Capitolo 11

Endomorfismi ortogonali e unitari

11.1 Definizione e prime proprietà

Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale euclideo o unitario che **conservano** la struttura metrica sono detti rispettivamente ortogonali e unitari. La definizione precisa è la seguente.

Definizione 11.1.1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo, rispettivamente unitario. Un endomorfismo $f : V \to V$ è detto **ortogonale**, rispettivamente **unitario**, se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ha $\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$, ovvero se f conserva il prodotto scalare.

Chiaramente se f conserva il prodotto scalare, e si considera il caso in cui $v = w$, si ottiene $\langle v, v\rangle = \langle f(v), f(v)\rangle$ per ogni $v \in V$, e perciò si ha anche $\|v\| = \|f(v)\|$: f **conserva la norma** indotta dal prodotto scalare. Questa proprietà si può invertire grazie alle formule di polarizzazione.

Proposizione 11.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo, rispettiamente unitario. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo che conserva la norma, ovvero $\|v\| = \|f(v)\|$ per ogni $v \in V$. Allora f è ortogonale, rispettivamente unitario.*

Dimostrazione. Basta osservare che il prodotto scalare di due vettori qualsiasi $v, w \in V$ si può esprimere usando soltanto le norme di opportuni vettori, grazie alle formule di polarizzazione (10.3), (10.4), (10.5). □

Osservazione 48. Un endomorfismo ortogonale, o unitario, è sicuramente iniettivo. Infatti, se $v \in \ker f$, si ha $f(v) = 0$ e perciò $\|f(v)\| = 0$; ma $\|v\| = \|f(v)\|$, quindi $\|v\| = 0$, che implica $v = 0$. Perciò il nucleo di f è nullo, e f risulta iniettivo. Allora se $\dim V$ è finita, un endomorfismo ortogonale (o unitario) di V è un automorfismo di V, cioè un isomorfismo di V in sè.

Gli endomorfismi ortogonali, o unitari, sono anche detti isometrie vettoriali o isometrie lineari.

11.2 Autovalori degli endomorfismi ortogonali e unitari

Proposizione 11.2.1. *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale euclideo, risp. unitario, dove $\mathbb{K}$ denota il campo reale, risp. il campo complesso. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo ortogonale, risp. unitario. Se λ è un autovalore di f, allora il valore assoluto di λ, risp. il modulo di λ, è uguale a 1: $|\lambda| = 1$.*

Dimostrazione. Essendo λ un autovalore di f per ipotesi, esiste un vettore $v \neq 0$ in V tale che $f(v) = \lambda v$. Allora $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\ \lambda\ |\ \|v\|$. Essendo $\|v\| \neq 0$, si ottiene $|\lambda| = 1$. □

Nel caso reale un autovalore di un endomorfismo ortogonale f può valere solo 1 o -1. Nel caso complesso un autovalore λ di un endomorfismo unitario f appartiene alla circonferenza unitaria: $\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha = e^{i\alpha}$.

Osserviamo che in particolare nessun autovalore è nullo, cosa che peraltro segue anche dal fatto che f è iniettivo.

Proposizione 11.2.2. *Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori distinti di un endomorfismo ortogonale, o unitario, di V. Siano v un autovettore di λ e w un autovettore di μ. Allora $v \perp w$, ovvero autovettori di autovalori distinti sono ortogonali (e non solo linearmente indipendenti).*

Dimostrazione. $f(v) = \lambda v$, $f(w) = \mu w$, perciò

$$\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \bar{\lambda}\mu\langle v, w\rangle.$$

Allora $(1 - \bar{\lambda}\mu)\langle v, w\rangle = 0$. Ci sono due casi:

- $\langle v, w\rangle = 0$ e v, w sono ortogonali;
- $1 = \bar{\lambda}\mu$. Ma $|\lambda| = 1$ per la Proposizione 11.2.1, e perciò $\bar{\lambda}\lambda = 1$, e dunque $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Allora $1 = \bar{\lambda}\mu = \frac{\mu}{\lambda}$, che implica $\lambda = \mu$: assurdo.

Nel caso reale la dimostrazione può essere semplificata in quanto la relazione che si trova è $\lambda\mu = 1$ da cui $\mu = \frac{1}{\lambda}$, ma λ, μ valgono entrambi 1 o -1, quindi sono uguali. □

Più in generale:

Proposizione 11.2.3. *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono autovalori di f a due a due distinti, con f endomorfismo ortogonale o unitario, allora la somma dei corrispondenti autospazi è una somma ortogonale:*

$$\mathrm{Aut}(\lambda_1) \bigoplus\!\!\!\!\!\!\perp \mathrm{Aut}(\lambda_2) \bigoplus\!\!\!\!\!\!\perp \cdots \bigoplus\!\!\!\!\!\!\perp \mathrm{Aut}(\lambda_k) \subset V.$$

Dimostrazione. Basta osservare che, per ogni $i = 1, \ldots, k$, ogni autovettore di λ_i è ortogonale a ogni somma di autovettori degli altri autovalori. □

11.3 Matrici ortogonali e unitarie

Considereremo ora le matrici associate a endomorfismi ortogonali e unitari rispetto a basi di V. Ci interesserà il caso in cui la base considerata è ortonormale.

