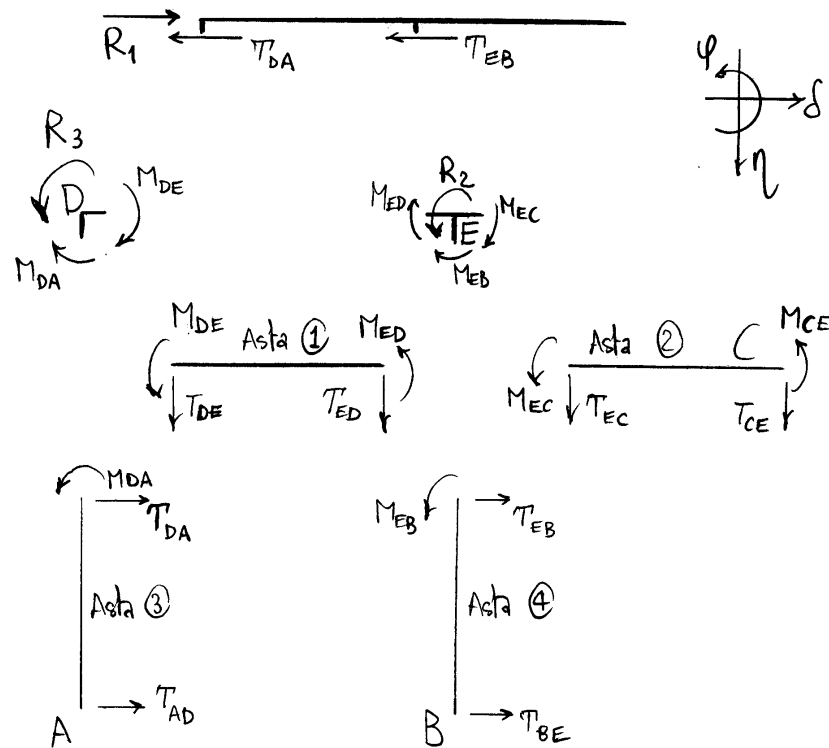
	φ_A	φ_B	η_A	η_B
Asta 1	u_3	u_2	0	0
Asta 2	u_2	0	0	0

Incidenze aste tipo 2

	φ_B	η_A	η_B
Asta 3	u_3	0	u_1
Asta 4	u_2	0	u_1

Matrice Asta ① ($\eta_D = \eta_E = 0$, $\varphi_D = u_3$, $\varphi_E = u_2$)

$$\begin{Bmatrix} M_{DE} \\ M_{ED} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 \\ 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$



Matrice Asta ② ($\varphi_C = \eta_E = \eta_C = 0, \varphi_E = u_2$)

$$\begin{Bmatrix} M_{EC} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \end{Bmatrix}.$$

Matrice Asta ③ ($\delta_A = 0, \varphi_D = u_3, \delta_D = u_1$)

$$\begin{Bmatrix} M_{DA} \\ T_{DA} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_1 \end{Bmatrix}.$$

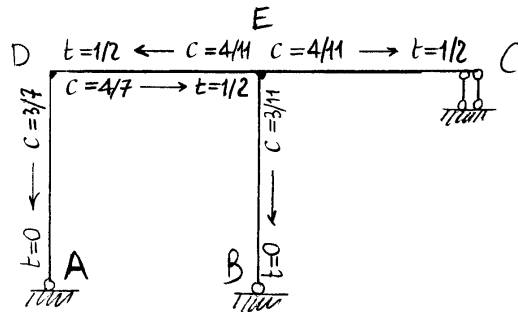
Matrice Asta ④ ($\delta_B = 0, \varphi_E = u_2, \delta_E = u_1$)

$$\begin{Bmatrix} M_{EB} \\ T_{EB} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix}.$$

Matrice assemblata:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{DA} + T_{EB} \\ M_{ED} + M_{EC} + M_{EB} \\ M_{DA} + M_{DE} \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3+3 & 3l & 3l \\ 3l & 4l^2+4l^2+3l^2 & 2l^2 \\ 3l & 2l^2 & 4l^2+3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

