

LA PROSPETTIVA

1 Generalità

Per la rappresentazione dello spazio, il metodo geometrico della *Prospettiva* – meglio detta *Prospettiva lineare conica* – è il più efficace dal punto di vista della verosimiglianza visiva, avvalendosi la costruzione delle relative immagini di procedimenti analoghi a quelli che presiedono alla formazione delle corrispondenti immagini retiniche: per tale caratteristica questo metodo si pone, insieme agli altri – di *Monge* e *Assonometria* – come strumento indispensabile per il disegno di architettura, in tutte le sue espressioni e per tutte le finalizzazioni (un quarto metodo, quello delle *Proiezioni quotate*, è riservato quasi esclusivamente alle rappresentazioni topografiche). Confrontando dunque il processo geometrico della prospettiva con il processo fisiologico della visione, ricordiamo che in quest'ultimo i raggi luminosi, riflessi dai corpi illuminati, penetrano nell'occhio dell'osservatore attraverso la pupilla e, convergendo in un punto del cristallino, raggiungono una zona assai sensibile della retina – detta *màcula* –, dove, per la caratteristica ricettività di cellule a tale funzione preposte, quegli stessi raggi vi proiettano (capovolte) le immagini degli oggetti osservati. È allora evidente che se ponessimo un piano, supposto trasparente, tra l'occhio e l'oggetto, i punti di intersezione con quel piano dei raggi luminosi riflessi dalla superficie dell'oggetto che penetrano nell'occhio produrrebbero nell'osservatore lo stesso effetto dell'oggetto reale.

Nel procedimento geometrico i raggi luminosi vengono sostituiti da semirette che, in senso opposto, proiettano i punti (e i segmenti di rette) degli oggetti da un punto fisso – che assume il ruolo del centro oculare e pertanto viene detto *centro di vista* – su di un piano detto *quadro*, che assume il ruolo del piano trasparente posto tra l'osservatore e l'oggetto, e che generalmente si suppone coincidente con il foglio del disegno.

Se la superficie dell'oggetto è continua, come nel caso della sfera, la sua prospettiva è data dall'immagine del *contorno apparente*, di quella linea cioè mediante la quale ci appare delimitato l'oggetto da un determinato punto di osservazione: si tratta dunque della linea di contatto di un ideale *cono circoscritto* alla superficie con il vertice nel centro di vista *V*. Se

la superficie dell'oggetto non è continua, è necessario individuare, oltre al contorno apparente tutti quei punti e quelle linee singolari che valgono a distinguere le diverse parti.

La congruenza tra l'immagine prospettica e la corrispondente immagine visiva, non è tuttavia assoluta: la seconda infatti si forma su una superficie curva (il fondo oculare); viene continuamente modificata dal moto rapidissimo dell'occhio; si avvale inoltre di una serie di interventi correttivi a livello cerebrale che raddrizzano l'immagine retinica capovolta e perfezionano, mediante l'uso coordinato dei due occhi e l'unificazione delle due non identiche immagini, la percezione della tridimensionalità degli oggetti e della profondità dello spazio; la prospettiva geometrica invece viene costruita su una superficie piana, presuppone l'assoluta immobilità dello sguardo e l'uso di un solo occhio (rappresentato dal centro di vista). Più aderente alla costruzione della prospettiva geometrica è il processo fotografico, che tuttavia, come

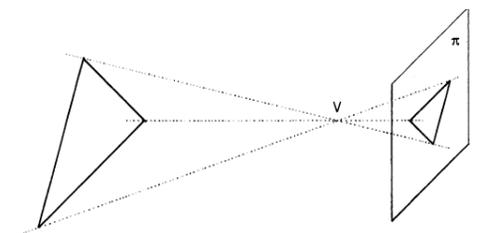


Fig. 1a

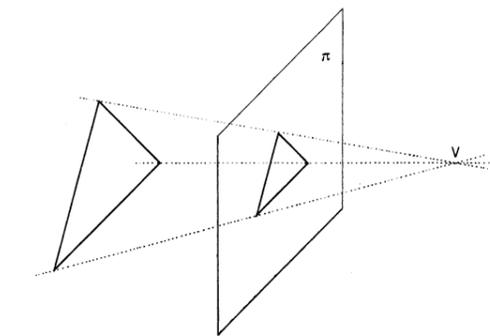


Fig. 1b

l'organo visivo, prevede il centro di vista (obiettivo della macchina) situato tra il piano dell'immagine (pellicola) e l'oggetto (fig. 1a)¹, mentre nel processo geometrico l'oggetto è situato rispetto al quadro nel semispazio che non contiene il centro di vista (fig. 1b). La prospettiva appare oggi come un'applicazione del più generale metodo delle *Proiezioni centrali* (S.-V., p.113), avendone sostituito la omnidirezionale stella di rette proiettanti², con l'unilaterale *cono visivo* o *cono ottico*, che comprende di quella stella le sole semirette contenute in un ideale cono, avente il vertice nell'occhio dell'osservatore e l'angolo di apertura compatibile con quello fisiologico: all'interno di tale angolo deve essere compreso l'oggetto da rappresentare. Tale scelta ha lo scopo di evitare nell'immagine grafica le cosiddette *aberrazioni marginali*, deformazioni periferiche che esorbitano dalle normali deformazioni visive, e la cui presenza, oltre a creare effetti sgradevoli, riduce il carattere di riconoscibilità delle forme rappresentate. Storicamente invece la codificazione della prospettiva, ad opera di artisti-scienziati del Rinascimento, ha preceduto di quasi quattro secoli la nascita del più generale metodo astratto matematico: il metodo delle Proiezioni centrali infatti vedrà la luce solo agli inizi del XIX secolo, insieme con la scoperta delle proprietà proiettive delle figure, ad opera del geometra svizzero J.V. Poncelet³.

2 Prospettiva a quadro verticale

2.1 Il riferimento

1. *Il riferimento nello spazio.* La costruzione delle immagini prospettiche si avvale dunque dei principi e delle operazioni proprie del metodo delle Proiezioni centrali (S.-V., pp. 113 segg.), pertanto il *riferimento nello spazio* è costituito ancora da un *punto proprio* V , detto *centro di proiezione* o *centro di vista*, e da un piano di proiezione π non passante per V , detto *quadro*. Oltre a questi due elementi, che la prospettiva ha in comune con il metodo delle Proiezioni centrali, per agevolarne le operazioni nel riferimento prospettico, viene introdotto un ulteriore piano π_1 , supposto orizzontale e detto *piano geometrico* o *piano fondamentale* o ancora *piano di terra*, considerato generalmente coincidente con il piano di calpestio dell'osservatore, e comunque con il primo piano della proiezione mongiana (fig. 2a).

2. *Il riferimento sul quadro*, come nel metodo delle proiezioni centrali, è ancora costituito dal *punto prin-*

cipale V_o – proiezione ortogonale di V sul quadro – e dal *cerchio di distanza*, di centro V_o e raggio uguale al segmento VV_o ; la cui misura è detta appunto *distanza principale*; completa il riferimento su π la rappresentazione del piano geometrico π_1 , determinata, secondo le leggi del metodo suddetto, da una coppia di rette parallele, rispettivamente *traccia* e *fuga* di π_1 (S.-V., p. 120), rette che in quanto parti del riferimento assumono precise denominazioni, rispettivamente *retta fondamentale* f e *retta di orizzonte* o (fig. 2b).

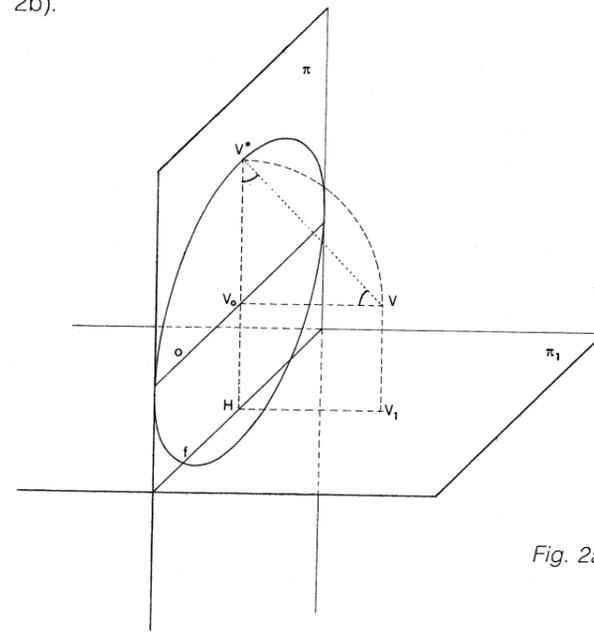


Fig. 2a

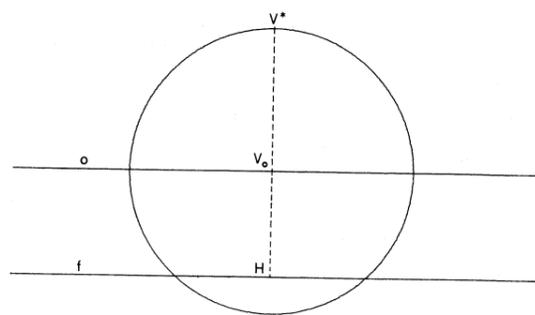


Fig. 2b

3. *La scelta del riferimento*, del tutto arbitraria nel metodo matematico astratto, nel caso della prospettiva viene evidentemente condizionata dalle dimensioni dell'oggetto, poiché è necessario, come abbiamo sopra osservato, che l'immagine non risulti deformata in modo innaturale e conservi pertanto all'oggetto rappresentato il carattere di riconoscibilità.

Nella *prospettiva a quadro verticale*, che presuppone orizzontale la direzione dello sguardo – sempre ortogonale al quadro e coincidente con la retta VV_o , che assume la denominazione di *raggio visuale principale* –, la retta o , in quanto fuga del geometrico, che in questo caso risulta ortogonale al quadro, passa per il punto principale V_o (S.-V., p. 120), la distanza tra le rette o ed f , uguale alla quota VV_1 del punto V , si assume generalmente uguale all'altezza (dell'occhio) dell'osservatore, opportunamente ridotta nella scala del riferimento prospettico, mentre la misura del raggio del *cerchio di distanza* (uguale alla distanza dell'osservatore dal quadro, assai prossima a quella dell'osservatore dall'oggetto, ridotta alla scala suddetta) deve essere determinata di volta in volta rispetto alle dimensioni dell'oggetto stesso, affinché questo risulti compreso interamente nel cono visivo. Nella realtà fisiologica l'angolo di apertura di tale cono, in relazione alla zona della retina di massima sensibilità (la *macula*), è estremamente limitato, ma nel processo geometrico, tenendo conto anche delle zone retiniche della visione non perfetta e dei rapidissimi movimenti oculari che ampliano il campo visivo, la correttezza delle immagini prospettiche è assicurata anche ipotizzando per quell'angolo un'ampiezza assai maggiore, fino a un massimo di 50° .

2.2 Rappresentazione degli enti fondamentali

1. La presenza del piano geometrico nel riferimento prospettico consente una rappresentazione degli oggetti, in particolare architettonici, più semplice rispetto al metodo matematico astratto, e di conseguenza una più immediata soluzione dei problemi. Se ad esempio nel metodo delle Proiezioni centrali un punto P è rappresentato dalla proiezione P' e dalla rappresentazione di una retta p (P', T_p, F'_p), o di un piano α (t_α, f'_α), l'una e l'altro passanti per P , nel metodo della Prospettiva (fig. 3) si preferisce assegnare il punto mediante la stessa proiezione P' sul quadro (detta anche *prospettiva di P*) e dall'immagine P'_1 della proiezione ortogonale P_1 sul piano geometrico π_1 (perciò detta *proiezione geometrica di P*), punto a sua volta definito dalla stessa immagine P'_1 e dalle rette f ed o , rispettivamente *traccia* e *fuga*

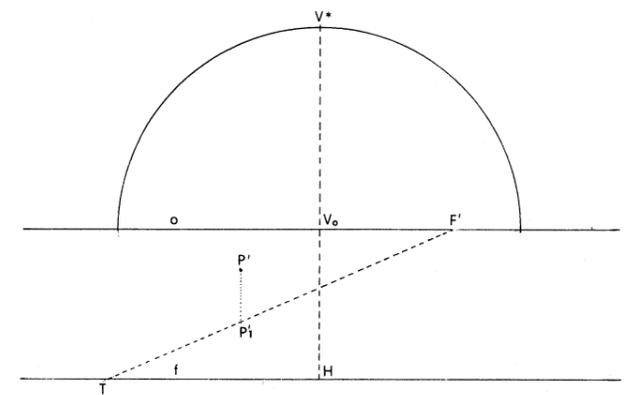


Fig. 3

del piano π_1 , cui P_1 appartiene (S.-V., p. 127). La rappresentazione di un piano generico α è ancora data, come nelle proiezioni centrali, da una coppia di rette parallele t_α, f'_α , rispettivamente *traccia* e *fuga* di α , con l'introduzione, laddove necessario, di una ulteriore retta, la prospettiva s'_α della sua intersezione s_α con π_1 , detta pertanto *traccia geometrica di alpha* (fig. 4).

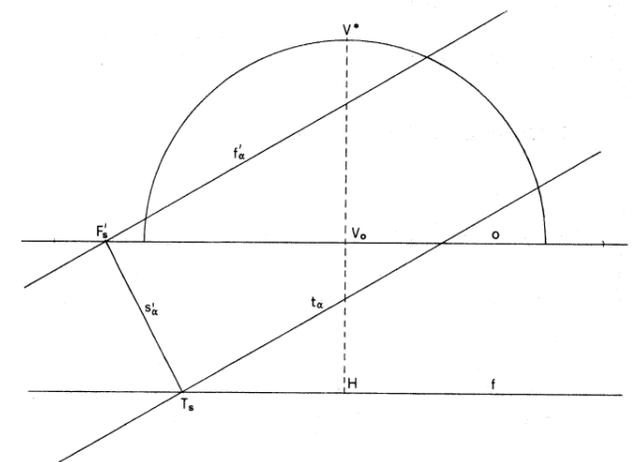


Fig. 4

2. È comunque possibile passare per il punto P da una rappresentazione del primo tipo a una rappresentazione del secondo, costruendo per P un piano verticale α (di cui la fuga e la traccia, ortogonali ad o , passino rispettivamente per F'_p e T_p), determinandone l'intersezione s'_α con π_1 , e proiettando ortogonalmente P' su s'_α in P'_1 ; la coppia $P'P'_1$ è la rappresentazione prospettica di P (fig. 5).

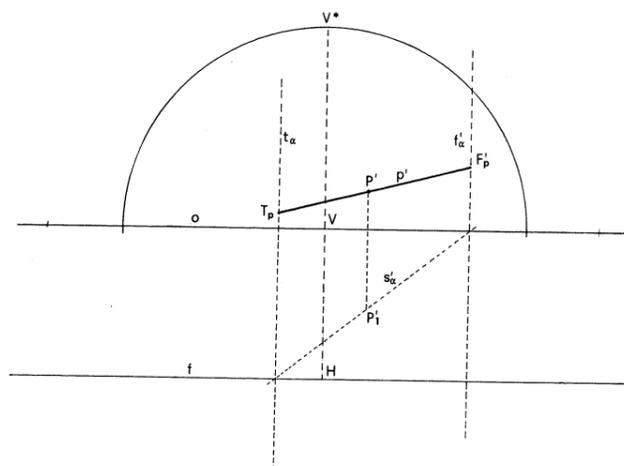


Fig. 5

È dunque evidente che si possa individuare la proiezione geometricale r'_1 di una retta r – data mediante l'immagine r' e i punti T_r ed F_r (fig. 6) – come intersezione con π_1 del piano verticale α condotto per r : la retta r'_1 coincide evidentemente con s'_α . Tutte le condizioni di appartenenza, parallelismo, complanarità, ortogonalità, sono precisamente quelle proprie del metodo delle Proiezioni centrali (S.-V., pp. 122 segg.; 127, 128; 143 segg.).

I procedimenti più comunemente adottati per la costruzione delle immagini prospettiche sono quelli denominati del Ribaltamento, dei Punti di fuga, dei Punti di misura, dei Piani proiettanti.

