Help room 12 dicembre 2023

martedì 12 dicembre 2023 14:17

$\overline{\underline{\text{IX}}}$ Foglio

Es. ①

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$Sp(A) = Sp(L_A) =$ radici di $p_A(x)$

$$p_A(x) = \det(A - x \cdot \mathbb{I}_3)$$

$$A - x \cdot \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} -3-x & 0 & 0 \\ 2a & b-x & a \\ 10 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$\det(A - x \cdot \mathbb{I}_3) = (-3-x) \cdot \det\begin{pmatrix} b-x & a \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} - 0 \cdot \det(\cdot\cdot) + 0 \cdot \det(\dots)$$

↓ Laplace risp. prima riga

$$= (-3-x)\,(b-x)\,(2-x)$$

radici: $\{-3, 2, b\}$

Distinguo 3 casi: ⓘ $b \neq -3$, $b \neq 2$

in questo caso ho 3 autovalori diversi
per il Corollario visto a lezione, esiste
sempre base di autovettori
(se scelgo $v_1 \in Aut(-3)$, $v_2 \in Aut(2)$,

$v_3 \in Aut(b)$, sono LIN. INDIP. $\Rightarrow$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori

(ii) $b = 2$: $Sp(A) = \{2, -3\}$

calcolo $Aut(2)$ e $Aut(-3)$

$$Aut(2) = \ker(L_A - 2 \cdot Id_{\mathbb{R}^3})$$

eq. $(A - 2 \cdot I_3) \cdot X = 0$

$$A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -3-2 & 0 & 0 \\ 2a & b-2 & a \\ 10 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$b = 2$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Aut(2)$ è il SSV delle soluzioni del SLO

$$\dim Aut(2) = 3 - rg\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

$$Aut(-3) = \ker(L_A - (-3) \cdot Id_{\mathbb{R}^3})$$

eq. $(A + 3 \cdot I_3) \cdot X = 0$, $b = 2$

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 5 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$rg(A + 3I_3) = 2 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Aut}(-3) = 3 - rg = 3-2 = 1$

Se $\dim \mathrm{Aut}(2) = 2$, posso scegliere una terna di autovettori LIN. INDIP.

$$v_1, v_2 \in \mathrm{Aut}(2), \qquad v_3 \in \mathrm{Aut}(-3)$$

se $\dim \mathrm{Aut}(2) = 1$, $\dim \mathrm{Aut}(-3) = 1$

NON $\exists$ base di autovettori

(iii) $b = -3$, $Sp(A) = \{2, -3\}$

$$\mathrm{Aut}(2) = \ker(A - 2 \cdot I_3)$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3-2 & 0 & 0 \\ 2a & -3-2 & a \\ 10 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & -5 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - 2I_3) = 2 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Aut}(2) = 3 - rg = 3-2 = 1$$

$$\mathrm{Aut}(-3) = \ker(A + 3I_3)$$

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$rg(A + 3I_3) = 1$$

$\dim \mathrm{Aut}(-3) = 3 - rg = 3 - 1 = 2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\dim \mathrm{Aut}(2) = 1 \qquad\qquad \dim \mathrm{Aut}(-3) = 2$

$\Longrightarrow$ una base di autovettori è

$v_1 \in \mathrm{Aut}(2), \qquad v_2, v_3 \in \mathrm{Aut}(-3)$

CONCLUSIONE:

A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$

$b \neq 2$ e $b \neq -3$, $\forall a \in \mathbb{R}$, oppure

$b = 2$ e $a = 0$, oppure

$b = -3$ e $\forall a \in \mathbb{R}$

④ $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2} = \{ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

base $\{1, t, t^2\}$

$T : V \longrightarrow V$

$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$T(p(t)) = p(t+1)$

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$p(t+1) = a_0 + a_1 (t+1) + a_2 (t+1)^2$

$= a_0 + a_1 t + a_1 + a_2 (t^2 + 2t + 1)$

$$= (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2)\cdot t + a_2 t^2$$

Anche se non richiesto dal testo dell'esercizio, verifichiamo che T è AL.

2 modi: controlliamo direttamente

$$T(\alpha p(t) + \beta g(t)) \overset{?}{=} \alpha \cdot T(p(t)) + \beta \cdot T(g(t))$$

scriviamo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$
$g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$
e calcoliamo esplicitamente $T(\alpha p(t) + \beta g(t))$, calcoliamo $\alpha T(p(t)) + \beta T(g(t))$, e confrontiamo i risultati.

oppure: $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$

$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ AL COORDINATA

$F_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è iso di SV

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] \arrow[r, bend right=90] & \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] \\
f_T : \mathbb{R}^3 \arrow[r] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$$T = F_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f_T \circ F_{\mathcal{B}}$$

così definita

$$f_T(\text{coordinate di } p(t)) = (\text{coordinate di } T(p(t)))$$

$$f_T\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \text{ dove}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇒ f_T è la molt. per una matrice

⇒ è AL

⇒ siccome $T = F_B^{-1} \circ f_T \circ F_B$

T è composta di 3 AL, e abbiamo visto che la $\circ$ di AL è ancora AL, concludo che T è lineare

$$M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(p(t)) = p(t+1)$$

infatti:

$$T(1) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$T(t) = t+1 = 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2$$

$$T(t^2) = (t+1)^2 = t^2 + 2t + 1 = 1\cdot 1 + 2\cdot t + 1\cdot t^2$$

$$B = \{1, t, t^2\}$$

Polinomio caratteristico di T :

$$p_T(x) = \det\left(M_B^B(T) - x\cdot \mathbb{I}_3\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^3$$

$$Sp(T) = \{1\}$$

$$\mathrm{Aut}(1) = \ker\left(T - 1\cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$$

$$\text{eq.}\ \Big(\underbrace{M^{B}_{B}(T) - 1\cdot I_3}\Big)\cdot X = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg} \longrightarrow \quad = 2$

$\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Aut}(1) = 3 - \mathrm{rg} = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow$ non $\exists$ base di autovettori

$\Rightarrow$ T non è diagonalizzabile