Lezione 7 dicembre 2023

giovedì 7 dicembre 2023 11:14

Teorema di Cramer:

Sia $A\cdot x = b$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ e invertibile

Allora: $\underline{\exists!\ s \text{ soluzione}}$, con $\underline{s = A^{-1}\cdot b}$

Dim.: Verifico prima che $\underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{n\times n}\cdot\underbrace{b}_{n\times 1}}_{n\times 1}$ è una soluzione.

Cons. $A\cdot(\underbrace{A^{-1}\cdot b}_{=s}) \underset{ass.}{=} (\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{=I_n})\cdot b = b$

$\Rightarrow s = A^{-1}\cdot b$ soddisfa $A\cdot x = b$.

Non ci sono altre soluzioni: se s' altra soluzione:

$$A\cdot s' = b \qquad \circledast$$

A invertibile $\Rightarrow \exists\, A^{-1}$ & posso molt. per A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot s') = A^{-1}\cdot b$$

$$\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{=I_n}\cdot s' = A^{-1}\cdot b$$

$$s' = \boxed{A^{-1}\cdot b} = s$$

Corollario delle eq. in 1 incognita x_1:

$$a x_1 = b \quad , \quad a, b \in \mathbb{K}$$

se $a \neq 0$, l'unica soluz. $x_1 = (a^{-1})\cdot b$

* * *

DIAGONALIZZAZIONE di ENDOMORFISMI (operatori LIN.)

Def.: Sia $f: V \longrightarrow V$ ENDOM. (OP. LIN.) $\dim V = n$. Allora f si dice DIAGONALIZZABILE se $\exists$ B di V t.c.

$$M_B^B(f) \text{ sia DIAGONALE}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con eventuali ripetizioni e

con eventuali zeri sulla diagonale

In questo caso $\mathcal{B}$ si dice BASE CHE DIAG. f

Es.: La matrice nulla è diagonale, I_n, ...

OSS.: Se $\mathcal{B}$ è base che diagonalizza f

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \cdots + 0 \cdot v_n$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$, v_1 è mandato in un vettore proporzionale

$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \lambda_2 \cdot v_2$

$\vdots$

$f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = \lambda_n v_n$

Def.: Un vettore $v \in V$, $v \neq 0_V$ si dice AUTOVETTORE per $f: V \to V$ se

$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

(λ può essere eventualmente $= 0$).

In questo caso λ si dice AUTOVALORE,

v AUTOVETT. relativo a λ

OSS.: $f(0_V) = 0_V$ $\forall f$ ENDOM.

$f(0_V) = \lambda \cdot 0_V$ $\forall \lambda$

non ha senso.

OSS.: Se $v \neq 0_V$ e $f(v) = \lambda \cdot v$

$\Rightarrow \lambda$ è unico

Per ass. $f(v) = \lambda' \cdot v = \lambda \cdot v$

$$(\lambda' - \lambda) \cdot \underbrace{v}_{\neq 0_V} = 0_V \quad \Rightarrow \lambda' = \lambda$$

Teorema: Autovettori relativi a autovalori diversi sono LIN. INDIP.

Dim.: Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori per f tutti diversi, e siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori relativi.

Facciamo dim. per induzione su k:

$k=1$ $\quad f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $\quad v_1$ è LIN. INDIP.?

sì, perché $v_1 \neq 0_V$ per def. di autovettore.

Supp. vero per $k-1$

e cons. $v_1, \dots, v_k$:

✿ se $\boxed{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} + a_k v_k = 0_V}$ $\quad / \cdot \lambda_k$

$\Rightarrow f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{k-1} v_{k-1} + a_k v_k) = f(0_V)$

$\Rightarrow a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_{k-1} f(v_{k-1}) + a_k f(v_k) = 0_V$

$\underset{\text{autovettori}}{\Rightarrow} a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + a_k \lambda_k v_k = 0_V$

$a_1 \lambda_k v_1 + a_2 \lambda_k v_2 + \dots + a_{k-1} \lambda_k v_{k-1} + a_k \lambda_k v_k = 0_V$ $\quad -$

☆ $\underbrace{a_1 \overbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}^{\neq 0 \text{ per ipotesi}}}_{=0} v_1 + a_2 \overbrace{(\lambda_2 - \lambda_k)}^{\neq 0} v_2 + \dots + a_{k-1} \overbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}^{\neq 0} v_{k-1} = 0_V$

comb. lineare di $v_1, \dots, v_{k-1}$ autovettori rel.