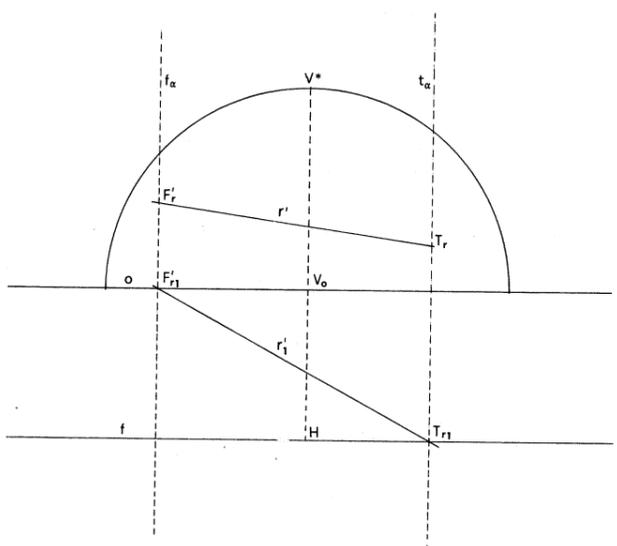


Fig. 6

2.3 Metodo del ribaltamento

1. *L'omologia di ribaltamento.* Per la rappresentazione di figure appartenenti al piano geometrico π_1 , come le piante degli edifici, il metodo (ma sarebbe più corretto il termine "procedimento") del ribaltamento prevede che il geometrico stesso venga ribaltato sul quadro π , consentendo così una costruzione della prospettiva di facile e rapida esecuzione, a mezzo di sole operazioni grafiche eseguibili tutte su un unico foglio, coincidente con il quadro. Ricordiamo infatti (S.-V., p. 166) che l'immagine P' e il ribaltato P^* di uno stesso punto P , e dunque di una qualunque figura appartenente a un piano – nel nostro caso π_1 – si corrispondono in un'omologia avente il centro in V^* (ribaltato di V nel ribaltamento del piano di orizzonte, passante per V e parallelo a π_1), per asse e per retta limite rispettivamente le rette f ed o (traccia e fuga di π_1) (fig. 7); allora la pianta di un edificio, data sul quadro in vera forma mediante la sua ribaltata, si può trasformare nella corrispondente immagine prospettica mediante l'omologia (inversa) di ribaltamento.

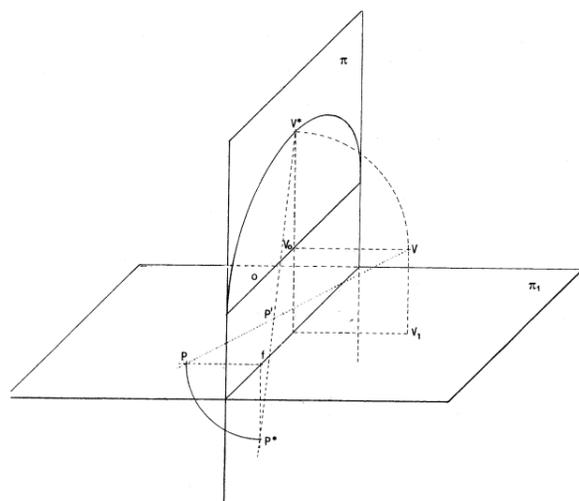


Fig. 7

2. *Il riferimento e il cono visivo.* Dato il riferimento, costituito dalle rette o ed f (a una reciproca distanza uguale all'altezza dell'osservatore, nella scala stabilita per il riferimento stesso), si segni ad arbitrio sulla retta o il punto V_0 e si tracci il cerchio di distanza il cui raggio definisce la distanza dell'osservatore dal quadro, cioè la misura del segmento VV_0 assunta in prima approssimazione nel rapporto 1,5/1 rispetto alla dimensione massima dell'oggetto da rappresentare (ridotta alla stessa scala del riferimento).

La correttezza di tale scelta, detto H il punto d'intersezione della retta f con la verticale condotta per V_0 – in tale verticale coincidendo la traccia e la fuga del piano visuale principale, cioè del piano verticale per V e ortogonale a π –, si stacchi su questa il segmento HV^*_1 uguale alla distanza principale, essendo V^*_1 il ribaltato del punto V_1 , proiezione geometricale di V e piede dell'osservatore (fig. 8a); con vertice nel punto V^*_1 si costruisca un angolo di 45° - 50° di bisettrice V^*_1H , i cui lati costituiscono la ribaltata della proiezione geometricale del cono visivo: come sappiamo, la ribaltata della pianta (o proiezione geometricale) dell'edificio deve essere compresa all'interno di tale angolo affinché la relativa immagine prospettica risulti priva di aberrazioni marginali (fig. 8b).

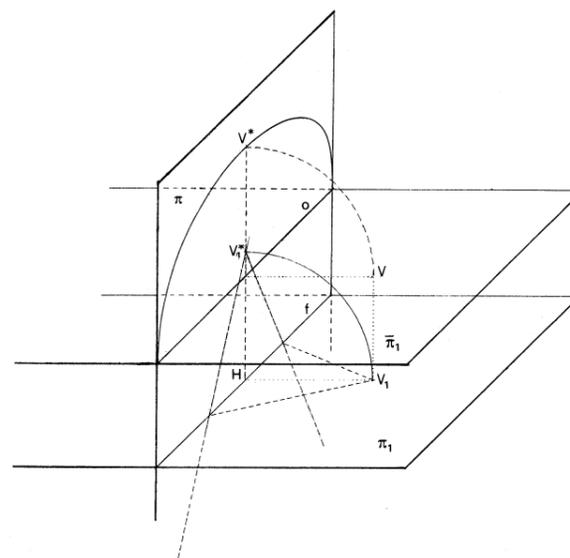


Fig. 8a

Tenendo conto del verso di rotazione che porta a coincidere il semipiano posteriore del geometrico con il semipiano inferiore del quadro – mentre il semipiano anteriore del piano di orizzonte e con esso i punti V^* e V^*_1 si ribaltano al di sopra della retta o –, si avrà cura di disegnare la pianta ribaltata in modo speculare rispetto alla pianta mongiana, ponendola al di sotto della fondamentale f e a questa assai prossima, ad evitare un eccessivo rimpicciolimento dell'immagine, ciò che accade se invece la figura obiettiva è lontana dalla fondamentale stessa e quindi dal quadro.

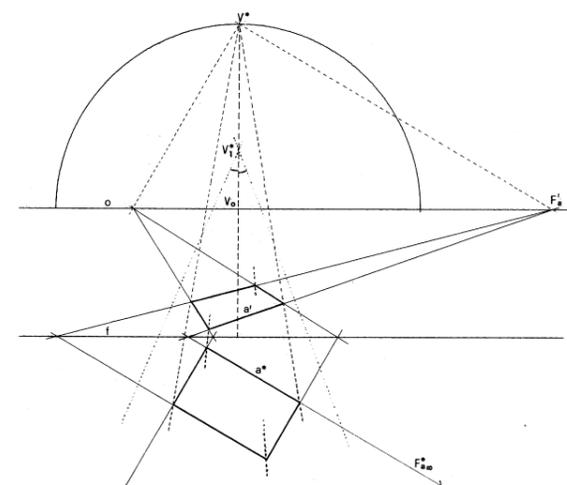


Fig. 8b

Esercizi

E.1. Supponiamo che la ribaltata della figura del geometrico sia un rettangolo disposto con due lati paralleli alla fondamentale⁴, e proponiamoci di costruirne l'immagine prospettica (fig. 9). Ricordando che nell'omologia di ribaltamento del piano π_1 , la retta o , in quanto fuga di π_1 , ha il ruolo di retta limite (S.-V., p. 167), risulta possibile in infiniti modi individuare per suo mezzo una coppia di punti corrispondenti, ad esempio $F'_a \equiv V_0$ e $F^*_{a\infty}$ ⁵; allora la retta a^*

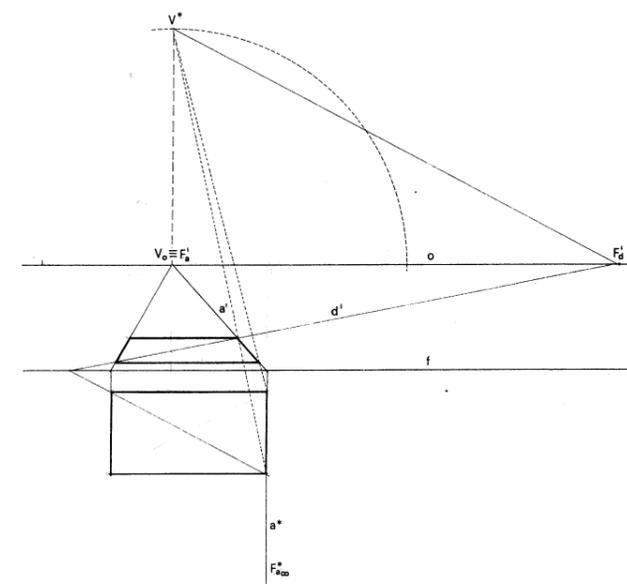


Fig. 9

di uno dei lati ortogonali ad f e come tale passante per il punto improprio $F_{a\infty}^*$, ha per omologa la retta a' che passa per $F'_a \equiv V_o$ e per il punto $T_{a'}$, traccia di a appartenente ad f ("rette omologhe s'intersecano sull'asse dell'omologia"); ripetuta la costruzione per il lato \bar{a} parallelo ad a , e proiettati da V^* su a' e \bar{a}' i relativi vertici ("punti omologhi sono allineati con il centro dell'omologia"), si completi la prospettiva del rettangolo costruendo le immagini degli altri due lati, che risulteranno paralleli tra loro e ad f , poiché il relativo punto di fuga coincide con il punto improprio della retta o e dunque anche di f .

La determinazione dei vertici può essere facilitata mediante la prospettiva d' di una delle diagonali d^* del rettangolo dato, il cui punto di fuga F'_d si determina sulla retta o proiettandovi da V^* il punto improprio della diagonale ribaltata, operazione equivalente a quella che nello spazio determina sul quadro lo stesso punto di fuga F'_d .

E.2. Se la figura data è un quadrato con due lati paralleli alla fondamentale f (fig. 10), le diagonali risultano inclinate alla fondamentale stessa di un angolo di 45° e i relativi punti di fuga D_1 e D_2 (altrimenti ottenibili conducendo da V^* le parallele alle ribaltate delle diagonali) cadono nell'intersezione della retta o con il cerchio di distanza; sono detti pertanto *punti*

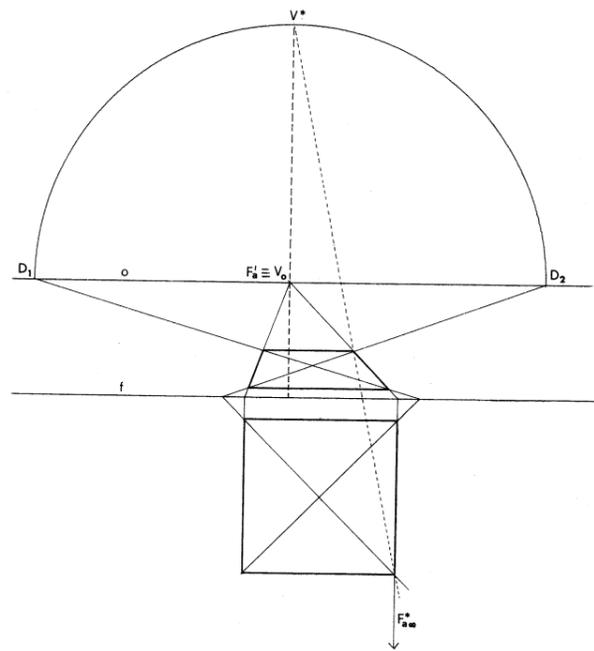


Fig. 10

di distanza e si definiscono come *punti di fuga delle rette orizzontali inclinate alla fondamentale* (e dunque in questo caso anche al quadro) *di un angolo di 45°* . Il cerchio di distanza è infatti il luogo dei punti di fuga di tutte le rette dello spazio inclinate al quadro di 45° , poiché ogni retta d uscente da V (atta cioè a determinare il punto di fuga delle infinite rette dello spazio parallele a d) e che si appoggia a un punto F'_d di quel cerchio forma con il quadro proprio un tale angolo: infatti ogni segmento VF'_d risulta l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele $VV_oF'_d$ i cui angoli in V e in F'_d sono uguali e dunque ciascuno di 45° (cfr. fig. 2a).

E.3. Nella figura 8b è illustrata la costruzione della prospettiva di un rettangolo in posizione generica rispetto alla fondamentale, e quindi al quadro; anche qui sono stati scelti come punti corrispondenti $F_{a\infty}^*$ ed F'_a , rispettivamente punto improprio di una coppia di lati del rettangolo e punto di fuga degli stessi lati, quest'ultimo determinato su o mediante la retta $V^*F_{a\infty}^*$, ribaltata della parallela ai suddetti lati condotta per il centro di vista V .

E.4. Mediante la prospettiva del quadrato è possibile costruire con facilità e precisione la *prospettiva di un cerchio*, che come sappiamo è generalmente un'el-

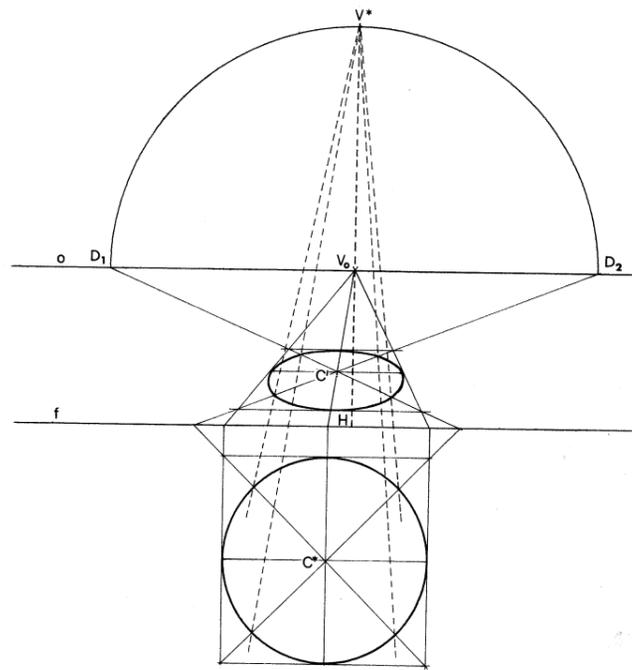


Fig. 11

lipse. Dato dunque il ribaltato del cerchio (fig. 11), e costruito il quadrato circoscritto con due lati paralleli alla fondamentale, se ne traccino le diagonali e gli assi; risultano così individuati otto punti del cerchio - di cui quattro con le relative tangenti -, cioè gli estremi degli assi del quadrato e i punti sulle diagonali.

Per il tracciamento dell'ellisse, che si costruisce come trasformata del cerchio nell'*omologia* (inversa) *di ribaltamento*, si ricordi che i punti A' e B' , immagini degli estremi A, B del diametro del cerchio parallelo ad f , non delimitano l'asse maggiore dell'ellisse, in quanto punti di contatto delle tangenti che concorrono nel punto $F'_a \equiv V_o$; come il punto C' , immagine del centro C del cerchio, non coincide con il centro dell'ellisse⁶, circostanza che si verifica invece nell'omologia affine, caratteristica delle proiezioni parallele (Cfr. Parte I, 2.3.E.2.).

3. Altezze prospettiche. Solidi regolari. Nella prospettiva a quadro verticale, la determinazione dell'altezza prospettica di un segmento verticale AB , con il punto A di immagine A' sul geometrale (fig. 12), si effettua costruendo la traccia t_α di un piano α , evidentemente verticale, cui appartiene AB (e dunque

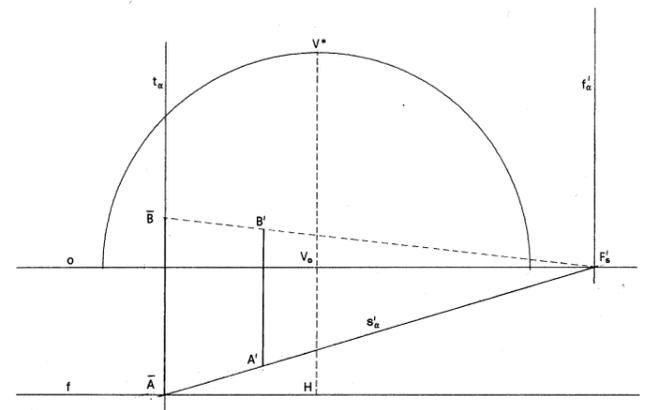


Fig. 12

con s'_α passante per A'), staccando dal punto \bar{A} , in cui t_α secca la fondamentale, un segmento $\bar{A}B$ uguale all'altezza obiettiva (ridotta alla scala del riferimento prospettico), e infine trasformando tale segmento mediante l'*omotetia* (S.-V., p. 102) di centro F'_s , fuga della traccia geometrale s'_α di α , e punti corrispondenti \bar{A}, A' .

