Capitolo 12

Endomorfismi autoaggiunti

12.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 12.1.1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Un endomorfismo $f : V \to V$ è detto **autoaggiunto** se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, si ha

$$\langle f(v), w\rangle = \langle\ v, f(w)\rangle.$$

Osserviamo subito che, se f è un endomorfismo autoaggiunto, per ogni vettore $v \in V$ si ha $\langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle$. Nel caso reale questo non dice niente di nuovo perché il prodotto scalare è simmetrico, ma nel caso complesso il prodotto scalare è hermitiano quindi $\langle f(v), v\rangle = \overline{\langle v, f(v)\rangle}$. Otteniamo dunque:

Proposizione 12.1.2. *Se $f : V \to V$ è un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale complesso unitario, per ogni $v \in V$ si ha che $\langle v, f(v)\rangle$ è reale.*

Vedremo ora di quali proprietà godono la matrici degli endomorfismi autoaggiunti **rispetto alle basi ortonormali**.

Proposizione 12.1.3. *Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale dello spazio vettoriale V euclideo o unitario di dimensione finita. Un endomorfismo f è autoaggiunto se e solo se*

- *caso reale: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica;*
- *caso complesso: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.*

Dimostrazione. Dimostriamo il caso complesso, quello reale è un caso particolare. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Allora, preso un vettore v, denotato con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vettore delle coordinate di v

rispetto a $\mathcal{B}$, il vettore delle coordinate di $f(v)$ è Ax. Quindi f è autoaggiunto se e solo se, per ogni $v, w \in V$, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ se e solo se, per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$, ${}^t(\overline{Ax})y = {}^t\bar{x}{}^t\bar{A}y = {}^t\bar{x}(Ay)$, perché rispetto a una base ortonormale l'espressione analitica del prodotto scalare è quella del prodotto scalare canonico di $\mathbb{C}^n$. Come nell'Osservazione 44, prendendo per v e w due vettori della base $\mathcal{B}$ di V, ovvero per x e y due vettori della base canonica di $\mathbb{C}^n$, si deduce che ${}^t\bar{A} = A$, cioè A è hermitiana. □

Gli endomorfismi autoaggiunti nel caso reale sono anche chiamati simmetrici, proprio perché lo sono le loro matrici rispetto alle basi ortonormali.

12.2 Autovalori e autovettori di endomorfismi autoaggiunti

Proposizione 12.2.1. *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto di uno spazio vettoriale euclideo o unitario. Allora*

1. *se λ è un autovalore di f, λ è reale;*
2. *autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.*

La 1. è ovvia nel caso euclideo. La 2. è analoga alla proprietà che vale anche per endomorfismi ortogonali e unitari (Prop. 11.2.2).

Dimostrazione. 1. Sia $v \neq 0$ un autovettore di λ, cioè $f(v) = \lambda v$. Si ha allora: $\langle f(v), v\rangle \underset{f \text{ è autoaggiunto}}{=} \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$. D'altra parte $\langle f(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$. Poichè $\langle v, v\rangle \neq 0$, segue che $\lambda = \bar{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Siano $\lambda \neq \mu$ autovalori di f, v, w autovettori relativi. Allora

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

D'altra parte $\langle f(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle \underset{\lambda \text{ è reale per il punto 1.}}{=} \lambda\langle v, w\rangle$. Quindi $(\lambda-\mu)\langle v, w\rangle = 0$; ma $\lambda - \mu \neq 0$, quindi $\langle v, w\rangle = 0$ dunque v, w sono ortogonali. □

12.3 Il teorema spettrale

Il teorema spettrale risponde al problema della diagonalizzabilità degli endomorfismi autoaggiunti.

Teorema 12.3.1 (Il teorema spettrale)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo o unitario di dimensione finita n, sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ formata da autovettori di f, in particolare f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Tratteremo separatamente il caso complesso (che è più immediato) e il caso reale.