Definizione 11.3.1 (Matrici ortogonali e unitarie)**.**
Sia A una matrice $n \times n$ invertibile.
Se A ha entrate **reali**, A è detta **ortogonale** se $A^{-1} = {}^tA$.
Se A ha entrate **complesse**, A è detta **unitaria** se $A^{-1} = {}^t\bar{A}$.

Osserviamo che se A è ortogonale o unitaria, anche la sua trasposta ${}^tA$ lo è.

Proposizione 11.3.2. *Sia A una matrice quadrata reale, risp. complessa. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *A è ortogonale, risp. unitaria;*
2. *le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, risp. di $\mathbb{C}^n$, con il prodotto scalare standard;*
3. *le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, risp. di $\mathbb{C}^n$, con il prodotto scalare standard.*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso complesso, quello reale è un caso particolare. Osserviamo che A è unitaria se e solo se ${}^t\bar{A}A = \mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Indicate con $a^1, \dots, a^n$ le colonne di A, ciò equivale a ${}^t\bar{a}^i a^j = \delta_{ij}$ per ogni coppia di indici i, j; ma questo è proprio $\langle \bar{a}^i, a^j \rangle$ perché stiamo considerando il prodotto scalare standard, e dunque le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$.

Per provare la proprietà per le righe, basta osservare che $A^t\bar{A} = \mathbb{I}_n$ se e solo se (usando il coniugio) $\overline{A^t\bar{A}} = \bar{A}^tA = \mathbb{I}_n$, e si prosegue poi come sopra, lavorando con la trasposta di A. $\square$

Corollario 11.3.3. *Sia $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ la matrice di un cambio di base. Se A è una matrice ortogonale, o unitaria, e se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, allora anche $\mathcal{B}'$ è ortonormale.*

Esempi 11.3.4. 1. Matrice della rotazione di angolo α in $\mathbb{R}^2$: $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$ {}^tR_\alpha R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

2. Matrice di una riflessione in $\mathbb{R}^2$: $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$ {}^tS_\alpha S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Il legame tra le matrici appena introdotte e gli endomorfismi ortogonali e unitari è dato dal seguente teorema.

Teorema 11.3.5. *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale euclideo, risp. unitario, di dimensione finita. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base* **ortonormale** *di V. Allora f è ortogonale, risp. unitario, se e solo se $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice ortogonale, risp. unitaria.*

Dimostrazione. Come sempre, vediamo la dimostrazione nel caso complesso; il caso reale è un caso particolare. Siano $v, w \in V$ vettori con colonne delle coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ rispettivamente $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Osserviamo che, essendo $\mathcal{B}$ ortonormale, $\langle v, w \rangle = {}^t\bar{x}y$; inoltre le coordinate di $f(v)$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono date da Ax, e quelle di $f(w)$ da Ay.

Allora: f è unitario se e solo se per ogni coppia di vettori di V si ha $\langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle$; passando in coordinate, questo si traduce nell'affermazione che f è unitario se e solo se per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$ si ha ${}^t\bar{x}y = {}^t(\overline{Ax})Ay$, o equivalentemente ${}^t\bar{x}\mathbb{I}_n y = {}^t\bar{x}{}^t\bar{A}Ay$. Per l'Osservazione 44, ciò equivale a $\mathbb{I}_n = {}^t\bar{A}A$, ovvero A è unitaria. $\square$

Corollario 11.3.6. *1. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la base canonica $\mathcal{C}$ e il prodotto scalare canonico; allora A è una matrice ortogonale $n \times n$ se e solo se L_A è un endomorfismo ortogonale.*

2. Consideriamo $\mathbb{C}^n$ con la base canonica $\mathcal{C}$ e il prodotto scalare standard: allora A è una matrice unitaria $n \times n$ se e solo se L_A è un endomorfismo unitario.

Dimostrazione. Infatti in entrambi i casi $\mathcal{C}$ è una base ortonormale per il prodotto scalare standard e $A = M_{\mathcal{C}}(L_A)$. $\square$

Quindi per l'Esempio 11.3.4 rotazioni e riflessioni sono endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico.

L'insieme delle matrici reali $n \times n$ ortogonali si denota $O(n)$: è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, detto **gruppo ortogonale** di grado n.

Infatti: se $A, B \in O(n)$, si ha ${}^tAA = \mathbb{I}_n = {}^tBB$, quindi ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tB\mathbb{I}_nB = \mathbb{I}_n$, quindi $O(n)$ è chiuso rispetto al prodotto righe per colonne. Inoltre $\mathbb{I}_n$ è una matrice ortogonale, perché le sue colonne costituiscono la base canonica. Infine se A è ortogonale, anche A^{-1} lo è, perché ${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t({}^tA)A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}_n$.

In maniera del tutto analoga l'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitarie costituisce un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{C})$, denotato $U(n)$, detto **gruppo unitario** di grado n.