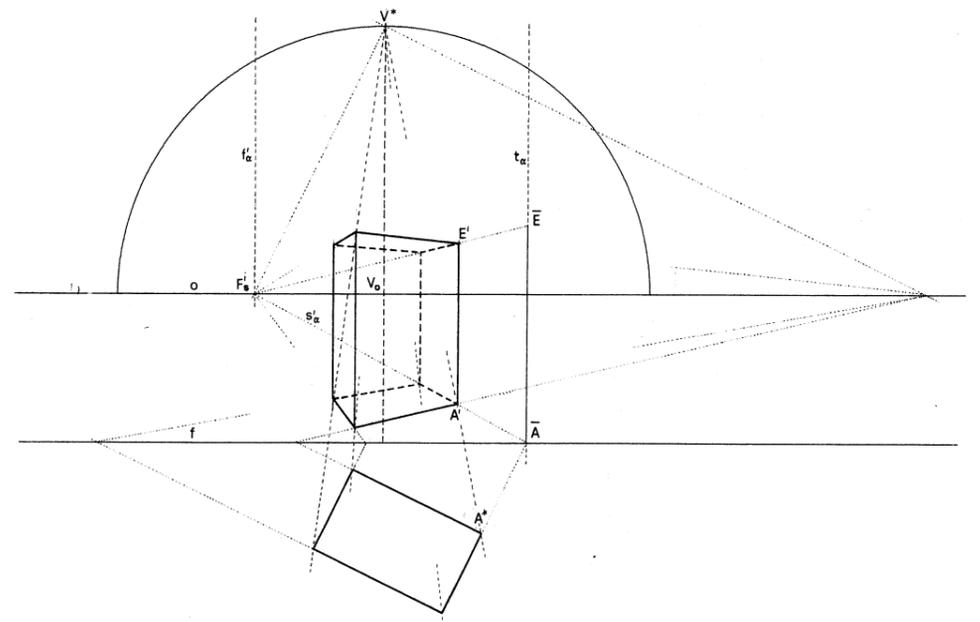


Fig. 13a

Le rette verticali, in quanto parallele al quadro, hanno le immagini parallele tra loro e alle rette obiettive; da ciò consegue che, in una prospettiva a quadro verticale, *segmenti uguali su rette verticali si proiettano in segmenti uguali*: infatti ogni proiezione che mantiene il parallelismo, oltre ai birapporti, come in ogni proiezione, mantiene anche i rapporti semplici. Costruita l'immagine della base inferiore di un *parallelepipedo rettangolo* (o di un *cilindro circolare retto*), la prospettiva della base superiore si può costruire come trasformata omologica di quella inferiore nell'*omologia affine ortogonale* avente come asse la retta di orizzonte o e come punti corrispondenti due vertici, ad esempio A', E' , appartenenti allo stesso spigolo verticale (o rispettivamente i punti C_1', C' nel caso del cilindro, figg. 13a, b): infatti le immagini delle due basi sono le proiezioni dal centro di vista V di due figure piane prospettive – cioè tali che si possano considerare l'una proiezione dell'altra, dal punto improprio delle rette verticali (S.-V., p. 19) – i cui piani (paralleli) hanno in comune la retta impropria di immagine o . Per costruire una coppia di punti omologhi mediante l'altezza prospettica di uno spigolo verticale (o dell'asse), si stacchi ad esempio sulla semiretta verticale per il punto T_s – traccia della retta s_α passante per A (per C_1) – il segmento $\overline{A'E'}$ ($\overline{C_1'C}$) di misura uguale all'altezza data e nella scala

adottata, e si determini il punto $E'(C')$ corrispondente di $\overline{E'(C_1')}$ nell'omotetia sopra citata di centro F'_s (D_1) fuga della retta s_α .

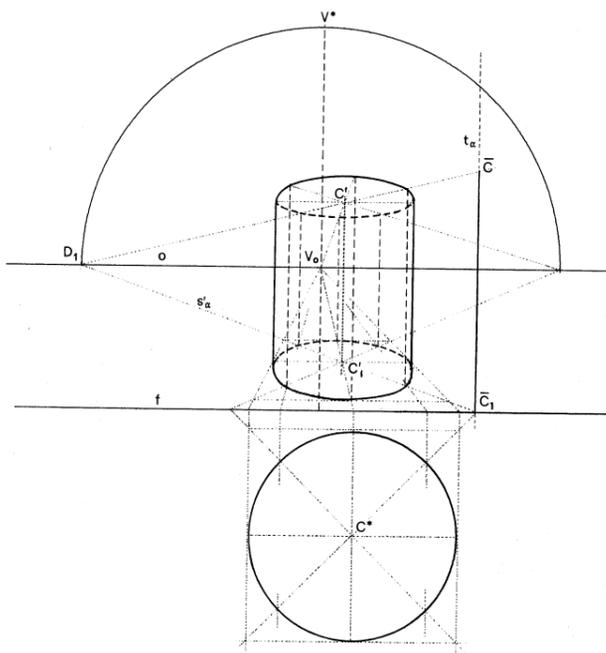


Fig. 13b

Nella figura 14 è costruita la prospettiva di un portico ad archi con il metodo del ribaltamento.

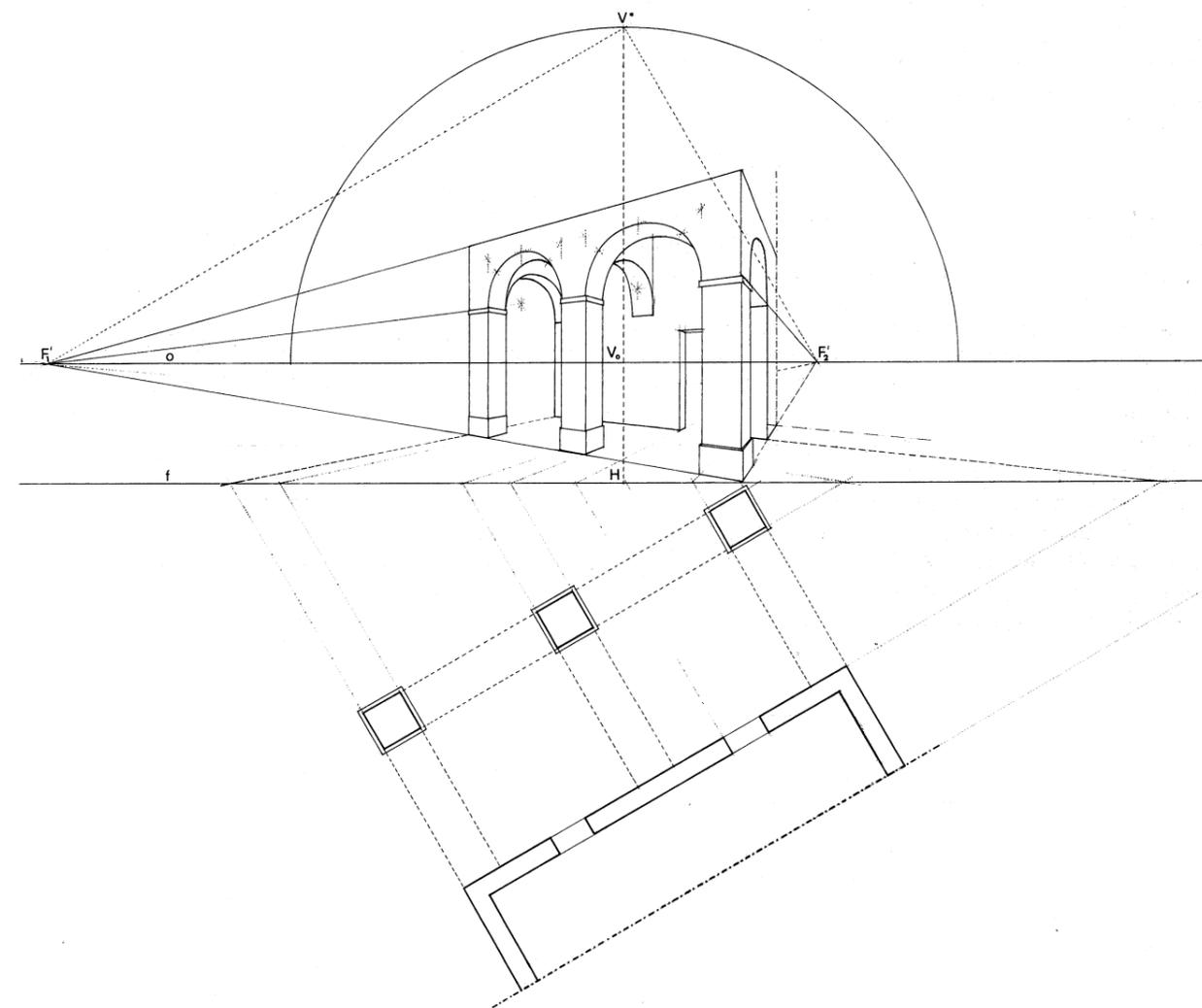


Fig. 14

4. *Sezioni prospettiche.* Il metodo del ribaltamento si presta vantaggiosamente anche per la costruzione delle *sezioni prospettiche*, quando si assuma come quadro il piano di una opportuna sezione mongiana dell'edificio: gli elementi sezionati, restando in vera forma, facilitano le operazioni successive. La sezione prospettica risulta particolarmente efficace per la rappresentazione di singoli ambienti, oppure di edifici caratterizzati da vasti e articolati spazi interni come chiese, teatri, gallerie, ecc.

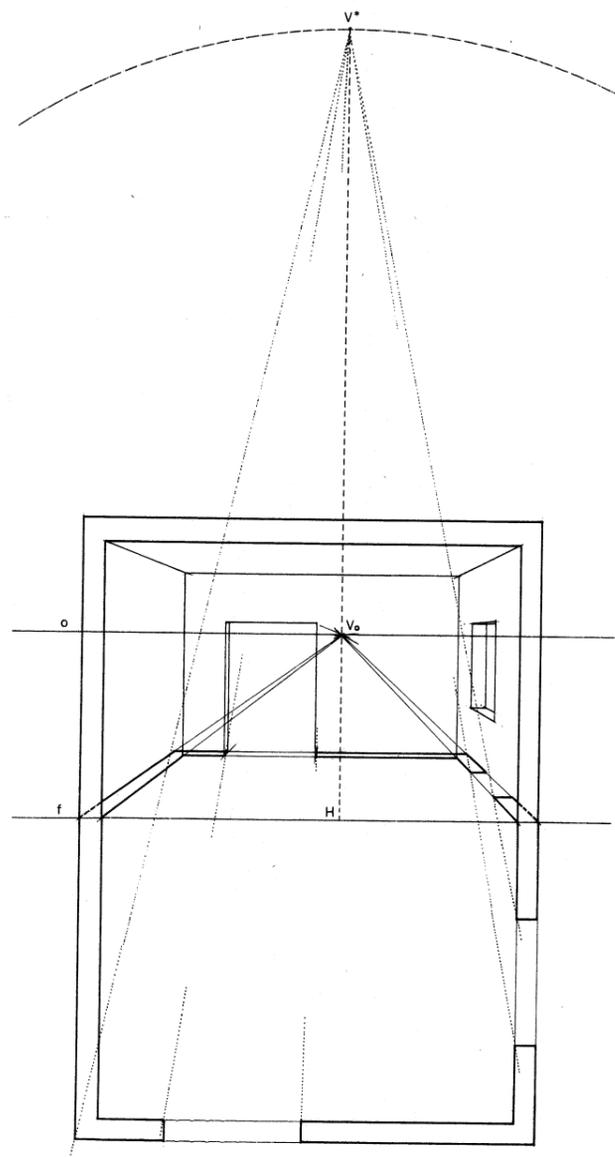


Fig. 15

Disegnata sul quadro la sezione in vera forma e nella scala del riferimento prospettico, l'immagine si completa, dopo aver costruito la prospettiva della pianta col metodo del ribaltamento, determinando le altezze prospettiche degli spigoli verticali interni e di ogni altro elemento in profondità (fig. 15).

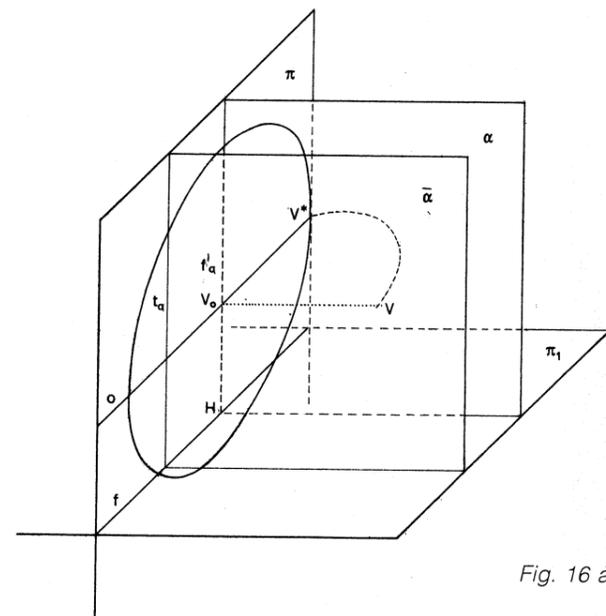


Fig. 16 a

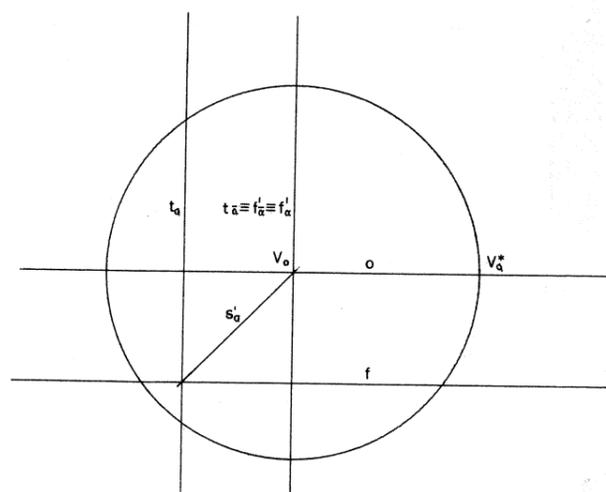


Fig. 16 b

2.4 *Figure in piani verticali*

1. Per costruire la prospettiva di *figure appartenenti a piani verticali*, come profili di finestre o di altre presenze sulle facciate non parallele al quadro (ricordiamo che le figure in piani paralleli al quadro conservano la forma), profili diversi dal rettangolo – l'immagine del rettangolo potendosi costruire direttamente –, è talvolta opportuno operare il ribaltamento su π del piano α della facciata e, disegnata la figura in vera forma e omologia, costruirne la relativa immagine mediante l'omologia (inversa) di ribaltamento.

Se il piano α è ortogonale al quadro, la fuga f'_α passa per V_0 – coincidendo con la retta V_0V^* – e il punto V^*_α , ribaltato di V rispetto al piano proiettante α parallelo ad α e avente come traccia-fuga la retta $t_\alpha \equiv f'_\alpha \equiv f_\alpha$ (S.-V., p. 120), cade in una delle intersezioni del cerchio di distanza con la retta o (figg. 16 a, b): l'omologia è dunque determinata dal centro V^*_α , asse e retta limite rispettivamente t_α ed f'_α .

2. Nel caso più frequente di un *piano verticale alpha non ortogonale al quadro*, il punto V^*_α cade sulla retta o a una distanza dal punto K (intersezione di f'_α con la retta o) uguale al segmento KV^* (S.-V., pp. 166 segg.). Nella figura 17 la traccia e la fuga del piano α sono le rette verticali t_α ed f'_α – passanti per T_s e per $F'_s \equiv K$, rispettivamente traccia e fuga della retta s_α –, che assumono ancora il ruolo di *asse* e *retta limite* nell'omologia di ribaltamento. Individuata la coppia di punti corrispondenti F'_s e $F^*_{s\infty}$, allineati con V^*_α , si costruisca il ribaltato del rettangolo-facciata. Disegnata ora al suo interno la figura data, ad esem-

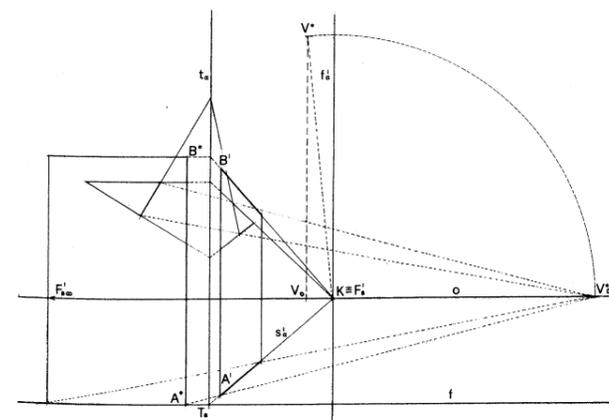


Fig. 17

pio un triangolo, se ne determini l'immagine prospettica mediante le consuete operazioni dell'omologia. Con lo stesso procedimento si costruisce l'immagine di una *apertura circolare* (fig. 18) o di un *arco a tutto sesto* nel piano di una facciata, cioè in un piano verticale (fig. 19), ricordando le operazioni già descritte per la prospettiva di un cerchio appartenente al piano geometrico (cfr. 2.3.E.4.).