Caso complesso. La dimostrazione è per induzione su $n = \dim V$, e segue lo stesso schema della dimostrazione del Teorema 11.4.1. Per $n = 1$ il teorema è vero come nel Teorema 11.4.1. Sia dunque $n > 1$ e supponiamo vero il teorema per spazi unitari di dimensione $n-1$. Siccome siamo su $\mathbb{C}$, f ha almeno un autovalore, necessariamente reale (Prop. 12.2.1). Sia v_1 un suo autovettore, che possamo supporre sia di norma 1 (altrimenti lo normalizziamo). Poniamo $W = v_1^\perp$. Allora $\dim W = n-1$ e $V = \langle v_1 \rangle \bigoplus W$. Dimostriamo che W è invariante per f, ovvero che $f(W) \subset W$: sia $w \in W$, allora $\langle v_1, w \rangle = 0$. Vogliamo dimostrare che $f(w) \in W$, quindi consideriamo

$$\langle v_1, f(w) \rangle = \text{ f autoaggiunto } = \langle f(v_1), w \rangle \ = \langle \lambda v_1, w \rangle = \text{ λ è reale } = \lambda \langle v_1, w \rangle = 0.$$

Dunque $f(w) \in W$. Allora $f \mid_W : W \to W$ è un endomorfismo; W è dotato della struttura di spazio euclideo ottenuta restringendo a W il prodotto scalare di V, e $f \mid_W$ è autoaggiunto. Poichè $\dim W = n-1$, povveromo applicare l'ipotesi induttiva e affermare che esiste una base ortonormale di W $(v_2, \ldots, v_n)$ formata da autovettori di $f \mid_W$, quindi anche di f. Allora $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortonormale di V ed è formata da autovettori di f.

Caso reale. Vogliamo dimostrare che f ha almeno un autovalore. Per farlo passeremo all'ambiente complesso. Fissiamo dunque una qualunque base ortonormale $\mathcal{B}$ di V; per la Proposizione 12.1.3 $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice simmetrica reale, in particolare è una matrice hermitiana. Il polinomio caratteristico $p_f(x) = p_A(x)$, a coefficienti reali, ha almeno una radice λ in $\mathbb{C}$. Consideriamo l'endomorfismo $L_{\mathbb{C}}(A) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, tale che $z \to Az$, e osserviamo che λ è autovalore anche di $L_{\mathbb{C}}(A)$. Essendo A hermitiana, $L_{\mathbb{C}}(A)$ è un endomorfismo autoaggiunto di $\mathbb{C}^n$ con prodotto scalare canonico, allora per la Proposizione 12.2.1 λ è reale. Povveromo così concludere che f ha almeno un autovalore.

A questo punto la dimostrazione continua e si conclude come nel caso complesso. $\square$

Osservazione 49. Dalla dimostrazione del Teorema spettrale 12.3.1 segue l'importante proprietà che, data una matrice **simmetrica reale** A, il suo polinomio caratteristico $p_A(x)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$, ovvero $p_A(x)$ si fattorizza in fattori lineari in $\mathbb{R}[x]$. A ha tutti gli autovalori reali.

Vediamo ora alcune prime conseguenze del Teorema spettrale.

Corollario 12.3.2 (Teorema spettrale per le matrici)**.**

1. Sia A una matrice simmetrica reale. Allora esiste una matrice ortogonale S tale che $S^{-1}AS = {}^tSAS$ sia una matrice diagonale.

2. Sia A una matrice complessa hermitiana. Allora esiste una matrice unitaria S tale che $S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS$ sia una matrice diagonale a valori reali.

Dimostrazione. Chiamiamo $\mathbb{K}$ il campo base, che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideriamo l'endomorfismo $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, dove $\mathbb{K}^n$ è dotato del prodotto scalare canonico. Ricordiamo che A è la matrice di L_A rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$. Per il Teorema spettrale esiste una base $\mathcal{B}$ ortonormale di autovettori di L_A, quindi $M_\mathcal{B}(L_A)$ è una matrice diagonale avente sulla diagonale principale gli autovalori di A, tutti reali, e si ha $M_\mathcal{B}(L_A) = S^{-1}M_\mathcal{B}(L_A)S = S^{-1}AS$, dove $S = M_\mathcal{B}^\mathcal{C}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$. Essendo $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ entrambe ortonormali, S è una matrice ortogonale, risp. unitaria. □

Corollario 12.3.3. *Sia $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Allora $V = \mathrm{Aut}(\lambda_1) \obot \cdots \obot \mathrm{Aut}(\lambda_k)$, è somma diretta ortogonale degli autospazi di f.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema spettrale. □