Proposizione 11.3.7. *Se A è una matrice ortogonale, risp. unitaria, si ha $\mid det(A) \mid= 1$ (valore assoluto, risp. modulo, del determinante).*

Dimostrazione. $\det(A^t\bar{A}) = \det(\mathbb{I}_n) = 1$; d'altra parte, per il Teorema di Binet, $\det(A^t\bar{A}) = \det(A)\det(^t\bar{A}) = \det(A)\det(\bar{A}) = \det(A)\overline{\det(A)} =\mid \det(A) \mid^2$. Percioò $\mid \det(A) \mid^2= 1$ e si conclude che $\mid \det(A) \mid= 1$. □

11.4 Forma normale per endomorfismi unitari e ortogonali

Teorema 11.4.1. *Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale unitario di dimensione finita n, sia $f : V \to V$ un endomorfismo unitario. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ formata da autovettori di f. In particolare f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Omessa.

□

Il Teorema 11.4.1 ha una versione equivalente per matrici.

Teorema 11.4.2. *Sia $A \in U(n)$ una matrice complessa unitaria di ordine n. Allora esiste una matrice unitaria S di ordine n tale che $S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia diagonale. In altre parole A è diagonalizzabile mediante una matrice unitaria.*

Dimostrazione. Omessa. □

Nel caso reale degli endomorfismi ortogonali o delle matrici ortogonali, non è sempre possibile diagonalizzare. Per esempio la matrice R_α di una rotazione è ortogonale (Esempio 11.3.4) ma non è diagonalizzabile se $\alpha \neq 0, \pi$ (Esempio 9.3.2). Però, se A è una matrice ortogonale 2×2, A è del tipo R_α o S_α.

Proposizione 11.4.3. *Sia $A \in O(2)$ una matrice reale ortogonale di ordine 2. Allora se $det(A) = 1$, A è della forma R_α, mentre se $det(A) = -1$, A è della forma S_α.*

Dimostrazione. Sia $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. A è ortogonale se e solo se ${}^tAA = \mathbb{I}_2$, ovvero se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Poichè $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, esistono unici angoli α, β, con $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$, tali che $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha, c = \sin\beta, d = \cos\beta$. Ma $ac + bd = 0 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$, quindi $\alpha + \beta$ è un multiplo intero di π. Quindi si verifica una delle seguenti condizioni: $\alpha + \beta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$.

- Se $\alpha + \beta = 0$ o 2π, $\alpha = -\beta + 2\pi$, dunque $\sin\beta = -\sin\alpha$ e $\cos\beta = \cos\alpha$, quindi $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è la matrice di una rotazione, ha determinante 1.
- Se $\alpha + \beta = \pi$ o 3π, $\alpha = -\beta + \pi$ o $\alpha = -\beta + 3\pi$, α e β sono angoli supplementari. Allora $\sin\beta = \sin\alpha$ e $\cos\beta = -\cos\alpha$, quindi $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ è la matrice di una riflessione, ha determinante -1.

$\square$

Di conseguenza, gli unici endomorfismi ortogonali di $\mathbb{R}^2$, con prodotto scalare standard, sono le rotazioni e le riflessioni, detti anche movimenti rigidi del piano. Nel caso di una rotazione, come già osservato, A non ha autovalori, tranne che se $\alpha = 0$ o π, nei quali casi si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nel caso di una riflessione A ha sempre gli autovalori 1 e -1, $\mathrm{Aut}(1)$, $\mathrm{Aut}(-1)$ hanno dimensione 1, dunque sono due rette ortogonali, e $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Aut}(1) \oplus \mathrm{Aut}(-1)$. A è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il prossimo teorema dice che quelli appena visti sono i "mattoni" con cui costruire la forma normale per che gli automorfismi ortogonali.

Teorema 11.4.4. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, sia $f : V \to V$ un endomorfismo ortogonale. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia del tipo*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & \\ & & & & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ & & & & & & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

È una matrice diagonale a blocchi: nella prima parte ci può essere un certo numero di 1 e -1 sulla diagonale principale e 0 sul resto delle righe; nella seconda parte vi possono essere un certo numero di matrici di rotazione.

Questo è il primo esempio di teorema in cui il caso complesso è più semplice del caso reale, dovuto al fatto che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso. Per esempio, se $n = 3$, due esempi di forma normale sono i seguenti:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ corrispondente è f tale che $v = (x, y, z) \to f(v) = (x, -y, -z)$. L'asse x è fisso, nel piano yz ho una rotazione di π; f è la rotazione di π intorno all'asse x. Il piano yx è l'autospazio di autovalore -1.

- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. L'asse x viene riflesso intorno all'origine, il piano yz viene ruotato di un angolo α. $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, z) \to (-x, y\cos\alpha - z\sin\alpha, y\sin\alpha + z\cos\alpha) = (-x, 0, 0) + (0, y\cos\alpha - z\sin\alpha, y\sin\alpha + z\cos\alpha)$.

Dimostrazione. Omessa. $\square$