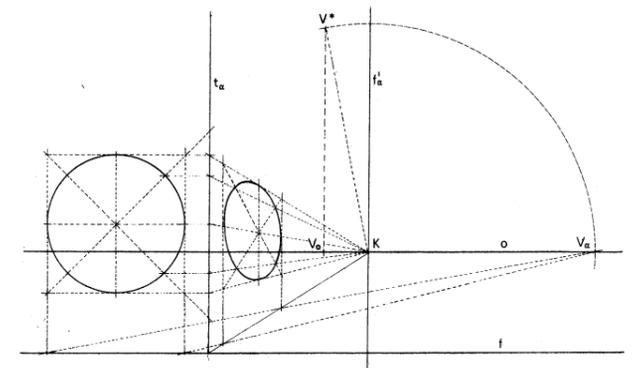


Fig. 18

2.6 Metodo dei punti di fuga

1. *Scelta del riferimento.* Il metodo (o procedimento) detto "dei punti di fuga" comporta operazioni simultanee su due piani di lavoro distinti, quello della rappresentazione mongiana per le costruzioni preparatorie, e quello della rappresentazione prospettica; di conseguenza i numerosi trasporti di misure dall'uno all'altro, nonché il cambiamento di scala – che nel nuovo riferimento viene generalmente accresciuta – comportano la possibilità di errori e imprecisioni, oltre a un tempo di esecuzione notevole e più lungo. Per tali motivi è opportuno che la scelta di questo procedimento sia riservata a quei casi in cui le dimensioni della pianta (dell'edificio o del complesso) non siano contenibili, in una scala sufficientemente elevata, nello stesso foglio del riferimento prospettico, come richiede invece il metodo del ribaltamento. La scelta del punto di vista e del quadro rispetto all'oggetto viene dunque operata sul foglio in cui l'oggetto stesso è rappresentato nel metodo di Monge, e in tale sede vengono verificate le condizioni di buona visibilità, che si traducono nell'imporre la condizione che l'oggetto venga a trovarsi all'interno del cono ottico.

2. *Prospettiva accidentale.* Per la costruzione della prospettiva accidentale di un edificio, che risulta assai più efficace di una prospettiva frontale, è opportuno che nel disegno preparatorio mongiano la base ABCD del parallelepipedo (o la pianta dell'edificio) venga disposta in posizione obliqua rispetto alla linea di terra (e dunque rispetto al secondo piano di proiezione), affinché siano facilitate le successive operazioni di trascinamento sul foglio della prospettiva. Stabilito che il piano geometrico π_1 coincida con il primo piano della proiezione mongiana, il centro di vista V , rappresentato dalle due proiezioni V'' , V' , deve risultare a una distanza compatibile con una buona visione dell'oggetto (fig. 21a): scelto allora il punto V' in prima approssimazione (cioè a una distanza nel rapporto 1,5/1 rispetto alla lunghezza della diagonale principale del parallelepipedo), le radenti condotte da V' al rettangolo-base devono formare un angolo non superiore ai 45° - 50° e tale che resti diviso dalla retta per V' , parallela alla linea di terra l e asse del cono visivo, in angoli ciascuno dei quali non superi i 23° - 25° ; la quota $V''V'_1$ del punto V deve essere uguale (nella scala mongiana adottata) all'altezza (dell'occhio) dell'osservatore: condotte da V'' le radenti all'alzato del parallelepipedo, si effettui analogo verifica relativa al cono ottico, il cui asse

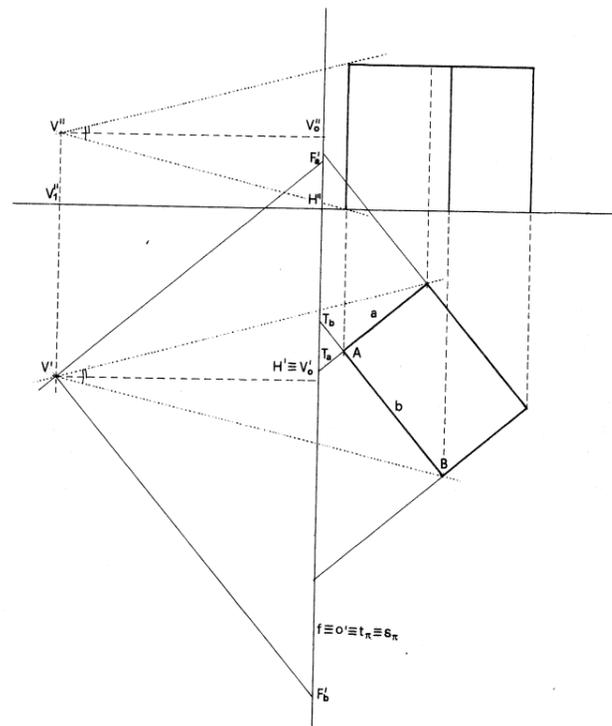


Fig. 21 a

coincida con la retta $V''V'_0$, parallela a l . Se la scelta del punto di vista non risponde ai requisiti richiesti, è necessario allontanare ulteriormente dalle due proiezioni dell'oggetto la coppia V'' , V' . Poiché anche nello spazio la retta VV_0 è parallela alla linea di terra, il quadro π della prospettiva, ortogonale alla stessa VV_0 , ha le tracce coincidenti nella retta verticale $t_\pi \equiv s_\pi$, e dunque il quadro stesso nella rappresentazione mongiana è un piano di profilo. In quella retta coincidono ancora le immagini di tutte le rette di π e dunque, oltre alla retta f , che obiettivamente coincide con s_π , vi coincide pure la prima proiezione o' della retta di orizzonte o ; la distanza tra i punti V''_0 e H'' risulta uguale all'altezza dell'osservatore $V''V'_1$. Passando ora al foglio della prospettiva (fig. 21b), per costruire il relativo riferimento si traccino le rette o ed f – la cui distanza sia uguale a quella dell'osservatore, cioè alla quota mongiana V''_1V'' del punto V riportata alla scala, generalmente maggiore, stabilita per il riferimento prospettico –, e si scelga sulla retta di orizzonte o il punto V_0 , centro del cerchio di distanza il cui raggio sia uguale al segmento mongiano $V''V''_0 = V''V'_0$, riportato alla nuova scala. Il tracciamento di tale cerchio, talvolta di notevole difficoltà

a causa della elevata misura del raggio, in questo procedimento non è indispensabile, potendosi ricavare tutti i dati metrici dal disegno preparatorio.

4. Infatti per la costruzione prospettica di ciascuna retta cui appartengono i lati della base, tanto la traccia che il punto di fuga si determinano prioritariamente sul foglio delle proiezioni mongiane (cfr. fig. 21a): ad esempio, prolungato il segmento AB , la traccia T_b della retta $b \equiv AB$ cade nell'intersezione con la retta $f \equiv s_\pi$; il punto di fuga F'_b si determina sulla retta o' , che coincide con f , conducendo da V' la parallela alla retta b .

I punti T_b ed F'_b così ottenuti devono essere riportati sul foglio della prospettiva (cfr. fig. 21b) dopo averne misurato le distanze dal punto $V''_0 \equiv H'$ della rappresentazione mongiana: il primo sulla retta f e il secondo

completa con le immagini dei due lati rispettivamente paralleli ai primi, dei quali è sufficiente dunque determinare nel riferimento mongiano le sole tracce, coincidendo i relativi punti di fuga con i precedenti.

3. Se la base del parallelepipedo è una figura irregolare, oppure ha un perimetro con un numero maggiore di lati, per ciascuno di essi è necessario evidentemente determinare sia la traccia che il punto di fuga delle rette cui appartengono. Se infine il perimetro di base è in tutto o in parte costituito da curve, l'immagine prospettica si costruisce scegliendo opportunamente un adeguato numero di punti, per ciascuno dei quali, ad esempio il punto A , si traccino una coppia di rette ausiliarie, come la perpendicolare p al quadro (e alla fondamentale) e una retta d inclinata ad esso di 45° (fig. 22a). Determinate la

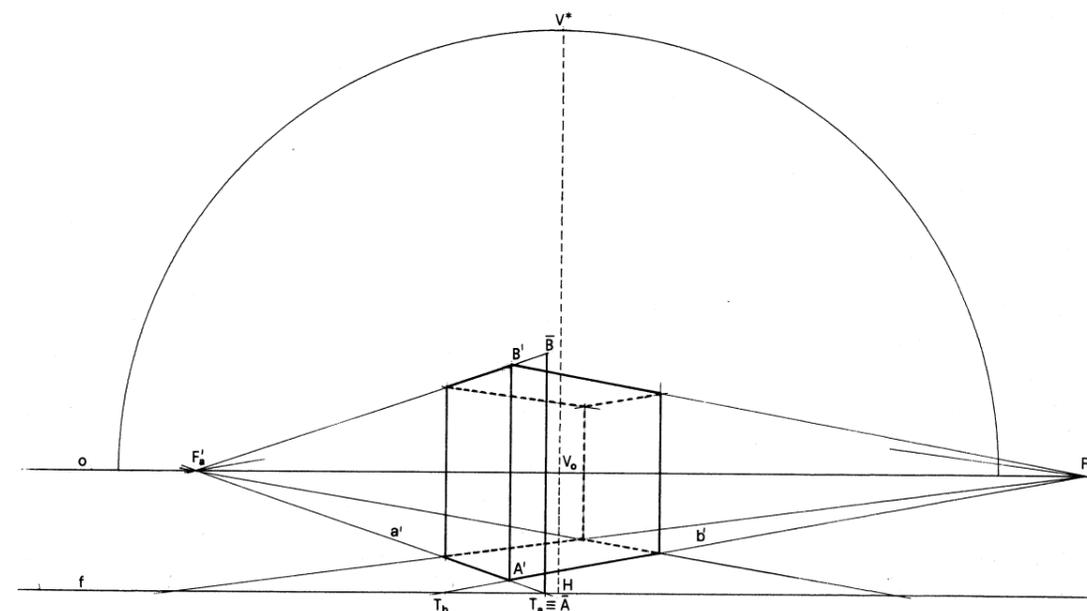


Fig. 21 b

do sulla retta o – a quelle stesse distanze (ma nella nuova scala) e nello stesso verso – rispettivamente dal punto V_0 e dal punto H del riferimento prospettico; nel nostro caso entrambi i punti cadono a sinistra della retta V_0H : la retta a' , immagine prospettica della retta b , è quella che congiunge T_b con F'_b . Riportate ancora la traccia T_a e la fuga F'_a della retta a della rappresentazione mongiana rispettivamente sulle rette f ed o , se ne costruisca in maniera analoga la prospettiva a' : il punto di intersezione A' delle rette a' e b' è l'immagine del vertice A . La prospettiva della base si

relative tracce T_p e T_q , i punti di fuga delle due rette cadono rispettivamente in $F'_p \equiv V_0$ e nel punto di distanza D_j ; la figura 22 b mostra le costruzioni sul quadro.

Nel caso di edifici, la prospettiva della pianta si completa, almeno per le parti visibili, con gli spessori murari e le interruzioni dei vani; o ancora, se ci si propone una rappresentazione in chiave strutturale, anche eventuali tramezzi e pilastri, scale ecc., le cui immagini di rette e punti notevoli si costruiscono nei modi descritti.

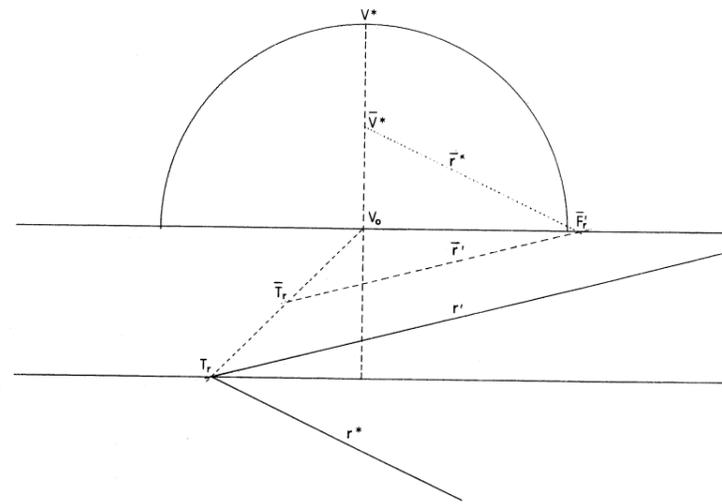


Fig. 26

3. Se infine si debba costruire la prospettiva della parallela a una retta data, per un punto C' non appartenente al geometrale, ad esempio estremo di uno spigolo verticale di un edificio, per completare il disegno della facciata mediante l'immagine dello spigolo orizzontale CD parallelo ad AB il cui punto di fuga sia inaccessibile (fig. 27), si costruisca, me-

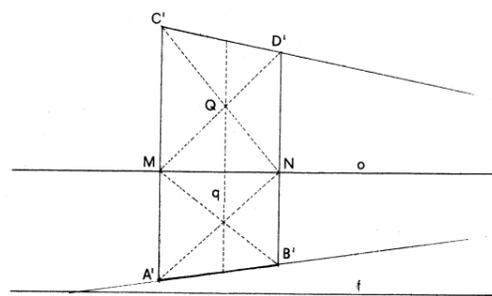


Fig. 27

dante le diagonali del quadrilatero $A'B'MN$ (dove M e N sono nell'ordine i punti d'intersezione con la retta o delle verticali per A' e per B'), la retta q immagine dell'asse della facciata; congiunto M con il punto Q in cui la retta $C'N$ incontra q , la retta MQ interseca la semiretta verticale per B' nel punto D' : il segmento $C'D'$ completa la prospettiva del rettangolo-facciata.

2.9 Metodo dei punti di misura

1. *Definizioni e costruzioni.* Il metodo (o procedimento) dei punti di misura, per la costruzione prospettica di figure del geometrale, offre la possibilità di ridurre notevolmente il numero delle operazioni preliminari da eseguire sul foglio della rappresentazione mongiana, con evidente vantaggio per la precisione del disegno e per il tempo di esecuzione: infatti, richiedendo un ridottissimo numero di costruzioni preparatorie, il metodo consente di lavorare quasi esclusivamente sul foglio della rappresentazione prospettica.

La denominazione è legata a particolari punti - detti *punti di misura* o *punti misuratori* - mediante i quali è possibile costruire la prospettiva di segmenti e di loro suddivisioni leggendone le relative misure sulla pianta mongiana, senza operare su questa alcuna costruzione ausiliaria, come avviene invece nel metodo dei punti di fuga.

Assegnato il riferimento prospettico, e data la ribaltata a^* di una retta a del geometrale (fig. 28) e determinatane la prospettiva a' , supponiamo di voler staccare su a' , a partire dalla traccia T_a , le prospettive di un numero n di segmenti $T_a A, A1, 12, \dots$ appartenenti alla retta a .

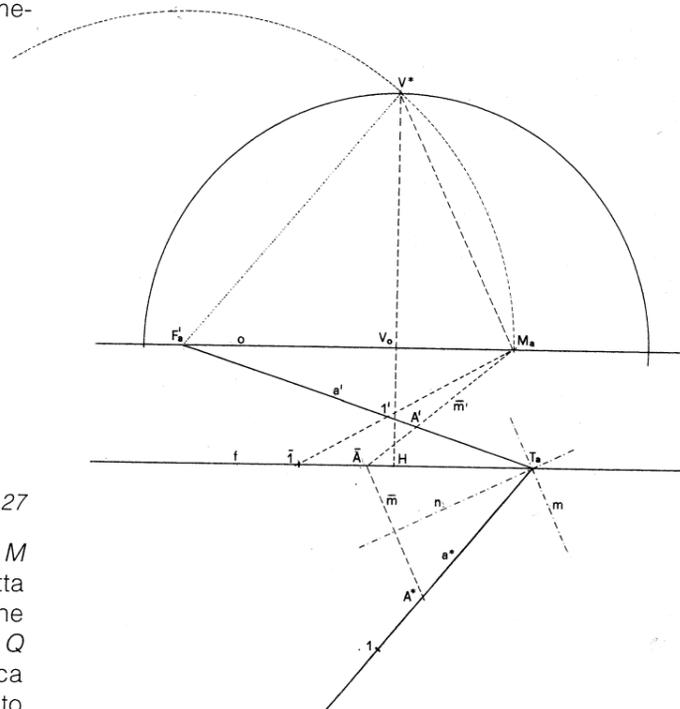


Fig. 28

Ricordando la proprietà secondo la quale *le parallele a una delle bisettrici degli angoli formati da due rette staccano su queste segmenti uguali*, osserviamo che la retta \bar{m} - passante per A^* e parallela alla bisettrice m di uno degli angoli che la retta a^* forma con la fondamentale f - stacca su f un segmento $T_a \bar{A} = T_a A^*$; determinato sulla retta o il punto di fuga M_a della bisettrice m e della sua parallela \bar{m} - conducendo da V^* la parallela a \bar{m} - la prospettiva \bar{m}' di \bar{m} , che si ottiene congiungendo \bar{A} (punto che è anche la traccia di \bar{m}) con il punto M_a , interseca la retta a' nel punto A' , immagine del punto A comune alle rette \bar{m} ed a . Il punto M_a è il *punto di misura* della retta a e di tutte le parallele ad a .

