ESERCIZI SU EQUAZIONI CARTESIANE E PARAMETRICHE
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera la retta r del piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ data dalle equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

Dimostra che il punto $(0, -2)$ appartiene a r. Sia W la giacitura di r. **Dimostra** che il vettore $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ appartiene a W. **Dimostra** che la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$$

coincide con r.

Risoluzione.

Al fine di dimostrare che $(0, -2)$ appartiene a r dobbiamo mostrare che esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 1 + t = 0 \\ 2t = -2 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema precedente è compatibile e ammette come soluzione $t = -1$, dunque il punto $(0, -2)$ appartiene alla retta r.

Determiniamo la giacitura di r. Le equazioni parametriche di r possono essere riscritte come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la giacitura di r è $W = \operatorname{span}(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$. A questo punto, dato che $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) = 3 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ otteniamo che $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \in W$.

Infine, chiamiamo s la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3\tau \\ y = -2 + 6\tau \end{cases}$$

Vogliamo verificare che $r = s$. Mostriamo dunque entrambe le inclusioni:

"$\subseteq$" Sia $P \in r$, allora $P = (1 + \bar{t}, 2\bar{t})$ per un qualche $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Per verificare che $P \in s$ dobbiamo mostrare che esiste $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ tale che $P = (3\bar{\tau}, -2 + 6\bar{\tau})$. Quindi dobbiamo vedere se il sistema lineare

$$\begin{cases} 3\tau = 1 + \bar{t} \\ -2 + 6\tau = 2\bar{t} \end{cases}$$

sia compatibile (dove, badiamo bene, la variabile è solamente τ, dato che il valore $\bar{t}$ è fissato). Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} 3\tau = 1 + \bar{t} \\ 6\tau = 2 + 2\bar{t} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\bar{t}$$

Quindi se scegliamo $\bar{\tau} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\bar{t}$ allora abbiamo che $P = (3\bar{\tau}, -2 + 6\bar{\tau})$. Pertanto $P \in s$.

"$\supseteq$" Sia $P \in s$, allora $P = (3\bar{\tau}, -2 + 6\bar{\tau})$ per un qualche $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$. Per verificare che $P \in r$ dobbiamo mostrare che esiste $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $P = (1 + \bar{t}, 2\bar{t})$. Quindi dobbiamo vedere se il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 + t = 3\bar{\tau} \\ \quad 2t = -2 + 6\bar{\tau} \end{cases}$$

sia compatibile (dove, badiamo bene, la variabile è solamente t, dato che il valore $\bar{\tau}$ è fissato). Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} t = 3\bar{\tau} - 1 \\ 2t = 6\bar{\tau} - 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t = 3\bar{\tau} - 1$$

Quindi se scegliamo $\bar{t} = 3\bar{\tau} - 1$ allora abbiamo che $P = (1 + \bar{t}, 2\bar{t})$. Pertanto $P \in r$.

Equivalentemente, per verificare che $r = s$ possiamo determinare equazioni cartesiane per r e per s e verificare che esse siano sistemi lineari equivalenti. Calcoliamo equazioni cartesiane per r. Sappiamo che se $P = (x, y)$, allora $P \in r$ se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ 2 & y - 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Se effettuiamo la gradinizzazione di Gauss, otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & x - 1 \\ 0 & y - 2x + 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto la matrice ha rango 1 se e solo se

$$y - 2x + 2 = 0\,.$$

Abbiamo dunque ottenuto un'equazione cartesiana di r. Procedendo allo stesso modo per s, dobbiamo imporre che la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & x - 0 \\ 6 & y + 2 \end{pmatrix}$$

abbia rango 1. Effettuando la gradinizzazione di Gauss otteniamo

$$\begin{pmatrix} 3 & x \\ 0 & y + 2 - 2x \end{pmatrix}$$

Pertanto un'equazione cartesiana di s è

$$y + 2 - 2x = 0\,.$$

Visto che le equazioni cartesiane di r ed s sono uguali, in particolare essere sono equivalenti, pertanto gli insiemi delle loro soluzioni sono uguali e quindi $r = s$.

Esercizio 2

In ciascuno dei seguenti casi **determina** equazioni parametriche e cartesiane della retta in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto P e parallela al vettore v:

(i) $P = (-10, -10, 10)$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $P = (-1, -1, -2)$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(iii) $P = (7, 1, -1)$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Risoluzione.

