Aspetti topologici

Consideriamo una teoria di campo in $d=1$, cioè i campi sono funzioni

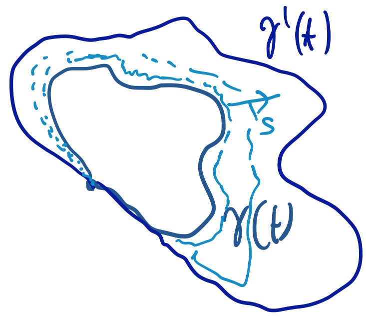
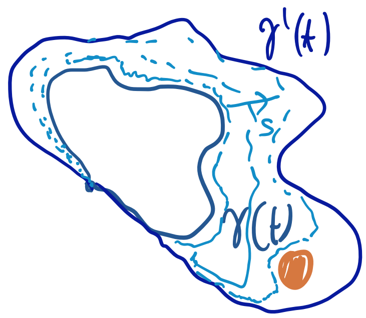
$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Q \qquad\qquad \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to Q \\ x^\mu \mapsto \phi(x) \end{array}\right)$$
$$t \mapsto \varphi(t)$$

Q viene detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Ci concentreremo ora su spazi Q topologicamente non-triviali, con $\pi^1(Q) \neq 0$

$\pi^1(Q)$ è il GRUPPO FONDAMENTALE di Q:

- consideriamo i loop (curve chiuse) in Q, cioè
$$\gamma : [0,1] \longrightarrow Q \qquad \text{t.c.} \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$
chiamiamo $\mathcal{L}(Q)$ lo spazio dei loop di Q;

- prendiamo la relazione di equivalenza data dalle OMOTOPIE
$\gamma \cong \gamma'$ se $\exists$ omotopia (funz. continua)
$$\alpha : \underset{t \in}{[0,1]} \times \underset{s \in}{[0,1]} \longrightarrow Q$$
(Per ogni valore di s fissato mi def. una curva)
$$\text{t.c.} \quad \alpha(t,0) = \gamma(t) \qquad \alpha(t,1) = \gamma'(t)$$

$\gamma \cong \gamma'$   $\gamma \not\cong \gamma'$

- Tutti i loop deformabili in maniera continua l'uno nell'altro stanno in UNA CLASSE DI EQUIVALENZA

• Possiamo costruire lo spazio quoziente (cioè l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza)

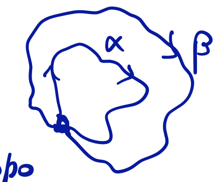
$$\mathcal{L}(Q)/_{\cong} \equiv \pi^1(Q)$$

ho una struttura di GRUPPO:

→ il PRODOTTO è costruito a partire da $\mathcal{L}(Q)$:

$\alpha, \beta \in \mathcal{L}(Q)$

$$\alpha * \beta(t) \equiv \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t < 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \qquad \alpha(1) = \beta(0)$$



→ * che prodotto che soddisfa condiz. di gruppo in $\pi^1(Q)$:

- Id = [loop costante] $\gamma(t) = \gamma_0$
- Inverso $[\gamma(t)]^{-1} = [\gamma(1-t)]$
- Associatività è rispettata

• Se $\pi^1(Q) \neq 0$ → Q <u>NON</u> è SEMPLICEMENTE CONNESSO

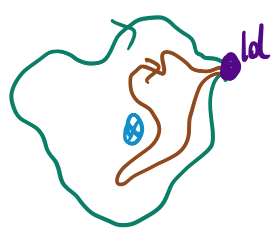
→ ci sono loop che non sono equivalenti all'identità, cioè non possono essere contratti a un pto.

Esempi

1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$\pi^1 \cong \mathbb{Z}$

gruppo con +



$\alpha \not\cong \beta \cong \rho$

Un loop che gira n volte attorno $\{0\}$ $\not\cong$ a un loop " " m " " $\{0\}$ se $n \neq m$