Possiamo allora dare la definizione: *i punti di misura di una retta appartenente al geometrale sono i punti di fuga delle bisettrici degli angoli che la retta forma con la fondamentale.*

Resta ora da mostrare come si possa individuare il punto M_a sulla retta o senza far uso del ribaltamento: osserviamo che dalla similitudine dei triangoli $T_a \bar{A} A^*$, ed $F'_a M_a V^*$, di cui il primo è isoscele avendo due lati uguali per costruzione, risulta isoscele anche il secondo, e dunque i lati $F'_a M_a$ ed $F'_a V^*$, rispettivamente paralleli ai lati uguali del primo, sono uguali tra loro. Il punto M_a si determina allora tracciando il cerchio di centro F'_a e raggio $F'_a V^*$ (detto *cerchio di misura*, cfr. 2.9.2.), le cui intersezioni M_a ed N_a con la retta o sono i *punti di misura* della retta a e di tutte le sue parallele; il punto N_a , seconda intersezione

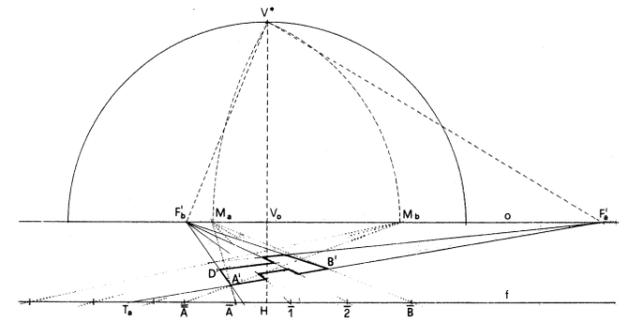


Fig. 29 b

del cerchio di misura con la retta o , è il punto di fuga dell'altra bisettrice n degli angoli che la retta a forma con la fondamentale. Dei due punti di misura di una retta a è più opportuno servirsi di quello situato dalla parte opposta a F'_a rispetto al punto V_o .

Per costruire la prospettiva di un poligono le cui coppie di lati opposti non siano ortogonali, determinata con l'ausilio delle proiezioni mongiane (fig. 29 a) la prospettiva a' (T_a, F'_a) della retta a , cui appartiene ad esempio il lato AB , si trasportino sulla fondamentale f , a partire dal punto T_a (misurandone le distanze direttamente sulla pianta mongiana), il primo estremo A in \bar{A} e di seguito tutti i punti notevoli $1, 2, \dots, B$ del segmento AB rispettivamente in $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{B}$, e si proiettino tali punti da M_a sulla retta a' in $A', 1', 2', \dots, B'$, mediante rette ausiliarie che sono le immagini di altrettante parallele alla bisettrice m (fig. 29b).

Il punto di fuga F'_b della retta $b \equiv AD$ si determina tracciando da V^* la retta \bar{b}^* che formi con la retta $V^* F'_a$ un angolo uguale a quello obiettivo BAD che determina sulla retta o il punto F'_b ; l'immagine b' della retta b è quella che congiunge il punto A' con F'_b ; dal punto di misura M_b si proiettino A' sulla fondamentale f in \bar{A} e, staccata da questo punto sulla fondamentale la misura del lato AD in \bar{D} , si proiettino \bar{D} in D' su b' , e così procedendo si determinino le eventuali altre suddivisioni della stessa retta. La figura 29 c mostra la rappresentazione prospettica, con il metodo dei punti di misura, di due vani simmetrici aperti in una muratura perimetrale.

Nel caso di rette ortogonali alla fondamentale (e al quadro), il cui punto di fuga è V_o , i relativi punti di misura coincidono con i punti di distanza; quelli delle rette parallele alla fondamentale coincidono nel punto V_o .

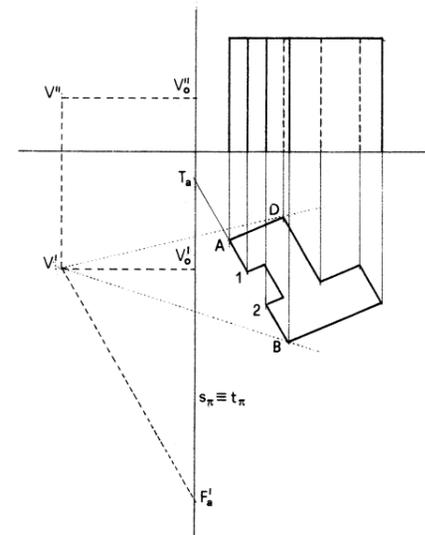


Fig. 29 a

Esercizi

E.1. Per costruire con il metodo dei punti di misura la prospettiva di un *parallelepipedo rettangolo* si proceda, per la determinazione della base inferiore, come sopra descritto, ricordando che in questo caso le rette $V^*F'_a$ e $V^*F'_b$, in quanto parallele alle coppie di lati opposti del rettangolo, sono ortogonali (fig. 30 a, b). Se tale rettangolo è il perimetro della pianta di un edificio, è possibile, servendosi dei punti di misura, individuare sulle immagini dei lati i punti relativi alle aperture, come porte e finestre, o ad altre presenze notevoli (cfr. fig. 29c). Completa la rappresentazione del parallelepipedo l'immagine della base superiore, costruita come trasformata della prima nell'*omologia affine ortogonale* di asse o e di cui gli estremi $A'E'$ di uno spigolo verticale sono punti corrispondenti.

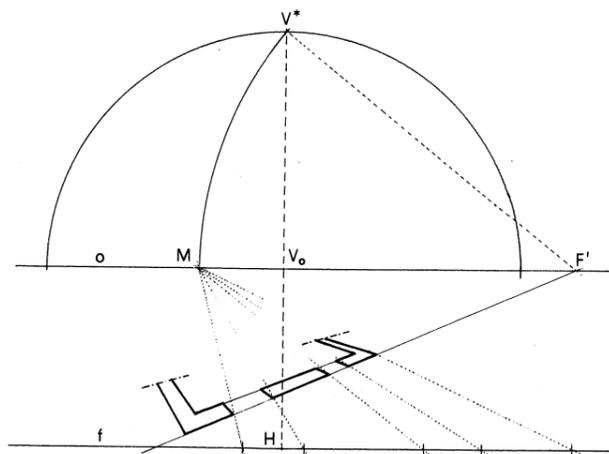


Fig. 29c

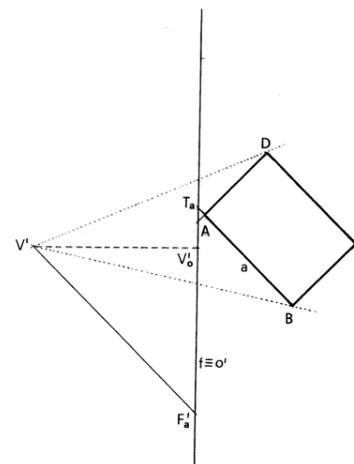


Fig. 30a

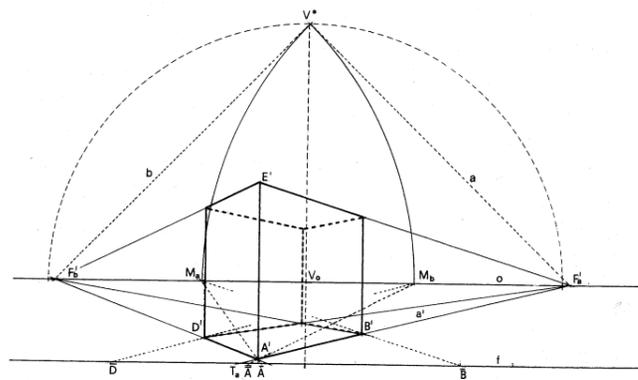


Fig. 30b

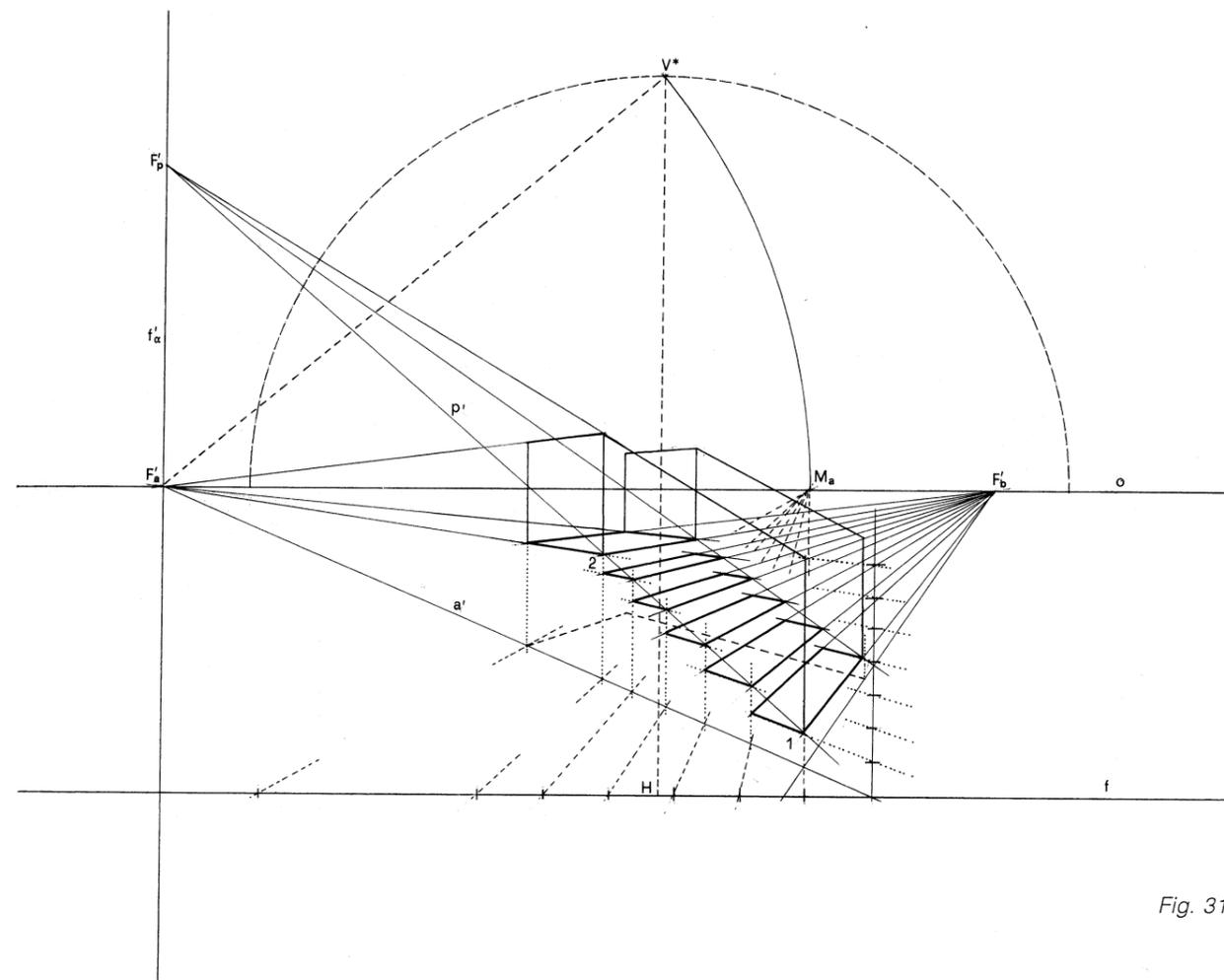


Fig. 31

E.2. Per la corretta riduzione prospettica degli scalini di un *rampante di scala* (rappresentata in chiave strutturale, priva cioè di spessori o di altre indicazioni materiche), è opportuno, dopo aver costruito l'immagine del rettangolo-pianta, servirsi della retta di pendenza p della scala (fig. 31): l'immagine p' si può determinare congiungendo il punto 1 relativo alla quota del primo gradino con il punto 2 del pianerotolo; il punto di fuga F'_p , intersezione di p' con la fuga f'_α del piano verticale α che contiene p , consente la costruzione dell'altra retta di pendenza e dei corrimano, le cui immagini concorrono tutte in F'_p . La suddivisione di un lato della pianta prospettica nel corrispondente numero di scalini è affidata ai punti di misura.

2. *Cerchio di misura*. Il concetto di punto di misura si può estendere a tutte le rette dello spazio, sostituendo all'espressione "retta fondamentale" l'equivalente "traccia di un piano che contiene la retta". Se dunque di una retta r , comunque inclinata nello spazio, sono noti (o è possibile costruire) il punto di fuga F'_r e la traccia T_r , il cerchio di centro F'_r e raggio uguale alla distanza di F'_r dal centro di vista V è il *luogo dei punti di misura della retta r* (considerata come asse di un fascio di piani, quindi appartenente a ciascuno di essi) e pertanto è detto *cerchio di misura* di r . Per determinarne il raggio F'_rV , si ribalti il piano γ proiettante, ortogonale al quadro e parallelo ad r - la cui traccia-fuga $t_\gamma \equiv f'_\gamma$ è la retta F'_rV_o - e con esso il punto V in V^*_γ ; il segmento $F'_rV^*_\gamma$ è il

raggio del cerchio di misura di r (fig. 32). Ciascuna coppia di punti di misura della retta r cade allora nelle intersezioni di tale cerchio con ognuna delle rette di fuga, ad esempio f'_α (evidentemente tutte passanti per F'_r) dei piani del fascio di asse r . Sulla traccia t_α del piano α si possono staccare in vera grandezza i segmenti di r a partire dalla traccia T_r , proiettandoli poi su r' da quello dei due punti di misura su f'_α che appare in posizione più idonea.

2.10 Metodo dei piani proiettanti

1. *Definizione e costruzioni.* Il metodo dei piani proiettanti – definendosi *proiettante* ogni piano passante per il centro di vista V (S.-V., p. 120) – si avvale di piani di questo tipo condotti per gli spigoli verticali degli edifici, o più in generale di piani per V e per le rette verticali passanti per i punti notevoli dell'oggetto da rappresentare.

Data ad esempio la rappresentazione mongiana di un *parallelepipedo rettangolo* (fig. 33), ed effettuata come di consueto la scelta del punto $V(V'', V')$ e del quadro $\pi(s_\pi \equiv t_\pi)$, si operi una traslazione orizzontale della retta $s_\pi \equiv t_\pi$ (nella quale coincidono le due tracce mongiane del quadro π) e sulla nuova retta $s_\pi \equiv t_\pi$ si proiettino ortogonalmente tutti i punti $1'', 2'', \dots$; e $1', 2', \dots$; che sono le proiezioni sul quadro rispettivamente da V'' e da V' delle seconde e delle prime immagini dei vertici della base inferiore. Ribaltato il

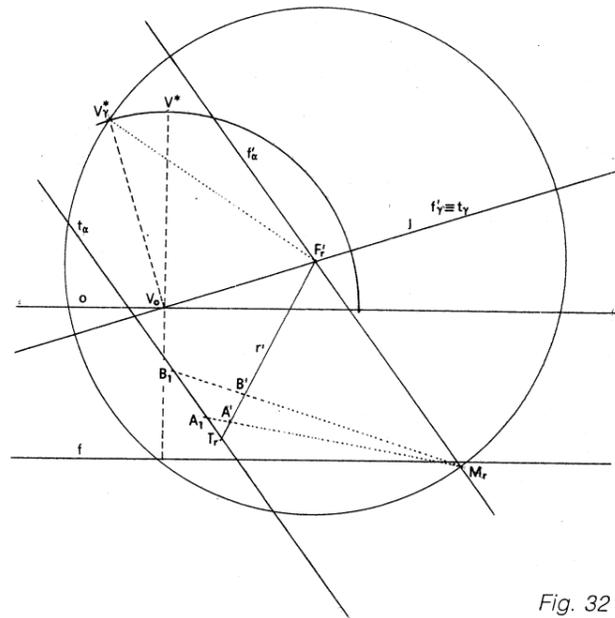


Fig. 32

quadro stesso intorno alla nuova posizione t_π della seconda traccia, l'immagine della base inferiore si ottiene congiungendo nell'ordine i ribaltati $1^*, 2^*, \dots$ dei punti $1, 2, \dots$: le semirette verticali passanti per $1^*, 2^*, \dots$ sono le prospettive degli spigoli verticali e ad un tempo le tracce sul quadro dei piani proiettanti condotti per tali spigoli, le prime tracce mongiane di

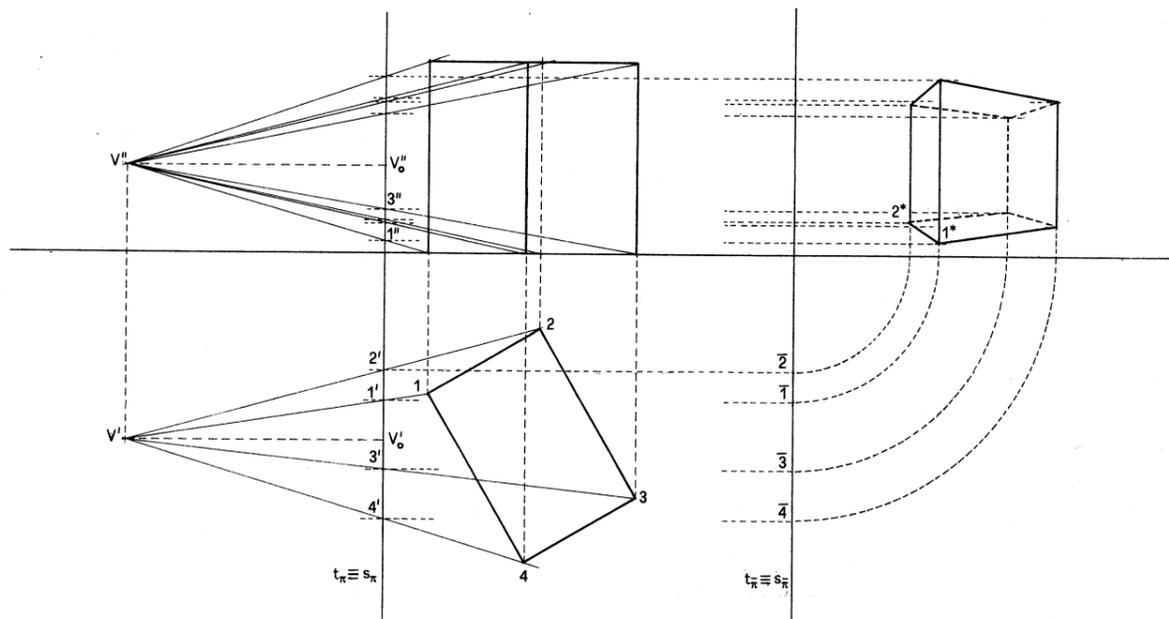


Fig. 33

tali piani essendo le rette V_1', V_2', \dots che congiungono V' con i vertici della base. Proiettando ortogonalmente sugli spigoli verticali anche le seconde immagini dei vertici della base superiore e congiungendoli nello stesso ordine, si completi la prospettiva del parallelepipedo.

