Matrice di b_A rispetto alla base canonica

$A \in M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $b_A(X, Y) = {}^tXAY \Rightarrow M_{\mathcal{E}_n}(b_A) = A$.

Cambio di base per forme bilineari

Def. Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono *congruenti* se $\exists\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$B = {}^tPAP.$$

Oss. La congruenza è una relazione d'equivalenza.

Teor. *$b : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{V}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ basi per $V \Rightarrow M_{\mathcal{V}'}(b) = {}^tPM_{\mathcal{V}}(b)P$ con $P = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}'}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Oss. La congruenza rappresenta il cambio di base per forme bilineari.

N. B. Non confondere congruenza $B = {}^tPAP$ e similitudite $B = P^{-1}AP$.

Dim. $A = M_{\mathcal{V}}(b)$, $A' = M_{\mathcal{V}'}(b)$. $\forall\, v, w \in V$ con coordinate rispettivamente

$$v = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad w = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ rispetto a } \mathcal{V}$$

$$v = X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad w = Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \text{ rispetto a } \mathcal{V}' \Rightarrow X = PX',\ Y = PY'$$

$$b(v, w) = {}^tX'A'Y' = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'\,{}^tPAP\,Y' \Rightarrow A' = {}^tPAP.$$

$\square$

Spazi vettoriali Euclidei

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

Def. Si chiama *norma* o *lunghezza* di un vettore $v \in V$ il numero

$$\|v\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Oss.

(*1*) $\|v\|$ ben definita perché $\langle\ ,\ \rangle$ definito positivo: $\langle v, v\rangle \geqslant 0$.

(*2*) $\|v\| \geqslant 0$, $\forall\, v \in V$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

(*3*) $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

(*4*) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

(*5*) $v \neq 0_V \Rightarrow \dfrac{v}{\|v\|}$ ha norma 1 (*normalizzazione* di v).

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. $\forall\, v, w \in V$ si ha

$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|.$$

Inoltre vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ v e w linearmente dipendenti.

Dim. Se $w = 0_V$ vale l'uguale. Supponiamo $w \neq 0_V \rightsquigarrow \alpha := -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$

$$0 \leqslant \langle v+\alpha w, v+\alpha w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, \alpha w\rangle + \langle \alpha w, v\rangle + \langle \alpha w, \alpha w\rangle =$$

$$= \|v\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \alpha^2\|w\|^2 = \|v\|^2 - 2\frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 =$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\|w\|.$$

Non dimostriamo l'ultima affermazione. □

Disuguaglianza triangolare per la norma. $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

Dim.

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.$$ □

Angolo convesso tra due vettori non nulli. $\forall\, v, w \in V - \{0_V\} \Rightarrow$

$$-1 \leqslant \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leqslant 1 \Rightarrow \exists!\, \vartheta \in [0, \pi] \text{ t.c. } \cos\vartheta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Def. ϑ si chiama *angolo tra* v e w. Scriviamo $\vartheta = \widehat{vw}$.

$$\boxed{\widehat{vw} \overset{\text{def}}{=} \arccos\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}} \qquad \boxed{\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\|\cos\widehat{vw}}$$

N. B. L'angolo non è definito se uno dei vettori è nullo.

Def. $v, w \in V$ sono *ortogonali* se $\langle v, w\rangle = 0$. Scriviamo $v \perp w$.

Oss. Supponiamo $v, w \in V - \{0_V\}$.

(*1*) $\widehat{vw} = 0 \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0$ t.c. $v = \alpha w$ (*proporzionali concordi*).

(*2*) $0 < \widehat{vw} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v, w\rangle > 0$ (*angolo acuto*).

(*3*) $\widehat{vw} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$ (*ortogonali*).

(*4*) $\dfrac{\pi}{2} < \widehat{vw} < \pi \Leftrightarrow \langle v, w\rangle < 0$ (*angolo ottuso*).

(*5*) $\widehat{vw} = \pi \Leftrightarrow \exists\, \alpha < 0$ t.c. $v = \alpha w$ (*proporzionali discordi*).

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare canonico i vettori
$v = (1, 2)$, $w = (-2, 1) \Rightarrow \|v\| = \|w\| = \sqrt{5}$, $\langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow \widehat{vw} = \dfrac{\pi}{2}$.

Esempio. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare canonico i vettori
$v = (-1, 0, 1)$, $w = (0, 1, 1) \Rightarrow \|v\| = \|w\| = \sqrt{2}$, $\langle v, w\rangle = 1 \Rightarrow \widehat{vw} = \dfrac{\pi}{3}$.

Prop. *Siano $v_1, \dots, v_k \in V$ a due a due ortogonali e non nulli. Allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.*

Dim. Per ipotesi $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, $\forall\, i \neq j$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

$$\langle v_i, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k\rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle = \alpha_i \|v_i\|^2 = 0.$$

$\|v_i\| \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, $\forall\, i$, quindi sono linearmente indipendenti. □

Basi ortonormali

Def. Una base $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ per V è *ortogonale* se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, $\forall\, i \neq j$.
$\mathcal{U}$ è *ortonormale* se $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j = 1, \dots, n$.

Oss. $\mathcal{U}$ ortonormale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ ortogonale e $\|u_i\| = 1$, $\forall\, i = 1, \dots, n$.

Oss. Normalizzando una base ortogonale se ne ottiene una ortonormale.

Oss. La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. *$v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_n \in V$ ortogonali t.c.*

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k), \quad \forall\, k = 1, \dots, n.$$

Dim. La dimostrazione è costruttiva. Definiamo gli u_k in modo ricorsivo.

$$u_1 = v_1$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i \qquad \text{per } k \geqslant 2.$$

Si pone per definizione $u_1 = v_1$, e in secondo luogo, supponendo di aver costruito $u_1, \dots, u_{k-1}$, si definisce u_k mediante la formula. Per $j < k$ si ha

$$\langle u_k, u_j\rangle = \langle v_k, u_j\rangle - \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{\langle u_j, u_j\rangle} \langle u_j, u_j\rangle = 0$$

cui si giunge usando la bilinearità e $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ per $i \neq j$.
$v_j \in \operatorname{span}(u_1, \dots, u_j)$ e $u_j \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$, $\forall\, j \leqslant k \Rightarrow$
$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_k)$ e $u_k \neq 0_V$. □

Cor. *V ammette basi ortonormali se* $\dim V < \infty$.

Esempio.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normalizzando si ha la base ortonormale per $\mathbb{R}^2$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oss. I vettori u_k possono essere moltiplicati per scalari non nulli preservando le proprietà dell'enunciato. Questo a volte semplifica i calcoli.

Esempio. $U \subset \mathbb{R}^4$ sottospazio vettoriale di equazione

$$U: \ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Determiniamo una base di U.

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 - t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{-1}{2} u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_3 &= v_3 - \frac{-1}{2} u_1 - \frac{1}{6} u_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per determinare una base ortonormale per U basta normalizzare gli u_i.

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$