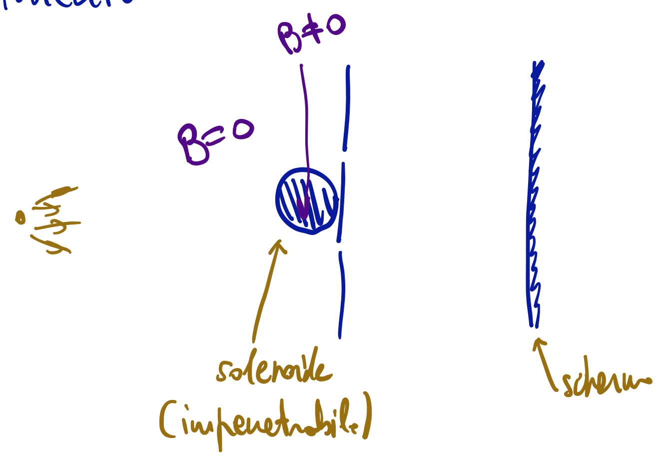
$[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$ (isomorfismo di gruppi)

2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro infinito}\}$ $\qquad \pi^1 \simeq \mathbb{Z}$

AHARONOV-BOHM EFFECT

Consideriamo una particella che si muove in Q; la sua traiettoria è descritta da un CAMPO $x: \mathbb{R} \to Q$ $(d=1)$.
Possiamo interpretare la Lagrangiana della particella $L(x, \dot{x})$ come la Lagrangiana di una teoria di campo 1 dimensionale.

Esperimento:



Le frange di interferenza CAMBIANO variando il campo magnetico B dentro il solenoide; inoltre, la fig. di interferenza si ripete uguale quando il flusso del campo magn. Φ_B è shiftato di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Sp. delle config. $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \Rightarrow \pi^1(Q) = \mathbb{Z}$

Consideriamo un potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi \qquad \Rightarrow \quad B = dA = 0$$

parametro arbitrario

angolo azimutale

classicamente ci aspettiamo forza nulla sulla particella

$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \frac{\theta \hbar c}{e}$$

$$= \int_D B = \Phi_B$$

$$\to \quad \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$

$\partial D = S^1$

Cosa cambia accendendo $B\neq 0$ dentro il solenoide?

→ l'azione della particella carica cambia e viene aggiunto un termine

$$\int \mathcal{L}_A = -\frac{e}{c}\int dt\ \dot{\bar{x}}\cdot\bar{A} = -\frac{e}{c}\int_\gamma A \qquad \text{con } A = \theta\,\frac{\hbar c}{2\pi e}\,d\varphi$$

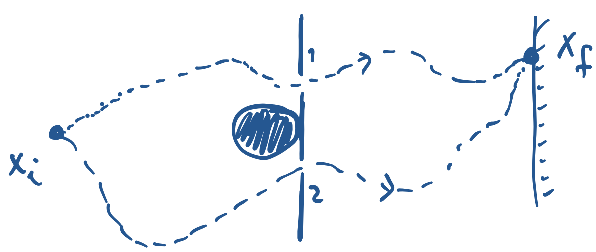
↳ aggiungiamo alla lagrangiana un termine di derivata totale:

$$\mathcal{L}_A = \frac{d}{dt}\left(\bar{x}\cdot\bar{A}\left(-\frac{e}{c}\right)\right) \qquad (\bar{A}\ \text{è cost.})$$

⇒ Le eq. del moto (classiche) non vengono modificate

⇝ classicamente non si osserva alcun effetto al variare di B.

Tuttavia abbiamo aggiunto un nuovo termine in S: come cambia l'integrale sui cammini?



Fra poco vedremo che tale $\mathcal{L}_A$ introduce uno shift nella diff. di fase tra le onde prodotte dalle due fenditure.

$$\Delta\phi_{12}' = \Delta\phi_{12} - \frac{e}{\hbar c}\oint_{\gamma_1-\gamma_2} A = \Delta\phi_{12} - \frac{e\,\Phi_B}{\hbar c}$$

↑ cambia pattern d'interferenza

con $\Phi_B = \oint A$ e $A = \theta\,\frac{\hbar c}{2\pi e}\,d\varphi$

Quindi due diverse connessioni A e A' producono la stessa dinamica se

$$\oint A' = \oint A + \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ A e A' sono equivalenti se $\theta - \theta' = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

Quindi:

- Diverse scelte di A sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$
- Classicamente, tutti i valori di θ danno "la stessa teoria" (cioè danno Lagrangiane equivalenti). Invece quantisticamente, c'è un continuo di "teorie inequivalenti".