Questo procedimento può riuscire vantaggioso in quei casi in cui tutti i punti di fuga delle rette orizzontali cadano al di fuori del foglio da disegno, quando cioè si operi in una scala del riferimento piuttosto elevata, oppure si tratti di complessi molto estesi che richiedono una distanza rilevante del centro di vista V dal quadro.

3 Prospettiva a quadro inclinato

3.1 Generalità

1. Nella costruzione di una prospettiva, non sempre è conveniente la scelta del quadro in posizione verticale (che corrisponde a una direzione orizzontale del raggio visuale principale), risultando talvolta assai più efficaci le immagini ottenute inclinando il quadro. Il raggio visuale rivolto verso l'alto, comporta un'inclinazione del quadro verso l'osservatore e di conseguenza una *prospettiva dal basso* (fig. 34 a); viceversa il raggio visuale rivolto verso il basso, un'inclinazione del quadro verso l'oggetto e dunque una *prospettiva dall'alto*, detta pure quest'ultima "a volo d'uccello" (fig. 34 b); nel primo caso l'angolo del semipiano superiore del quadro con il semipiano

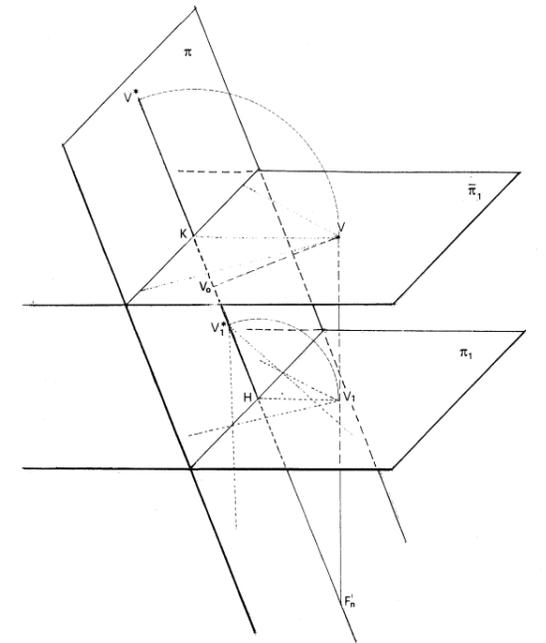


Fig. 34 b

del geometrico che contiene il punto V_1 è acuto; nel secondo ottuso.

La prima scelta è riservata generalmente a edifici di notevole altezza rispetto alle dimensioni di pianta, come torri e grattacieli; la seconda è meglio adeguata alla rappresentazione di organismi dalla planimetria complessa e articolata, consentendone una più completa e globale visione.

I procedimenti, analoghi a quelli per la prospettiva a quadro verticale, presentano tuttavia alcune differenze dovute al fatto che il quadro in questo caso è un piano generico rispetto alle rette verticali.

3.2 Metodo del ribaltamento

1. *Il riferimento.* Anche con il quadro inclinato è possibile la costruzione della pianta prospettica mediante il ribaltamento del piano geometrico: nel caso della *prospettiva dal basso*, la distanza delle rette o ed f risulta di poco superiore (nella scala prescelta) all'altezza dell'osservatore; nella *prospettiva dall'alto* la distanza tra le due rette o ed f sarà tanto maggiore dell'altezza dell'oggetto quanto più dall'alto si desidera osservarlo (cfr. figg. 34 a, b).

Inoltre in entrambi i casi il punto principale V_0 non appartiene alla retta di orizzonte o , fuga del piano geometrico π_1 , non essendo tale piano ortogonale al quadro; nel primo caso V_0 cade al di sopra della retta o , nel secondo al di sotto, sempre sulla retta

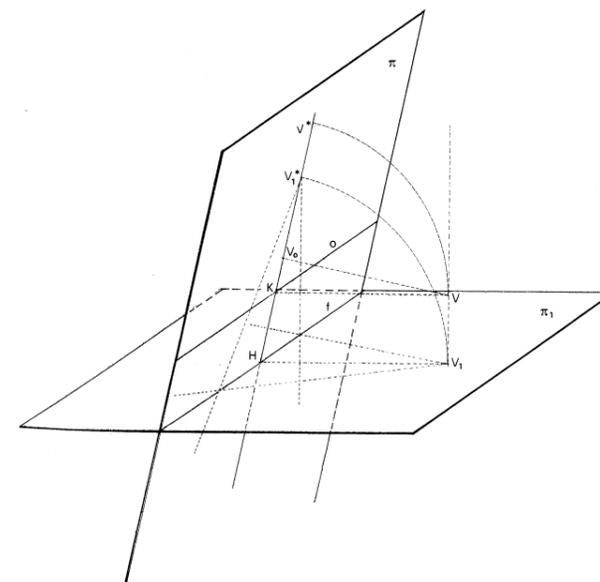
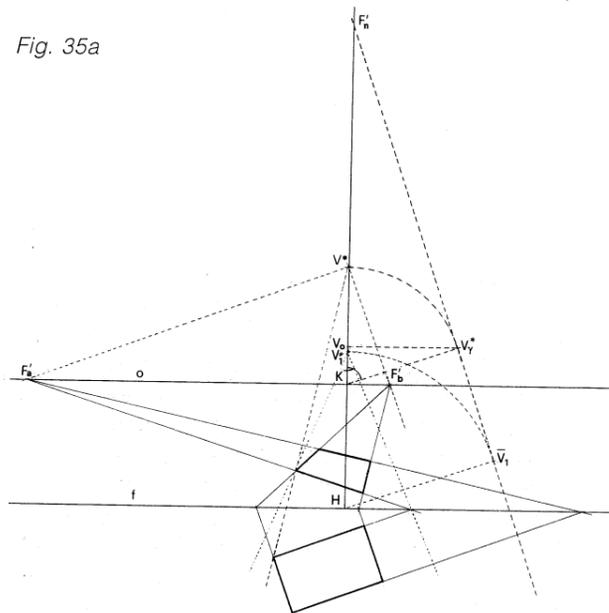


Fig. 34 a

HK , essendo K l'intersezione della traccia-fuga del piano visuale principale con la retta o ; e ancora, le rette verticali, in quanto non parallele al quadro, hanno le immagini concorrenti in un punto di fuga (proprio) F'_n che cade al di sopra o al di sotto della retta o a seconda che il quadro sia inclinato verso l'osservatore o verso l'oggetto.

2. *Costruzione del riferimento sul quadro.* Stabilita empiricamente la distanza principale sul foglio del disegno, per costruire correttamente il riferimento (figg. 35 a, b) si badi che il triangolo $KV^*_\gamma F'_n$ sia retto in V^*_γ (essendo V^*_γ il ribaltato di V rispetto al piano visuale principale γ), che siano rispettate cioè le note condizioni di ortogonalità tra rette e piani (S.-V., p. 143), condizioni coerenti con le reciproche posizioni di quegli elementi nello spazio (cfr. figg. 34a, b).

Fig. 35a



Inoltre il ribaltato V^* di V rispetto al piano di orizzonte, nella prospettiva a quadro inclinato, cade sulla retta HK , a una distanza da K uguale a KV^*_γ ; e ancora i punti di distanza D_1 e D_2 , fughe delle rette orizzontali inclinate alla fondamentale di 45° , sono le intersezioni con la retta o della circonferenza di centro K e raggio KV^*_γ ; e infine il punto di fuga delle rette ortogonali alla fondamentale coincide con il punto K , mentre V_o è ancora il punto di fuga delle rette ortogonali al quadro.

Per verificare la correttezza della posizione del punto V rispetto all'oggetto, affinché la pianta sia contenuta nel cono visivo, si costruisca sulla retta HK il ribaltato V^*_γ del punto V_γ , proiezione geometricale di V (cfr.

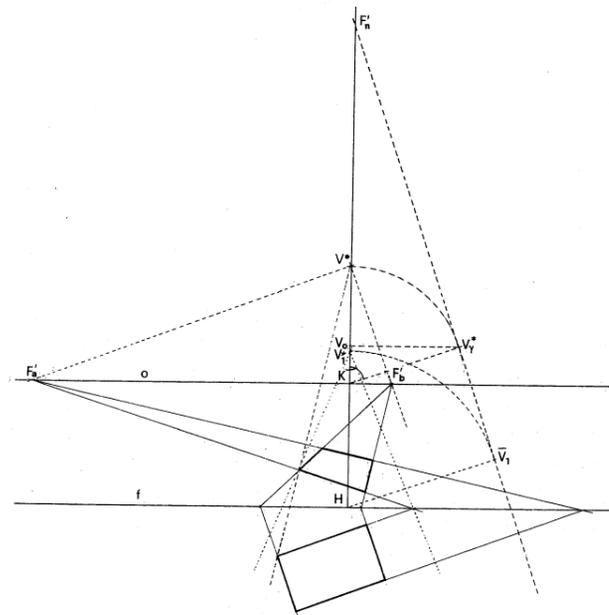


Fig. 35b

figg. 34a, b), tracciando l'arco di cerchio con centro in H e raggio uguale al segmento HV_γ , quest'ultimo ottenuto conducendo da H la parallela a KV^*_γ (cfr. figg. 35a, b); infine si verifichi che la ribaltata della figura, al di sotto della linea di terra, sia compresa nell'angolo di vertice V^*_γ di asse KH , proiezione geometricale del cono ottico, e pertanto di $45^\circ/50^\circ$. L'immagine prospettica si costruisce come corrispondente della ribaltata nella nota *omologia* di centro V^* , asse e *retta limite* rispettivamente le rette f ed o . Osserviamo ancora che con il metodo del ribaltamento l'inclinazione del quadro rispetto al geometricale si può conoscere misurando nelle figure citate l'angolo tra le rette F'_nK e KV^*_γ ; infatti la prima è una retta di massima pendenza del quadro rispetto al piano geometricale π_1 , la seconda è la ribaltata di una retta orizzontale e dunque parallela a π_1 (cfr. figg. 34a, b).

3. Nelle stesse figure 35 a, b sono state costruite le immagini prospettiche di figure appartenenti al geometricale con il metodo del ribaltamento.

3.3 Metodo dei punti di fuga

1. *Scelta del riferimento.* Il metodo detto "dei punti di fuga" richiede, come è noto, che la scelta del riferimento venga effettuata rispetto alla rappresentazione mongiana dell'oggetto. Dato ad esempio un *parallelepipedo rettangolo*, si determini come di consueto la posizione del centro di vista $V(V'',V')$ rispet-

to alle proiezioni mongiane del solido: il quadro sarà inclinato verso l'osservatore o verso l'oggetto secondo che l'asse VV_o del cono visivo sia rivolto rispettivamente verso l'alto o verso il basso, cioè secondo le dimensioni dell'oggetto e la quota di V . Inoltre, come nella prospettiva a quadro verticale, ciascuno dei due angoli, in cui la retta $V''V''_o$ divide l'angolo delle radenti, condotte da V'' all'alzato dell'oggetto, non deve superare i $23^\circ-25^\circ$. Il quadro π è rappresentato dalle due tracce t_π e s_π , rispettivamente ortogonali alle rette $V''V''_o$ e $V'V'_o$: π è infatti ortogonale al secondo piano π_2 della rappresentazione mongiana ma, diversamente dal caso della prospettiva a quadro verticale, non a π_1 (S.-V., p. 202); pertanto la prima traccia s_π coincide ancora con la fondamentale f , mentre la retta o' , prima immagine di o , è distinta da s_π ma, in quanto proiezione di una retta orizzontale di π , risulta ad essa parallela (figg. 36a, b).

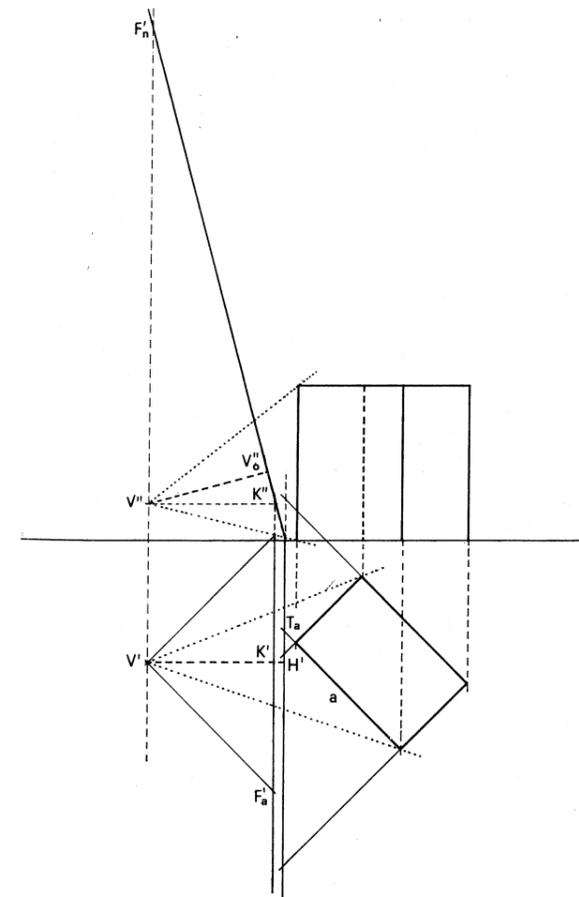


Fig. 36a

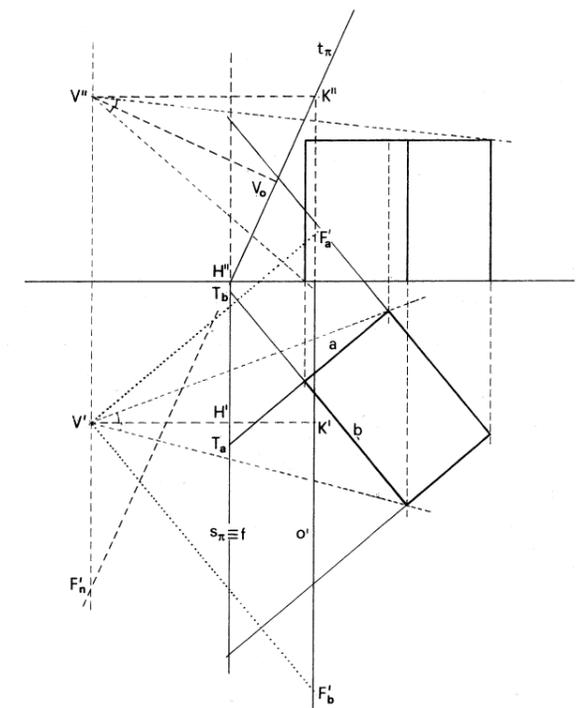


Fig. 36b

Per la *prospettiva dal basso*, scelta nel modo consueto la posizione del punto $V(V'',V')$ di quota circa uguale all'altezza dell'osservatore, e condotte le radenti da V'' all'alzato dell'edificio verificando che il loro angolo non superi i 50° , si tracci la retta $V''V''_o$, asse del cono visivo, che divide l'angolo delle radenti in angoli ciascuno non superiore a 25° : le tracce del quadro, t_π e s_π (cfr. fig. 36 a) sono rispettivamente perpendicolari alla retta $V''V''_o$ e alla linea di terra (fig. 39 a). Nel caso della *prospettiva dall'alto*, il punto V ha una quota evidentemente più elevata rispetto all'altezza dell'oggetto: di conseguenza il raggio visuale principale $V''V''_o$ in seconda proiezione mongiana è inclinato verso il basso e dunque la retta t_π del quadro, ortogonale alla retta $V''V''_o$, risulta inclinata verso l'oggetto (fig. 36b).