12.4 Esempi

Vedremo ora come operare in pratica per applicare il Teorema spettrale 12.3.1. Supponiamo dato un endomorfismo f autoaggiunto. Si considera il suo polinomio caratteristico $p_f(x)$, lo si fattorizza in fattori lineari

$$p_f(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \dots (\lambda_k - x)^{a_k}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, e $a_i = m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ per ogni i, perché sappiamo già che f è diagonalizzabile. Poi per ogni autovalore λ_i si risolve un sistema lineare omogeneo per determinare una base di $\mathrm{Aut}(\lambda_i)$. Si ortonormalizza la base trovata, per esempio con il metodo di Gram-Schmidt 10.6.2. Infine si fa l'unione delle k basi trovate per i vari autospazi.

Esempi 12.4.1. Sia A la matrice simmetrica reale

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p_A(x) = \det\begin{pmatrix} \frac{10}{15} - x & \frac{5}{15} & \frac{10}{15} \\ \frac{5}{15} & -\frac{14}{15} - x & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{11}{15} - x \end{pmatrix} = \frac{1}{(15)^3}\det\begin{pmatrix} 10 - 15x & 5 & 10 \\ 5 & -14 - 15x & 2 \\ 10 & 2 & -11 - 15x \end{pmatrix} =$$

sviluppando il determinante

$$= \frac{1}{(15)^3}(-(15)^3x^3 - (15)^3x^2 + (15)^3x + (15)^3) = -x^3 - x^2 + x + 1 = -(x+1)^2(x-1).$$

A ha due autovalori $\lambda_1 = 1$ con $m_a(1) = 1$, $\lambda_2 = -1$ con $m_a(-1) = 2$.

$$\mathrm{Aut}(1) : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 5 & -29 & 2 \\ 10 & 2 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ da cui si trova } \mathrm{Aut}(1) = \langle u_1 \rangle = \langle (5,1,2) \rangle.$$

Normalizziamo u_1 e abbiamo

$$v_1 = \frac{(5,1,2)}{\sqrt{30}}.$$

$$\mathrm{Aut}(-1) : \begin{pmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ da cui si trova } \mathrm{Aut}(-1) = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle (-1,5,0), (-2,0,5) \rangle.$$

Ora povveromo procedere con Gram-Schmidt a ortonormalizzare u_2, u_3.

$$\begin{aligned}
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1,5,0)}{\sqrt{26}}, \\
\widetilde{u_3} &= \langle v_2, u_3 \rangle v_2 = \\
&= \langle \frac{(-1,5,0)}{\sqrt{26}}, (-2,0,5) \rangle \frac{(-1,5,0)}{\sqrt{26}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{26}}\Big(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}, 0\Big) = \\
&= \Big(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}, 0\Big), \\
u_3 - \widetilde{u_3} &= (-2,0,5) - \Big(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}, 0\Big) = \Big(-\frac{25}{13}, -\frac{5}{13}, 5\Big), \\
\|u_3 - \widetilde{u_3}\| &= \sqrt{\Big(\frac{25}{13}\Big)^2 + \Big(\frac{5}{13}\Big)^2 + 5^2} = \frac{5}{13}\sqrt{195}, \\
v_3 &= \frac{u_3 - \widetilde{u_3}}{\|u_3 - \widetilde{u_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{195}}(-5,-1,13).
\end{aligned}$$

La matrice S è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{195}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & -\frac{1}{\sqrt{195}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{13}{\sqrt{195}} \end{pmatrix},$$

è ortogonale con le coordinate dei tre vettori v_1, v_2, v_3 come colonne.

In alternativa, anzichè applicare Gram-Schmidt, povveromo procedere così: sappiamo che $u_1 = (5, 1, 2)$ e $u_2 = (-1, 5, 0)$ sono ortogonali. Cerchiamo un vettore (x_1, x_2, x_3) ortogonale a entrambi:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{con matrice dei coefficienti } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una soluzione è

$$\left(\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \right) = (-10, -2, 26) = 2(-5, -1, 13).$$

Poi normalizziamo i tre vettori e troviamo la stessa base trovata in precedenza.