$\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ tutti diversi

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva, $v_1, \dots, v_{k-1}$ LIN. INDIP.

$\Rightarrow$ tutti i coeff in $\circledast$ sono nulli

Siccome $\lambda_i - \lambda_k \neq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, k-1$

$$\Rightarrow a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$$

In ✿ rimane solo $a_k \underbrace{v_k}_{\neq 0_V} = 0_V \Rightarrow a_k = 0$

v_k autovettore $\Rightarrow v_k \neq 0_V$

COROLLARIO: $f: V \to V$ ENDOM.

$\dim V = n \Rightarrow f$ ha AL PIÙ n autovalori diversi.

Inoltre: se f ammette n autov. diversi

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

$\Rightarrow \exists$ una base formata da AUTOVETTORI

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \mathcal{B} \; ; \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

RICERCA DI AUTOVETT. & AUTOVAL.

OSS.: $v \neq 0_V$ è autovettore $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in K : f(v) = \lambda v$

$\Leftrightarrow \quad f(v) - \lambda v = 0_V$

$\Leftrightarrow \quad (f - \lambda\, Id_V)(v) = 0_V$
$(= f(v) - \lambda\, Id_V(v))$

$\Leftrightarrow \quad v \in \ker(f - \lambda\, Id_V)$

Def.: Se λ è un autovalore per $f: V \to V$

poniamo $Aut(\lambda) := \ker(\underbrace{f - \lambda Id_V})$

$f - \lambda Id_V : V \to V$

AUTOSPAZIO RELAT. A λ

è SSV

Esercizio: $\underline{Aut(\lambda)} = \{$tutti gli autovettori relativi a $\lambda\} \cup \{0_V\}$

Def.: Se λ è autovalore, $\{0_V\} \subsetneq Aut(\lambda) \subseteq V$

$\dim Aut(\lambda) =: m_g(\lambda)$ MOLTEPLICITA' GEOMETRICA di λ.

Dalla def. si ha

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq n$$

$\underline{\text{Def.}}$: Poniamo: $Sp(f) :=$ SPETTRO DI f

$:= \{\lambda_1, \dots, \lambda_k \mid \lambda_i$ autovalore di $f\}$

(senza ripetizioni).

Definizioni analoghe per matrici:

$A \in M_n(K)$;

Def: $v \in K^n$ è autovettore per A

$v \neq 0_{K^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ v è autovettore per $L_A : K^n \to K^n$

$\exists \lambda \in K \quad L_A(v) = \lambda v$

cioè $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$Sp(A) := Sp(L_A)$

RICERCA DI AUTOVALORI

OSS.: $\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow \exists$ almeno $v \neq 0_V$ t.c.
$f(v) = \lambda v$

$\Longleftrightarrow \ker(f - \lambda Id_V) \neq \{0_V\}$

$\Longleftrightarrow f - \lambda \cdot Id_V$ NON è INIETTIVA
$f - \lambda Id_V : V \longrightarrow V$

$\Longleftrightarrow f - \lambda Id_V$ NON è ISOMORF.

$\Longleftrightarrow \forall\, \mathcal{C}$ base di V

$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f - \lambda \cdot Id_V)$ NON è invertibile

$$\Longleftrightarrow \det \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f - \underbrace{\lambda\, Id_V})}_{} = 0$$

$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} : Hom(V,V) \longrightarrow M_n(K)$
è AL

$$= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\lambda \cdot Id_V)$$

$$= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(Id_V)$$

$$= M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{I}_n$$

Quindi: se $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - \lambda \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow \det \quad = 0$
per una qualunque base $\mathcal{C}$

IDEA: Cons. la matrice: sia x incognita

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) - x \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22}-x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

$p_f(x) := \det\left(M^e_e(f) - x\cdot\mathbb{I}_n\right)$ è

un polinomio, che si chiama

POLINOMIO CARATTERISTICO DI f.

