Esercizi di Geometria
nono foglio

December 10, 2023

1. Si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice reale A
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile, e i valori di $c \in \mathbb{R}$ per i quali lo è la matrice C :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Sia A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
su un campo K. Si dica se A è diagonalizzabile sui campi $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$.

3. Si dimostri che la matrice reale
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile. Si trovi, inoltre, una matrice S tale che $S^{-1}AS$ sia diagonale. La matrice S è unica?

4. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale di dimensione 3 dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, e sia T l'endomorfismo così definito:
$$T : V \to V, \quad T(p(t)) = p(t+1).$$
Si scriva la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Si determinino, inoltre, gli autovalori e gli autospazi di T, e si verifichi che T non è diagonalizzabile.