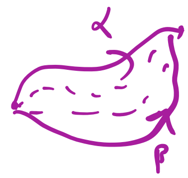
  $\rightarrow$ Abbiamo diverse "teorie" quantistiche corrispondenti a una "teoria" classica (parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$).
  Ovvero, ci sono quantizzazioni inequiv. di una teoria classica quando lo SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI NON è semplicem. connesso ($\pi^1(Q) \neq 0$).

- Accendere B impone una diversa condizione sulla circuitazione di A su una curva che circonda il solenoide.

PI e spazi con $\pi^1(Q) \neq 0$

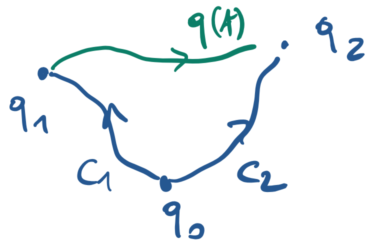
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \underbrace{\int \mathcal{D}q}_{\{\text{tutti i cammini che uniscono } q_1 \text{ con } q_2\}} \; e^{iS/\hbar}$$

Appartengono a classi di omotopia; l'insieme dei cammini da q_1 a q_2 modulo omotopie è in relazione 1 a 1 con $\pi^1(Q)$, anche se non ha struttura di gruppo.



$\alpha \simeq \beta$

L'isomorfismo funziona nel seguente modo. Fissiamo un $q_0 \in Q$:



$$\underbrace{[q]}_{\text{cammino}} \longleftrightarrow \underbrace{[c_2^{-1} \cdot q \cdot c_1]}_{\text{loop}}$$

$[q] \in \Lambda^1_{12}(Q)$, $\quad [c_2^{-1} \cdot q \cdot c_1] \in \pi^1(Q)$

Nota: le classi di omotopia sono insiemi disgiunti di cammini.

Definiamo $$K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \underbrace{\int \mathcal{D}q_\alpha}_{\{\text{Cammini da } q_1 \text{ a } q_2 \text{ nella classe di omotopia corrispondente a } \alpha \in \pi^1(Q)\}} \; e^{iS/\hbar}$$

Possiamo quindi scrivere l'ampiezza come comb. lineare delle K_α

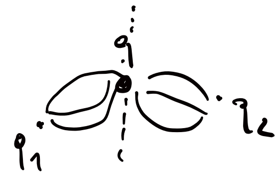
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \sum_{\alpha \in \pi^1(Q)} \chi(\alpha) \cdot K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

$\chi(\alpha)$ scelte in modo che K soddisfi le seguenti probabilità:

1) K non dipende dalla scelta di c_1 e c_2

2) K sia un'ampiezza di probabilità, cioè:

$$K(q_2,q_1;t_2,t_1) = \int\limits_{t_1<t<t_2} dq\, K(q_2, q; t_2, t)\, K(q, q_1; t, t_1)$$



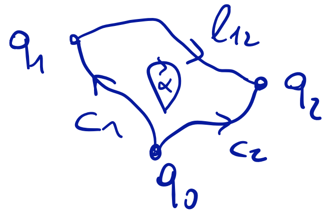
Qto avviene se i pesi soddisfano (*)

- $\chi(\beta \circ \alpha) = \chi(\beta)\, \chi(\alpha)$
- $\chi(\alpha)$ fornisce una RAPPRESENTAZIONE 1dim. UNITARIA del gruppo fondamentale (*)

$$\chi : \pi^1(Q) \to \{e^{i\varphi}\}$$

cioè $|\chi(\alpha)| = 1 \quad \forall \alpha \in \pi^1(Q)$ ← "CARATTERI" di $\pi^1(Q)$

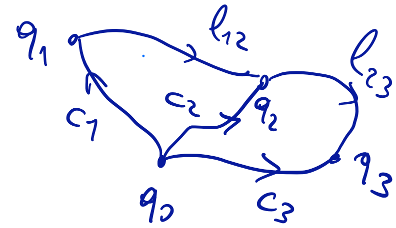
→ Se $\pi^1(Q) \neq 0$ (cioè è un gruppo non-triviale), abbiamo un'ambiguità nell'associare alla teoria classica una teoria quantistica. Qta ambiguità è data dalla scelta del carattere χ.