(i) Equazioni parametriche per la retta sono date da

$$\begin{cases} x = -10 + 10t \\ y = -10 - 18t \\ z = 10 + 3t \end{cases}$$

Equazioni cartesiane sono ottenute effettuando la gradinizzazione di Gauss sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 10 & x + 10 \\ -18 & y + 10 \\ 3 & z - 10 \end{pmatrix}.$$

Il risultato della gradinizzazione è

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10}x + 1 \\ 0 & \frac{9}{5}x + y + 28 \\ 0 & -\frac{3}{10}x + z - 13 \end{pmatrix}.$$

Dato che la retta ha dimensione 1 dobbiamo imporre che la matrice abbia rango 1, dunque imponiamo che la seconda e la terza riga siano nulle, ottenendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{5}x + y = -28 \\ -\dfrac{3}{10}x + z = 13 \end{cases}$$

Il sistema precedente dà quindi equazioni cartesiane per la retta.

Esercizio 3

Determina un'equazione cartesiana della retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passante per i punti P e Q in ognuno dei casi seguenti:

(i) $P = (1, -1)$, $Q = (3, 2)$;

(ii) $P = (2, 0)$, $Q = (-1, -1)$;

(iii) $P = (0, 0)$, $Q = (0, 8)$.

Risoluzione.

(i) Sappiamo che se W è la giacitura della retta r passante per P e per Q, allora $\vec{PQ} \in W$. D'altra parte, dato che r è una retta, allora la dimensione di W è 1, pertanto $W = \operatorname{span}(\vec{PQ})$. Quindi la retta cercata è il sottospazio affine passante per P e parallelo a $\mathrm{span}(\vec{PQ})$. Abbiamo che $\vec{PQ} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Pertanto, un punto (x, y) appartiene alla retta se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ 3 & y+1 \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Tale matrice 2×2, non essendo la matrice nulla, ha rango 1 se e solo se il suo determinante è nullo. Otteniamo quindi l'equazione

$$2(y+1) - 3(x-1) = 0\,,$$

che è l'equazione cartesiana della retta.

Esercizio 4

Dato un vettore v e le equazioni cartesiane di due rette r ed s in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, **determina** equazioni parametriche per la retta in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ parallela al vettore v e passante per il punto $r \cap s$ (il punto di intersezione tra r ed s) in ciascuno dei casi seguenti:

(i) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $r\colon\ 3x - 2y = 7$, $s\colon\ 2x + 3y = 0$;

(ii) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix}$, $r\colon\ x - y = 5$, $s\colon\ x + y = 1$.

Suggerimento: il punto $r \cap s$ è quel punto $P = (x, y)$ che soddisfa entrambe le equazioni cartesiane delle due rette.

Risoluzione.

(i) Determiniamo il punto P di intersezione tra r ed s. Esso è il punto di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ha come soluzione $P = (21/13, -14/13)$. Pertanto la retta passante per P e parallela al vettore v ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{21}{13} + 2t \\ y = -\dfrac{14}{13} - \sqrt{2}t \end{cases}$$

Esercizio 5

Determina equazioni cartesiane del sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ passante per $Q = (1, 2, -1, -2)$ e parallelo al sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ dato da

$$W = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

Determina equazioni parametriche del sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Risoluzione. Un punto $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ di $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ appartiene al sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ passante per Q e parallelo a W se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 1 \\ -1 & 0 & x_2 - 2 \\ 1 & -1 & x_3 + 1 \\ 1 & 2 & x_4 + 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Applicando la gradinizzazione di Gauss otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -x_1 + x_4 + 3 \end{pmatrix}.$$

Affinché tale matrice abbia rango 2, imponiamo che le ultime due righe siano tutte nulle, il che è equivalente a imporre il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + x_4 = -3 \end{cases}$$

il quale dà equazioni cartesiane per il sottospazio affine S.
Se ora abbiamo un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

per determinarne equazioni parametriche andiamo a calcolare la generica soluzione del sistema lineare. La matrice completa associata al sistema è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Una volta gradinizzata, otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Una soluzione particolare è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema lineare associato sono della forma

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo pertanto le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_2 \\ x_2 = 1 + t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$