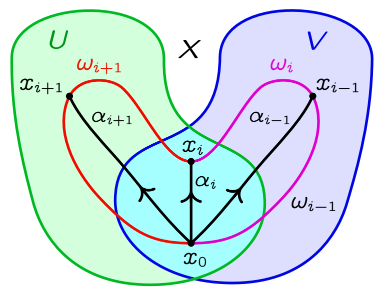
Gruppo fondamentale

Prop. *Supponiamo $X = U \cup V$ con U, V e $U \cap V$ aperti non vuoti connessi per archi t.c. $\pi_1(U) = 0$ e $\pi_1(V) = 0 \Rightarrow \pi_1(X) = 0$.*

Dim. X connesso per archi, $x_0 \in U \cap V$ punto base. $\forall\,[\omega] \in \pi_1(X) \rightsquigarrow$ $\delta > 0$ numero di Lebesgue per $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$ (ricopr. aperto di I) $\rightsquigarrow$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ t.c. $t_i - t_{i-1} < \delta \rightsquigarrow x_i := \omega(t_i)$
$\alpha_i : I \to X$ t.c. $\alpha_0 = \alpha_n = x_0$, $\alpha_i(0) = x_0$, $\alpha_i(1) = x_i$

$$\omega([t_{i-1}, t_i]) \subset \begin{cases} U \\ V \end{cases}$$



$$\alpha_i(I) \subset \begin{cases} U \cap V, & \text{se } x_i \in U \cap V \\ U, & \text{se } x_i \in U - V \\ V, & \text{se } x_i \in V - U \end{cases}$$

$$\omega_i := \omega|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to X$$

$$\gamma_i := \alpha_{i-1} \cdot \omega_i \cdot \bar{\alpha}_i \quad \text{cappio in } U \text{ o } V \;\Rightarrow\; [\gamma_i] = 1$$

$$[\omega] = \left[\prod_{i=1}^{n} \omega_i\right] = \left[\prod_{i=1}^{n} \gamma_i\right] = \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i] = 1$$

□

Cor. $\pi_1(S^n) = 0$, $\forall\, n \geqslant 2$.

Dim. $a_\pm = (0, \ldots, 0, \pm 1) \in S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $U_\pm = S^n - \{a_\pm\} \cong \mathbf{R}^n$
$U_+ \cap U_- \cong (\mathbf{R}^n - \{0\}) \searrow S^{n-1}$ connesso per archi per $n \geqslant 2$
$U_+ \cup U_- = S^n \Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$. □

Oss. Per $n = 1$ non funziona perché $S^0 = \{-1, 1\}$ sconnesso.

Cor. $\forall\, a \in \mathbf{R}^n$ *si ha*

$$\pi_1(\mathbf{R}^n - \{a\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Dim. $\mathbf{R}^n - \{a\} \cong \mathbf{R}^n - \{0\} \searrow S^{n-1}$. □

Invarianza topologica della dimensione

Teor. $\mathbf{R}^m \cong \mathbf{R}^n \Rightarrow m = n$.

Dim. Dimostrazione solo per $m = 2$, ma vale in generale.
$f : \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n$ omeo $\Rightarrow f| : \mathbf{R}^2 - \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbf{R}^n - \{f(0)\}$ omeo $\Rightarrow n \geqslant 2$
$\pi_1(\mathbf{R}^2 - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbf{R}^n - \{f(0)\}) \Rightarrow n = 2$. □

Gruppi fondamentali degli spazi proiettivi

Caso reale.

$$\pi_1(\mathbf{RP}^n) \cong \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

$\boxed{n = 1}$ $\mathbf{RP}^1 \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbf{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$.

$\boxed{n \geqslant 2}$ $p\colon S^n \to \mathbf{RP}^n$, $p(x) = [x]$ rivestimento universale $\Rightarrow$
$\#(\pi_1(\mathbf{RP}^n)) = d(p) = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbf{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Oss. $\pi_1(\mathbf{RP}^n)$ generato da $[\omega]$ con

$$\begin{tikzcd} & S^n \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbf{RP}^n \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\omega}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0)$$

$$\omega(t) = [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0 \ldots, 0]$$

infatti $\Phi_p([\omega]) = -a$, funzione di sollevamento da $a = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$.
ω parametrizza $\mathbf{RP}^1 \subset \mathbf{RP}^n \Rightarrow i_*\colon \pi_1(\mathbf{RP}^1) \to \pi_1(\mathbf{RP}^n)$ suriettiva.
In altre parole $\pi_1(\mathbf{RP}^n)$ è "generato" da $\mathbf{RP}^1 \subset \mathbf{RP}^n$.

Caso complesso.

$$\pi_1(\mathbf{CP}^n) = 0, \ \forall\, n \geqslant 0.$$

Induzione su n. $n = 0$ banale. Supponiamo $\pi_1(\mathbf{CP}^{n-1}) = 0$ per $n - 1 \geqslant 0$.
$H\colon x_0 = 0 \Rightarrow H \cong \mathbf{CP}^{n-1} \rightsquigarrow U = \mathbf{CP}^n - H \cong \mathbf{C}^n \Rightarrow \pi_1(U) = 0$
$a = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbf{CP}^n \rightsquigarrow V = \mathbf{CP}^n - \{a\} \supset H$

$$K\colon V \times I \to V$$

$$K([x_0, x_1, \ldots, x_n], t) = [(1-t)x_0, x_1 \ldots, x_n]$$

retrazione per deformazione $V \searrow H \Rightarrow \pi_1(V) \cong \pi_1(H) \cong \pi_1(\mathbf{CP}^{n-1}) = 0$
$U \cap V \cong \mathbf{C}^n - \{0\} \cong \mathbf{R}^{2n} - \{0\} \searrow S^{2n-1}$ connesso per archi.

Oss.
S^n semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 2$.
$\mathbf{RP}^n$ non semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 1$
$\mathbf{CP}^n$ semplicemente connesso $\forall\, n \geqslant 0$.

Teorema di Borsuk-Ulam

Teor. *$\forall f : S^2 \to \mathbf{R}^2$ continua $\Rightarrow \exists\, u \in S^2$ t.c. $f(u) = f(-u)$.*

Dim. Per assurdo, $f(x) \neq f(-x)$, $\forall\, x \in S^2 \rightsquigarrow$

$$g : S^2 \to S^1$$

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

$g(-x) = -g(x) \rightsquigarrow G : \mathbf{RP}^2 \to \mathbf{RP}^1$, $G([x]) = [g(x)]$ continua $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbf{RP}^2) \arrow[r, "G_* = 0"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_1(\mathbf{RP}^1) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & S^1 \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbf{RP}^2 \arrow[r, "G"'] & \mathbf{RP}^1 \end{tikzcd}$$

$g \circ \tilde{\omega}$ sollevamento di $G \circ \omega$ tramite $p : S^1 \to \mathbf{RP}^1$. $\tilde{\omega}(1) = -\tilde{\omega}(0) \Rightarrow$
$(g \circ \tilde{\omega})(1) = -(g \circ \tilde{\omega})(0) \Rightarrow G_*([\omega]) \neq 0$, contraddizione. □

Oss. In ogni istante ci sono due punti diametrali della superficie terrestre con stessa temperatura e pressione atmosferica.

Cor. *S^2 non si può immergere in $\mathbf{R}^2$.*

Oss. Non è possibile realizzare una mappa planare continua di tutta la superficie terrestre.