Gruppo fondamentale

Dipendenza dal punto base. X spazio topologico e $x_0 \in X \Rightarrow$

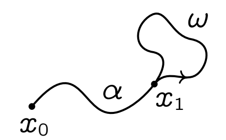
$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0)$$

perché I e I^2 connessi per archi.

Oss. Per studiare π_1 non è restrittivo limitarci a spazi connessi per archi.

$\alpha : I \to X$ continua con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow$

$$\alpha_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$\alpha_*([\omega]) \overset{\text{def}}{=} [\alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}]$$



Teor. *Valgono le proprietà seguenti:*

(1) α_* *ben definita;*

(2) $\forall\, \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1 \Rightarrow \alpha_{0*} = \alpha_{1*}$*;*

(3) $x_{0*} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$, *con* $x_0 =$ *cost;*

(4) $(\alpha \cdot \beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$, $\forall\, \alpha, \beta : I \to X$ *t.c.* $\alpha(1) = \beta(0)$*;*

(5) $(\alpha_*)^{-1} = \bar{\alpha}_*$*;*

(6) α_* *isomorfismo di gruppi.*

Dim. (1)$-$(3) ovvie. (4) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}$. (5) $\alpha \cdot \bar{\alpha} \simeq_{\{0,1\}} x_0$ e (2)$-$(4).
(6) $\alpha_*([\omega_1][\omega_2]) = [\alpha \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \bar{\alpha}] = [\alpha \cdot \omega_1 \cdot \bar{\alpha} \cdot \alpha \cdot \omega_2 \cdot \bar{\alpha}] = \alpha_*([\omega_1])\, \alpha_*([\omega_2])$. $\square$

Cor. X *connesso per archi,* $\forall\, x_0, x_1 \in X \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.
Scriviamo $\pi_1(X) := \pi_1(X, x_0)$, *ben definito a meno di isomorfismi.*

N. B. In generale l'isomorfismo $\alpha_* : \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$ dipende da $[\alpha]$.
$\pi_1(X)$ abeliano $\Rightarrow \alpha_*$ indipendente da α (isomorfismo canonico).

Prop. $X \searrow A$, $a \in A \Rightarrow i_* : \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$, *con* $i : A \hookrightarrow X$ *inclusione.*

Dim. $H : X \times I \to X$ deformazione $X \searrow A \rightsquigarrow r := h_1| : X \to A$ retrazione $\Rightarrow i \circ r = h_1 \simeq_A \mathrm{id}_X$ e $r \circ i = \mathrm{id}_A \Rightarrow i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$ e $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)} \Rightarrow i_*$ isomorfismo e $i_*^{-1} = r_*$. $\square$

Cor. $U \subset \mathbf{R}^n$ *convesso,* $x_0 \in U \Rightarrow \pi_1(U, x_0) = 0$.

Dim. $U \searrow \{x_0\}$. $\square$

Oss. $\pi_1(B^n) = \pi_1(\mathbf{R}^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Def. Uno spazio X è *semplicemente connesso* o 1-*connesso* se $\forall\, x_0, x_1 \in X$, $\exists\, \alpha : I \to X$ continua t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ e α unica a meno di $\simeq_{\{0,1\}}$.

Oss. X semplicemente connesso $\Leftrightarrow X$ connesso per archi e $\forall\, \alpha_0, \alpha_1 : I \to X$ continue t.c. $\alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ e $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) \Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$.

Teor. *X semplicemente connesso $\Leftrightarrow$ X connesso per archi e $\pi_1(X) = 0$.*

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\,[\omega] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \omega \sim x_0 \Rightarrow [\omega] = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\,\alpha_0, \alpha_1 : I \to X$ t.c. $\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$ e $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = x_1 \Rightarrow \alpha_0 \cdot \bar{\alpha}_1 \in \Omega(X, x_0) \Rightarrow [\alpha_0 \cdot \bar{\alpha}_1] = 1 = [x_0] \Rightarrow \alpha_0 \cdot \bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_1 \simeq_{\{0,1\}} x_0 \cdot \alpha_1 \Rightarrow \alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1$. □

Cor. *$U \subset \mathbf{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ U semplicemente connesso.*

Oss. B^n e $\mathbf{R}^n$ semplicemente connessi, $\forall\, n \geqslant 0$.

N. B. Si può dimostrare che contraibile $\Rightarrow$ semplicemente connesso.

Def. Un rivestimento $p\colon X \to Y$ è detto *rivestimento universale di Y* se X è semplicemente connesso.

Funzione di sollevamento. $p\colon X \to Y$ rivestimento $x_0 \in X$, $y_0 = p(x_0) \in Y$, $J = p^{-1}(y_0)$ fibra $\rightsquigarrow$

$$\Phi_p : \pi_1(Y, y_0) \to J$$
$$\Phi_p([\omega]) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\omega}_{x_0}(1)$$

con $\tilde{\omega}_{x_0} : I \to X$ sollevamento di ω t.c. $\tilde{\omega}_{x_0}(0) = x_0$

Teor. *X semplicemente connesso $\Rightarrow$ Φ_p biiettiva.*

Def. Φ_p è detta *funzione di sollevamento*.