In entrambi i casi, condotta dal punto V'' la parallela alle rette verticali, questa interseca la seconda traccia t_π del quadro nel punto F'_n , fuga di quelle rette: come è evidente, tale punto cade al di sopra della retta o nel primo caso, al di sotto nel secondo. Le figure 34a, b illustrano le due situazioni nello spazio.

2. *Il riferimento sul quadro.* Nel passaggio dalla rappresentazione mongiana a quella prospettica (figg. 37 a, b) la distanza tra le rette o ed f , sul foglio della

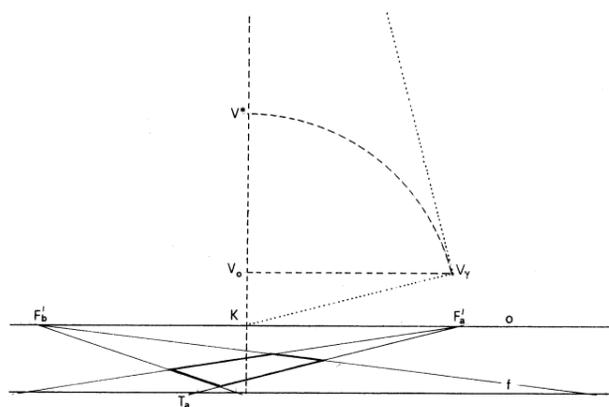


Fig. 37a

prospettiva, in ciascuno dei due casi deve essere uguale (nella scala scelta per il riferimento prospettico) al segmento mongiano $K''H''$, mentre i punti V_o ed F'_n determinano, su una normale alla retta o da un suo punto K , segmenti rispettivamente uguali (a meno della scala) e concordi ai segmenti $K''V''_o$ e $K''F''_n$ della rappresentazione mongiana. Come di consueto il cerchio di distanza ha il centro in V_o e il raggio uguale (a meno della scala) al segmento mongiano $V''V''_o$.

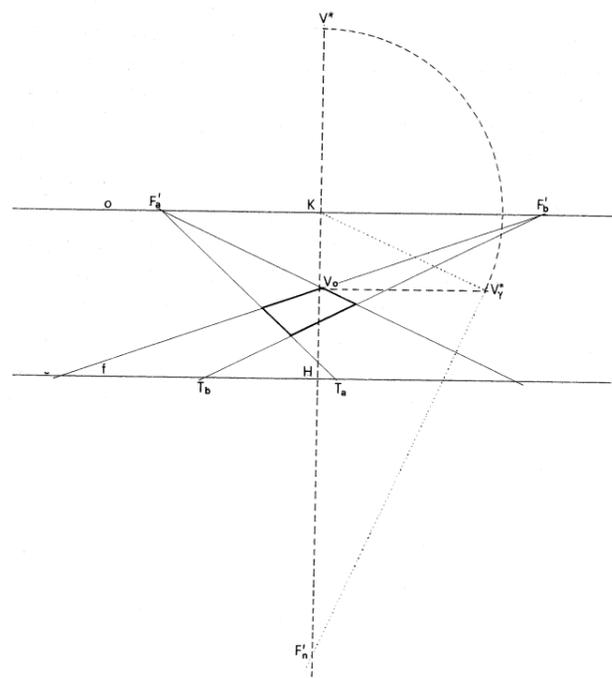


Fig. 37b

Per la costruzione prospettica a quadro inclinato di figure del geometrale si osservi che, nel *disegno preparatorio mongiano*, la traccia T_a di una retta a cade come di consueto nel punto di intersezione con s_π , ma il punto di fuga F'_a cade invece nell'intersezione di questa parallela con la retta o' (cfr. figg. 36 a, b), che come abbiamo visto non coincide con s_π ; la traccia T_a e la fuga F'_a così individuate si trasportino, sul foglio della prospettiva, rispettivamente sulle rette f ed o , a distanze da H e da K ricavate dalle misure dei rispettivi segmenti mongiani $H''T''_a$ e $K''F''_a$, nella nuova scala e in verso concorde (cfr. figg. 37 a, b): la retta che congiunge T_a con F'_a è la prospettiva a' della retta a . La costruzione va ripetuta per gli altri lati della figura.

Ricordando ancora la condizione di ortogonalità tra retta e piano (cfr. 3.2.2 e figg. 35a, b), è possibile la determinazione diretta sul foglio della prospettiva del punto F'_n , fuga delle rette verticali.

3.4 Metodo dei punti di misura

1. Stabilito il riferimento come nel caso precedente, e costruito come sopra il ribaltato V^* di V rispetto al piano di orizzonte, la determinazione dei punti di misura si effettua mediante costruzioni analoghe a quelle della prospettiva a quadro verticale (cfr. 2.9.1.). Nella figure 38 a, b sono rappresentate figure del geometrale in una prospettiva dal basso e rispettivamente dall'alto, costruite con il metodo dei punti di misura.

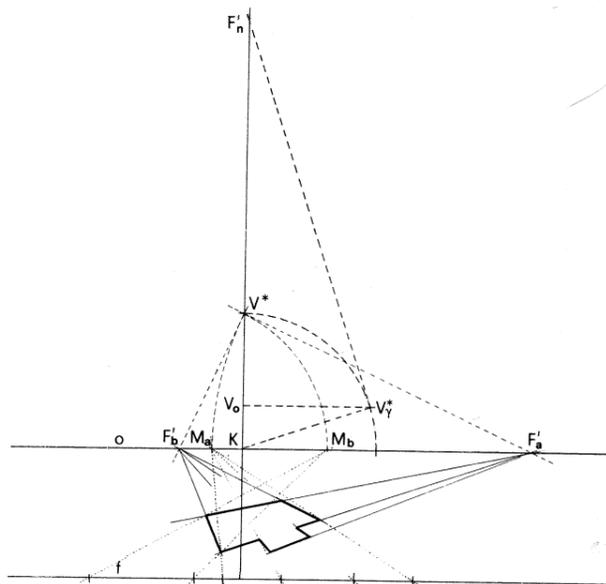


Fig. 38a

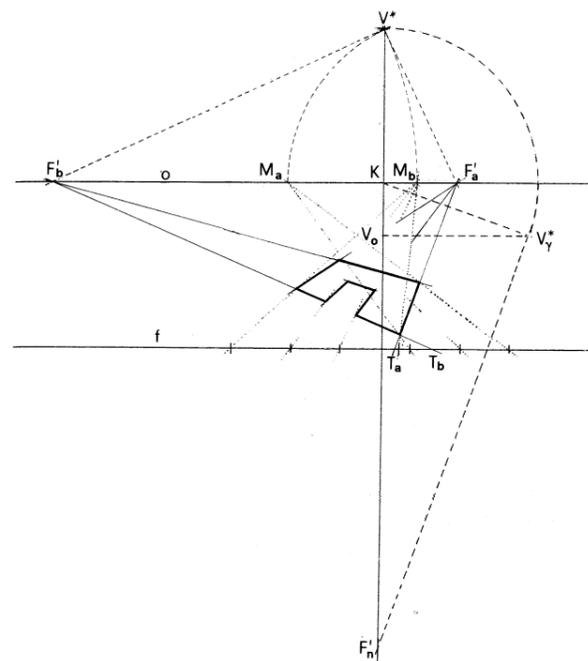


Fig. 38b

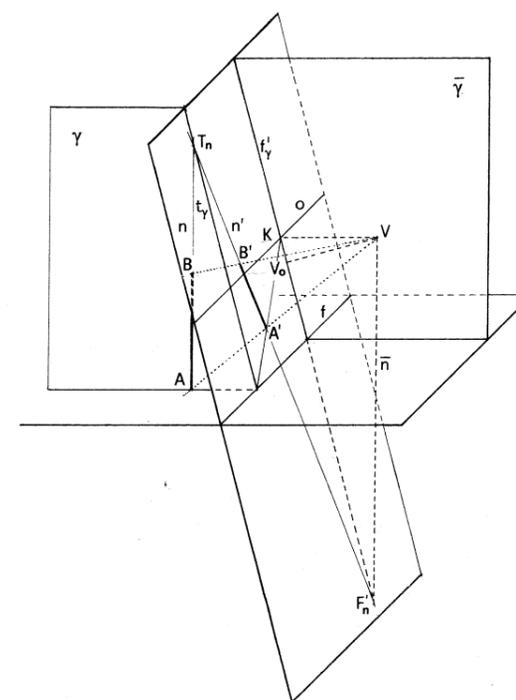


Fig. 39b

3.5 Determinazione delle altezze prospettiche

1. Nella prospettiva a quadro inclinato i segmenti appartenenti a rette verticali, le cui immagini concorrono nel punto di fuga F'_n , non mantengono i rapporti semplici, come avviene nel caso del quadro verticale; infatti quelle rette, non risultando parallele a π , come tutte le altre rette in posizione generica rispetto al quadro, conservano soltanto i birapporti (S.-V., pp. 31, 74): segmenti uguali di una stessa retta verticale n non si proiettano dunque in segmenti uguali, bensì in segmenti decrescenti verso il punto di fuga F'_n . Per determinare l'altezza prospettica di un segmento verticale AB è allora opportuno operare il *ribaltamento su π del piano γ* , ortogonale al quadro, che lo contiene. Nelle figure 39 a, b sono illustrate le relative costruzioni nello spazio: la fuga f'_γ di γ coincide la retta V_oH , mentre la traccia t_γ passa per il punto in cui la traccia geometrale incontra la fondamentale.

Allora, tracciata per un punto A' della pianta prospettica già costruita (figg. 40 a, b) la retta $n' \equiv A'F'_n$ (immagine della verticale per A), si determini la traccia t'_γ di γ mediante la retta s'_γ che congiunge il punto A' con K , fuga delle rette ortogonali alla fondamentale e dunque anche della retta s_γ : la retta t'_γ è la

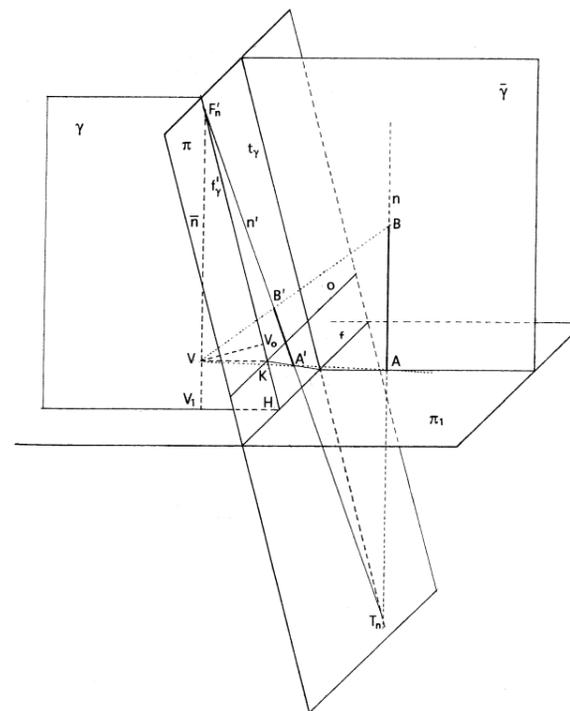


Fig. 39a

parallela a f'_γ passante per T_s , traccia di s_γ . Il punto T_n , traccia della retta n , cade nell'intersezione dell'immagine n' con la traccia t_γ del piano γ cui n appartiene. Nel ribaltamento di γ , la ribaltata n^* della retta n si determina come omologa di n' nell'*omologia di ribaltamento*, avente centro in V_γ^* , asse t_γ e retta limite f'_γ ; su n^* si proietti da V_γ^* il punto A' in A^* e, staccato su n^* il segmento A^*B^* , uguale (a meno della scala) ed equiverso al segmento obiettivo AB , si costruisca su n' il corrispondente B' di B^* nell'omologia inversa, mediante proiezione da V_γ^* .

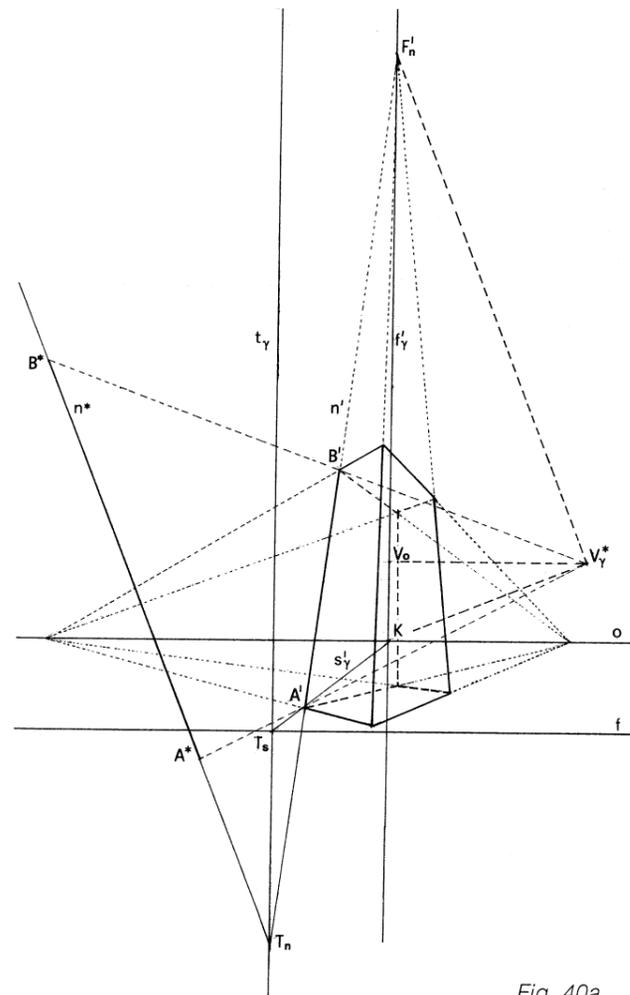


Fig. 40a

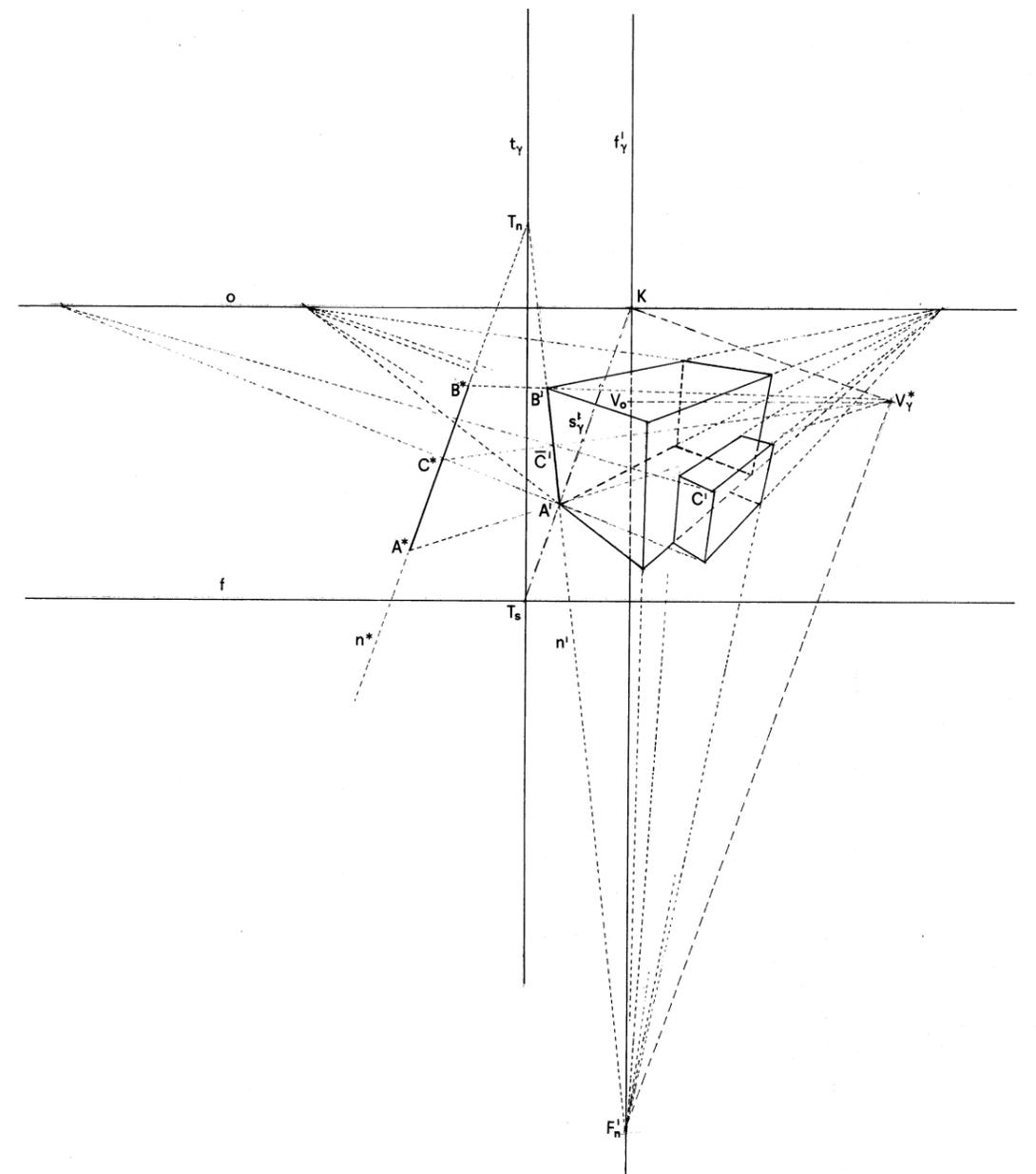


Fig. 40b

2. L'altezza prospettica del punto B si può determinare anche (figg. 41a, b) trasportando il punto A' in $A_o \equiv H$ mediante la retta $a' \equiv A'H$ e considerando la retta HF'_n come l'immagine h' della verticale h passante per H ; costruita poi la retta h^* , parallela ad $F'_nV^*_\gamma$ e ribaltata di h nel ribaltamento del piano visuale principale che la contiene, si stacchi sul h^* il segmento HB_o , vera altezza di B (nella scala del riferimento prospettico), e si proietti B_o da V^*_γ su h' in B'_o ; l'altezza prospettica $A'B'$ si ottiene proiettando B'_o su n' da F'_a in B' .