Prop.: $\lambda \in Sp(f) \Longleftrightarrow \lambda$ è una radice $p_f(x)$.

OSS. $p_f(x)$ non dipende dalla scelta della base e,

Infatti: Se ho altra base e':

$$M^e_e(f) - x\cdot\mathbb{I}_n = M^e_e(f - x\cdot Id_V)$$

$$M^{e'}_{e'}(f - x\cdot Id_V) = M^e_{e'}(Id_V)\cdot M^e_e(f - x\cdot Id_V)\cdot \underbrace{M^{e'}_e(Id_V)}_{=\left(M^e_{e'}(Id_V)\right)^{-1}}$$

$M^{e'}_{e'}(f - x\cdot Id)$ e $M^e_e(f - x\cdot Id_V)$ sono

MATRICI SIMILI

$$\det\left(M^{e'}_{e'}(f - x\, Id_V)\right) = \det\left(M^e_e(f - x\cdot Id_V)\right)$$

per BINET.

OSS.: Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, $p_A(x)$ = polin. caratt. di A $=: p_{L_A}(x)$

$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$p_A(x) = p_{L_A}(x) = \det\left(A - x\cdot\mathbb{I}_n\right)$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) = A$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A - x \cdot \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix}}$$

$$p_A(x) = \det(A - x \cdot \mathbb{I}_2) = (1-x)(3-x) - 2 \cdot 2$$

$$= 3 - 4x + x^2 - 4 = x^2 - 4x - 1$$

$\Delta = 16 + 4 = 20 > 0$

$$\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

$\Rightarrow Sp(L_A) = Sp(A) = \{2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\}$

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ha 2 autoval. distinti

$\Rightarrow$ ha 2 autovettori LIN. INDIP.

$\Rightarrow L_A$ è diagonalizzabile

Cons. v_1 autovettore relativo a $\lambda_1 = 2 - \sqrt{5}$

$$v_1 \in \mathrm{Aut}(\lambda_1) = \ker(L_A - \lambda_1 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$$

eq. sono date da SLO :

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A - \lambda_1 \cdot Id_{\mathbb{R}^2}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A) - \lambda_1 \cdot I_2$$

$$= A - \lambda_1 \cdot I_2$$

$$(A - \lambda_1 I_2) \cdot X = 0$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - (2-\sqrt{5}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Prova: det $= (-1+\sqrt{5}) \cdot (1+\sqrt{5}) - 4$

$$= 5 - 1 - 4 = 0$$

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{5})\, x_1 + 2\, x_2 = 0 \\ 2\, x_1 + (1+\sqrt{5})\, x_2 = 0 \end{cases}$$

sono eq. prop.

infatti: $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(2\, x_1 + (1+\sqrt{5})\, x_2\right)$

$$= (-1+\sqrt{5})\,x_1 + \frac{4}{2}\,x_2$$

$$= (-1+\sqrt{5})\,x_1 + 2\,x_2 = 0$$

è equiv.

$$\boxed{(-1+\sqrt{5})\,x_1 + 2\,x_2 = 0}$$

è un'equazione cartesiana di $Aut(2-\sqrt{5}) = \ker(L_A - \lambda_1 \cdot Id_{\mathbb{R}^2})$

Spazio delle soluzioni $= Aut(2-\sqrt{5})$

$$\dim Aut(2-\sqrt{5}) = n - \underset{\substack{\downarrow \\ A-\lambda_1 \mathbb{I}_2}}{rg(\ldots)} = 2-1 = 1$$

è una retta vettoriale

Una sua base è costituita da un qualunque vettore non nullo, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

Autovettore v_2 relativo a $\lambda_2 = 2+\sqrt{5}$

Cons. $A-(2+\sqrt{5})\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} = M$

$rg\,M = 1$ $(\det M = 0)$

cons $M \cdot X = 0$

è equiv. a $(-1-\sqrt{5})\,x_1 + 2\,x_2 = 0$ (𝄞)

v_2: basta scegliere qualunque vettore $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

che soddisfa (𝄞) è $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$