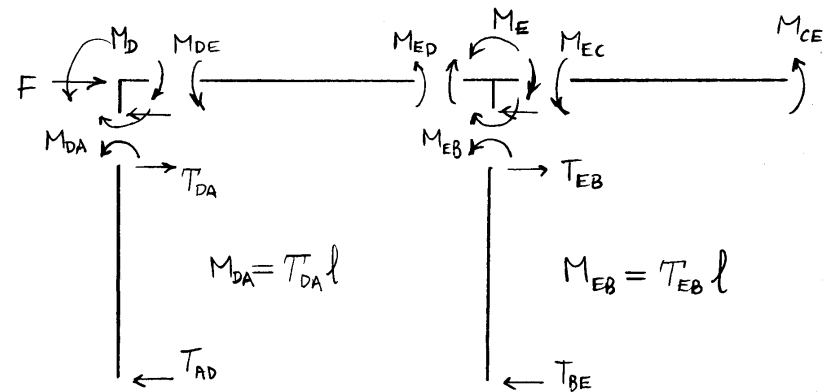
7.4 Metodo iterativo di Cross



Nodo	Rigidità alla rotazione (a meno di EJ/l)	Coefficiente di ripartizione	Coefficiente di trasmissione del momento
Ⓓ	$k_{DA} = 3$ $k_{DE} = 4$ $k_D = 7$	$c_{DA} = 3/7$ $c_{DE} = 4/7$	$t_{DA} = 0$ $t_{DE} = 1/2$
Ⓔ	$k_{ED} = 4$ $k_{EC} = 4$ $k_{EB} = 3$ $k_E = 11$	$c_{ED} = 4/11$ $c_{EC} = 4/11$ $c_{EB} = 3/11$	$t_{ED} = 1/2$ $t_{EC} = 1/2$ $t_{EB} = 0$

Travata	Rigidità alla traslazione (a meno di EJ/l^3)	Coefficiente di ripartizione della forza	Coefficiente di trasformazione taglio → momento
DEC	$k_{DA} = 3$ $k_{EB} = 3$ $k_{DEC} = 6$	$c_{DA} = 1/2$ $c_{EB} = 1/2$	l l

Convenzioni di segno



0) Momenti di vincolo perfetto

1) Equilibrio nodo D $M_D = -8.333$

2) Equilibrio nodo E $M_E = 10.714$

3) Equilibrio travata DEC $F = 0.649$

4) Equilibrio nodo D $M_D = -2.272$

5) Equilibrio nodo E $M_E = 0.324$

6) Equilibrio travata DEC $F = 0.886$

7) Equilibrio nodo D $M_D = -0.502$

8) Equilibrio nodo E $M_E = -0.300$

9) Equilibrio travata DEC $F = 0.297$

10) Equilibrio nodo D $M_D = -0.093$

11) Equilibrio nodo E $M_E = -0.122$

12) Equilibrio travata DEC $F = 0.073$

Valori iterati

Valori esatti

$M_{DA} = -3.848$

$(M_{DA} = -3.846)$

$M_{DE} = 3.862$

$(M_{DE} = 3.846)$

$M_{ED} = -7.671$

$(M_{ED} = -7.692)$

$M_{EB} = 3.847$

$(M_{EB} = 3.846)$

$M_{EC} = 3.861$

$(M_{EC} = 3.846)$

$M_{CE} = 1.930$

$(M_{CE} = 1.923)$

Bibliografia

Indice analitico

appoggio, 12

carrello, 11

centro

di pressione, 46n

di sollecitazione, 46

cerniera, 12

impropria, 13

curva

delle pressioni, 46

doppio doppio pendolo, 12

doppio pendolo, 13

efficace

vincolo, 17

equilibrato

sistema di travi, 18

forze

poligono delle, 46

grado

di iperstaticità, 17

di labilità, 17

incastro, 13

scorrevole, 13

inefficace

vincolo, 17

iperstaticità

grado di, 17

iperstatico

sistema di travi, 18

vincolo, 17

isostatico

sistema di travi, 18

labile

sistema di travi, 18

labilità

grado di, 17

nodo

cerniera, 16

di un sistema di travi, 16

doppio o triplo, 16

incastro o rigido, 16

pattino, 13

pendolo

doppio, 13

doppio doppio, 12

improprio, 12

semplice, 11

- poligono
 - delle forze, **46**
- pressione
 - centro di, 46n
- pressioni
 - curva delle, **46**
- sistema di travi, **14**
 - equilibrato, **18**
 - iperstatico, **18**
 - isostatico, **18**
 - labile, **18**
 - staticamente determinato, **18**
 - staticamente indeterminato, **18**
- sollecitazione
 - centro di, **46**
- staticamente determinato
 - sistema di travi, **18**
- staticamente indeterminato
 - sistema di travi Mlem, 18
- travi
 - sistema di, **14**
- vincoli esterni, **15**
- vincoli interni, **15**
- vincolo
 - efficace, **17**
 - inefficace, **17**
 - iperstatico, **17**