Dim. $\boxed{\textit{Ben definita}}$ $\gamma \simeq_{\{0,1\}} \omega \Rightarrow \tilde{\gamma}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\omega}_{x_0}$ (sollevamento omotopie).

$\boxed{\textit{Suriettiva}}$ $\forall\, x_1 \in J \rightsquigarrow \alpha : I \to X$ t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1 \rightsquigarrow \omega := p \circ \alpha \in \Omega(Y, y_0)$ e $\tilde{\omega}_{x_0} = \alpha \Rightarrow \Phi_p([\omega]) = x_1$.

$\boxed{\textit{Iniettiva}}$ $\forall\,[\gamma], [\omega] \in \pi_1(Y, y_{,0}\,)$, $\Phi([\gamma]) = \Phi([\omega]) \Rightarrow \tilde{\gamma}_{x_0}(1) = \tilde{\omega}_{x_0}(1) \Rightarrow \tilde{\gamma}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\omega}_{x_0} \Rightarrow \gamma = p \circ \tilde{\gamma}_{x_0} \simeq_{\{0,1\}} p \circ \tilde{\omega}_{x_0} = \omega \Rightarrow [\gamma] = [\omega]$. □

Oss. Se X semplicemente connesso, $[\omega] = 1 \Leftrightarrow \Phi_p([\omega]) = \Phi_p(1) = x_0$.

Calcolo di $\pi_1(S^1)$

Teor. *$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Dim. $p\colon \mathbf{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ rivestimento universale $y_0 = (1, 0) \in S^1$. $[\omega] \in \pi_1(S^1, y_0) \rightsquigarrow \tilde{\omega}_n : I \to \mathbf{R}$ unico sollevamento t.c. $\tilde{\omega}_n(0) = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{\omega}_n = \tilde{\omega}_0 + n$ perché p ha periodo 1.

$\Phi_p : \pi_1(S^1, y_0) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$, $\Phi_p([\omega]) = \tilde{\omega}_0(1)$ biiettiva.

$$\begin{aligned}\Phi_p([\gamma][\omega]) &= (\widetilde{\gamma \cdot \omega})_0(1) = (\tilde{\gamma}_0 \cdot \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)})(1) = \tilde{\omega}_{\tilde{\gamma}_0(1)}(1) = \tilde{\gamma}_0(1) + \tilde{\omega}_0(1) = \\ &= \Phi_p([\gamma]) + \Phi_p([\omega]) \Rightarrow \Phi_p \text{ omomorfismo.}\end{aligned}$$ □

Teorema di non retrazione

Teor. *$\nexists$ retrazione continua $r\colon B^2 \to S^1$.*

Dim. $r\colon B^2 \to S^1$ retrazione $\Rightarrow \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)} = 0$, assurdo. $\square$

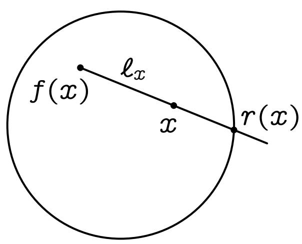
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "r \circ i = \mathrm{id}_{S^1}"'] & B^2 \arrow[r, "r"] & S^1 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "r_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1)}"'] & \overset{0}{\pi_1(B^2)} \arrow[r, "r_*"] & \overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \end{tikzcd}$$

N. B. Più in generale, $\nexists$ retrazione continua $r\colon B^n \to S^{n-1}$.
Esercizio per $n = 1$.

Teorema del punto fisso di Brouwer

Teor. *$\forall\, f\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^2$ t.c. $f(a) = a$ (punto fisso).*

Dim. Per assurdo, $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in B^2 \rightsquigarrow \ell_x :=$ semiretta con origine in $f(x)$ passante per x (senza origine) $\rightsquigarrow r\colon B^2 \to S^1$, $r(x) := \ell_x \cap S^1$ retrazione continua, contraddizione. $\square$



N. B. Più in generale, $\forall\, f\colon B^n \to B^n$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^n$ t.c. $f(a) = a$.
Esercizio per $n = 1$ (suggerimento: usare $g(x) = x - f(x)$).

Applicazione. $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geqslant 1$, sotto certe condizioni sui coefficienti $\exists\, a \in \mathbf{C}$ t.c. $|a| \leqslant 1$ e $f(a) = 0$.

Esempio. $f = x^7 - x^4 - 5x + 3i \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ con
$$g(x) = \frac{1}{5}x^7 - \frac{1}{5}x^4 + \frac{3i}{5}.$$
$|x| \leqslant 1 \Rightarrow |g(x)| \leqslant 1 \Rightarrow g\colon B^2 \to B^2$ continua $\Rightarrow \exists\, a \in B^2$ t.c. $g(a) = a$.