3. L'immagine della faccia superiore del parallelepipedo si determina come trasformata di quella infe-

riore nell'omologia di centro F'_n , asse la retta o e punti corrispondenti A', B' (cfr. fig. 40a): ricordiamo che nella prospettiva a quadro verticale l'equivalente omologia è un'affinità ortogonale, essendo improprio il punto di fuga delle rette verticali perché parallele al quadro (cfr. 2.3.3.)

La determinazione di eventuali altezze diverse dello stesso oggetto, ad esempio di un edificio, si può effettuare staccando ogni nuova misura sulla stessa retta n^* , proiettarne l'estremo superiore C^* da V^*_γ su n' in C' e infine trasportandolo sulle immagini dei relativi spigoli mediante la suddetta omologia di centro F'_n , asse la retta o e punti omologhi A', C' (cfr. fig. 40b).

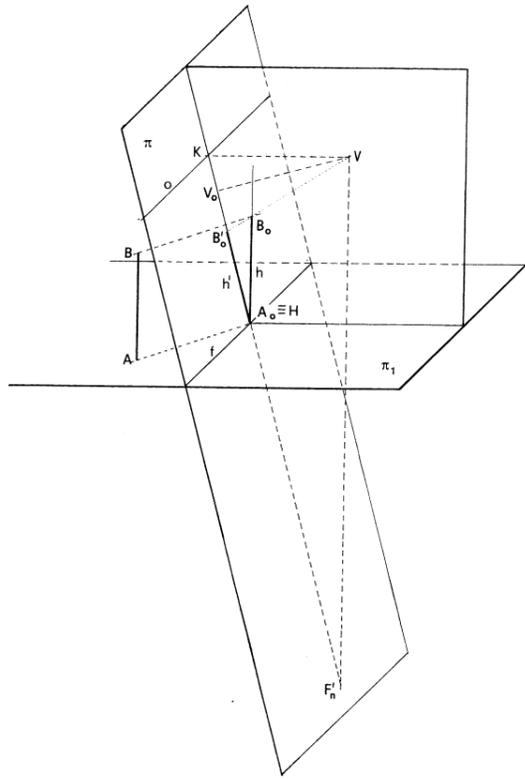


Fig. 41a

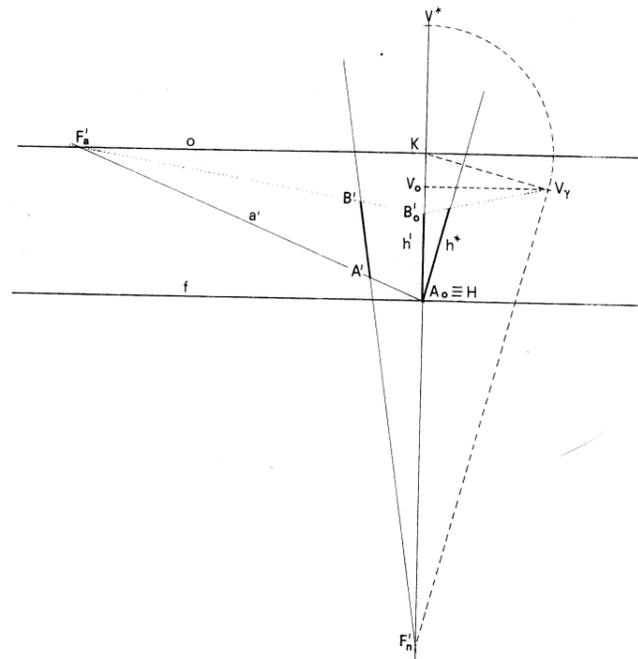


Fig. 41b

4. Nelle figure 42a, b è costruita la prospettiva a quadro inclinato di un cilindro circolare retto, nei due casi illustrati.

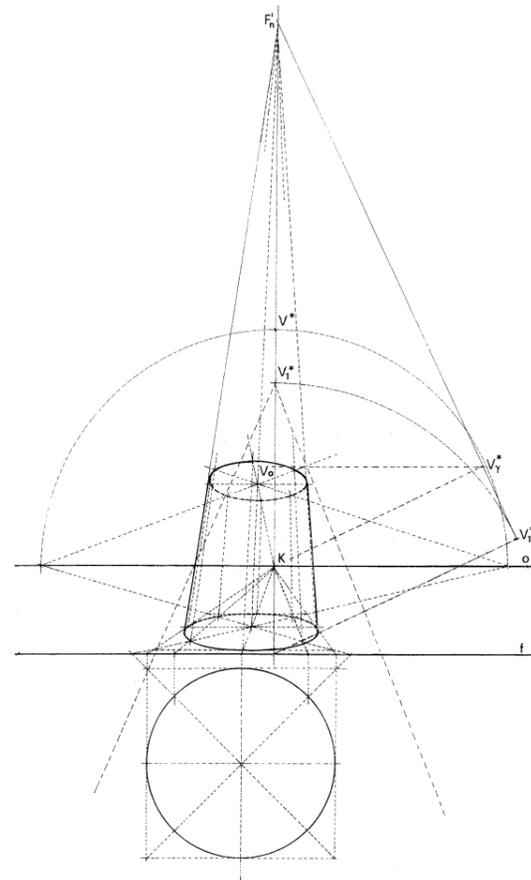


Fig. 42a

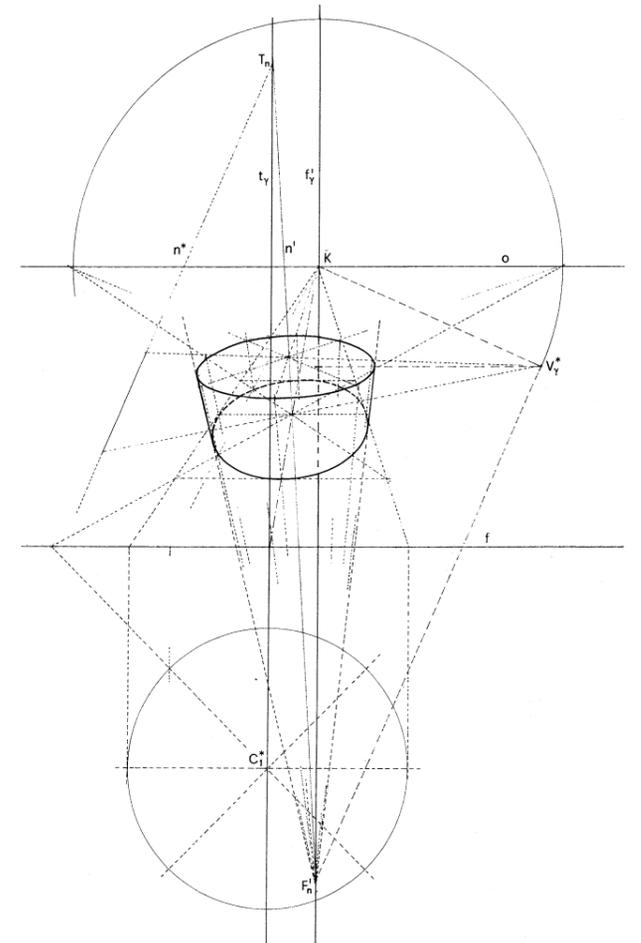


Fig. 42b

4 Prospettiva a quadro orizzontale

4.1 Il riferimento

1. In alcuni casi risulta utile ed efficace una rappresentazione prospettica che preveda il punto di vista in posizione zenitale, una prospettiva cioè *a quadro orizzontale*: il quadro stesso risulta allora parallelo oppure coincidente con il geometrico, e in quest'ultimo caso la pianta prospettica coincide con la pianta mongiana.

Disegnata dunque la pianta di un dato ambiente, o di un insieme di edifici – nel primo caso richiedendosi una visione dell'interno, nel secondo una visione generale del complesso –, in vera forma e nella scala del riferimento prospettico, si scelga la posizione del punto principale V_0 e si stabilisca la distanza principale sulla base delle consuete osservazioni relative al cono ottico (fig. 43a) e, tracciato con tale raggio il cerchio di distanza, il riferimento della pro-

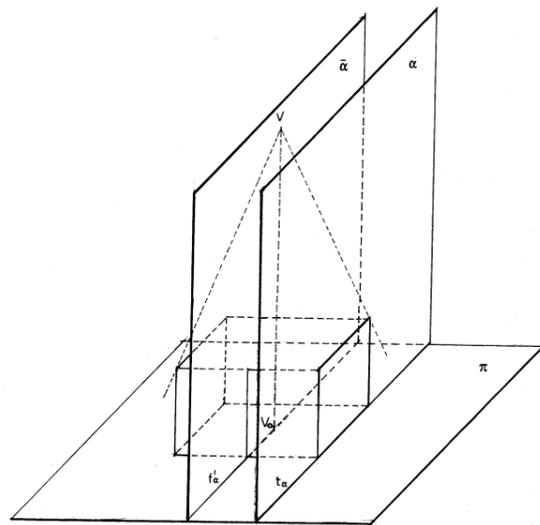


Fig. 43a

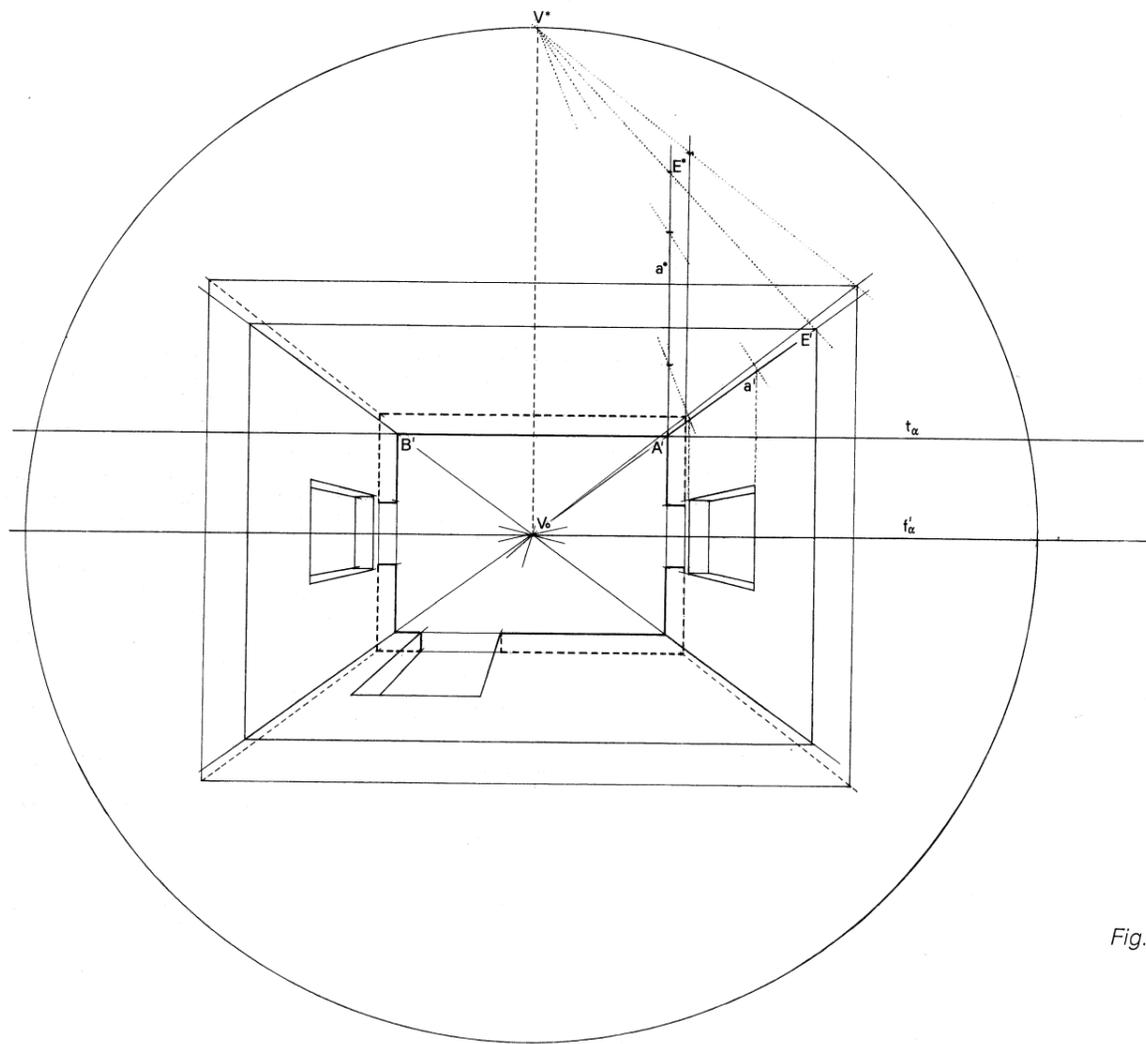


Fig. 43b

spettiva, privato del piano geometrico, non differisce in nulla da quello delle Proiezioni centrali.

4.2 Prospettiva di un interno

1. Data dunque la pianta prospettica di un *ambiente interno*, che coincide con la pianta mongiana, per completare la rappresentazione prospettica, le immagini degli spigoli verticali devono concorrere nel punto V_0 , fuga delle rette ortogonali al quadro; le relative altezze prospettiche si determinano operando il *ribaltamento* di uno dei piani delle pareti. Scelto ad esempio, come nella figura 43b, il piano $\alpha(t_\alpha, f_\alpha)$ di una parete che contiene lo spigolo AB , si determini il ribaltato V^* rispetto a tale piano e la ribaltata a^* della semiretta a , che risulta parallela al segmento V_0V^* . Staccato su a^* a partire da A' il segmento $A'E^*$ di misura uguale all'altezza dell'ambiente (nella scala adottata), il punto E' , proiezione su a' da V^* di E^* , fornisce l'altezza prospettica dello spigolo AE , mentre l'altezza prospettica di ogni altro elemento presente sulle pareti (come porte e finestre) si può determinare sulla stessa retta a^* riportandola poi sull'immagine della retta verticale cui appartiene, mediante l'*omotetia* di centro V_0 e punti corrispondenti A', E' .

Note

- 1 In entrambi i casi l'immagine risulta capovolta, benché il processo fisiologico ce la restituisca correttamente, per l'intervento di centri nervosi a tale scopo preposti.
- 2 La *stella di rette* è l'insieme di tutte le rette dello spazio che passano per un punto.
- 3 Il Poncelet si pose il problema di individuare quali fossero le proprietà che le figure conservano quando vengono proiettate da un punto su un piano, pur perdendo tutte o in parte le proprietà metriche.
- 4 Questa posizione della pianta rispetto al quadro fornirebbe dell'edificio una *prospettiva frontale*, laddove risulta più efficace la *prospettiva accidentale*, con la pianta in posizione obliqua rispetto al quadro; tuttavia in taluni casi questa scelta risulta funzionale (cfr. prospettiva del cerchio fig. 11).
- 5 Il punto V_0 , che nella prospettiva a quadro verticale coincide con il punto di fuga F'_a delle rette ortogonali alla fondamentale, è l'omologo del punto improprio F^*_a di quelle rette.
- 6 Per un punto (una retta) il ruolo di *centro* (*asse*) di una conica è una proprietà metrica e pertanto generalmente non si conserva nella proiezione; per una retta il ruolo di *tangente* è invece una proprietà proiettiva e come tale si conserva.
- 7 Il teorema di Talete afferma che un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali determina su queste segmenti proporzionali, per cui se le parallele sono tutte equidistanti i segmenti su ciascuna delle trasversali saranno uguali tra loro.