(*) 

$l_{12} = c_2 \circ \alpha \circ c_1^{-1}$

2)

- Prendiamo α, β, γ tre loops con base pt. q_0 e t.c. $\beta \circ \alpha = \gamma$



- Siano q_1, q_2, q_3 pti di Q allora, scelto un c_3 fisso, ho che $c_3 \circ \gamma \circ c_1^{-1}$ è un cammino da q_1 a q_3.

- Ogni cammino da q_1 a q_3 può essere splittato (mod omotopie) in un cammino da q_1 a q_2 e uno da q_2 a q_3:

$$\underbrace{c_3 \circ \gamma \circ c_1^{-1}}_{q_1 \to q_3} = \underbrace{c_3 \circ \beta \circ c_2^{-1}}_{q_2 \to q_3} \circ \underbrace{c_2 \circ \alpha \circ c_1^{-1}}_{q_1 \to q_2}$$

- Un'ampiezza di probabilità deve soddisfare:

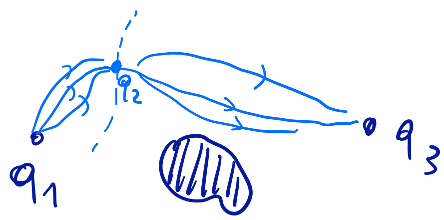
$$K(q_3, q_1; t_3, t_1) = \int dq_2 \, K(q_3, q_2; t_3, t_2) \, K(q_2, q_1; t_2, t_1) \quad (\ddagger)$$

con $t_1 < t_2 < t_3$

Affinché la formula sopra funzioni, bisogna che

$$\sum_{\gamma} \chi(\gamma) K_\gamma(3,1) = \int dq_2 \sum_{\alpha, \beta} \chi(\alpha) \chi(\beta) K_\beta(3,2) K_\alpha(2,1) \quad (*)$$

ma $\quad K_\gamma(3,1) = \int\limits_{\substack{\{\text{cammini da } q_1 \text{ a } q_3 \\ \text{in classe } \gamma\}}} \mathcal{D}q\, e^{iS} = \sum_\alpha \int dq_2 \int\limits_{\substack{\{q_1 \to q_2\} \\ \text{in } \alpha}} \mathcal{D}q\, e^{iS} \int\limits_{\substack{\{q_2 \to q_3\} \\ \text{in } \gamma\circ\alpha^{-1}}} \mathcal{D}q\, e^{iS}$



$$= \sum_\alpha \int dq_2 \; \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\; \chi(\gamma^{-1}\circ\alpha)\, K_{\gamma\circ\alpha^{-1}}(3,2)$$

$$K = \sum_{\gamma,\alpha} \int dq_2 \; \chi(\alpha)\, \chi(\gamma^{-1}\circ\alpha)\; K_\alpha(2,1)\, K_{\gamma^{-1}\circ\alpha}(3,2) \qquad \beta \equiv \gamma\circ\alpha^{-1} \Rightarrow \gamma = \beta\circ\alpha$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \int dq_2 \; \chi(\alpha)\, \chi(\beta)\; K_\alpha(2,1)\, K_\beta(3,2)$$

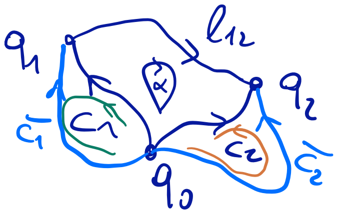
Qto è compatibile con $(\ast)$ se

$$\boxed{\chi(\beta\circ\alpha) = \chi(\beta)\,\chi(\alpha)}$$

1) La definizione di $K(2,1) = \sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)$

Non deve dip dalla scelta dei cammini c_1, c_2

↳ Prendiamo diversi cammini $\bar{c}_1, \bar{c}_2$



Allora si ha:

$$\bar{c}_2 \circ \alpha \circ \bar{c}_1^{-1} = c_2 \circ \underbrace{c_2^{-1} \circ \bar{c}_2}_{\mu} \circ \alpha \circ \underbrace{\bar{c}_1^{-1} \circ c_1}_{\lambda} \circ c_1^{-1}$$

loops con base pt. q_0

$$\underset{\text{calcolato con } \bar{c}_1, \bar{c}_2}{|\bar{K}(2,1)|} \overset{!}{=} \underset{\text{calcolato con } c_1, c_2}{|K(2,1)|}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_\alpha \bar{\chi}(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right| \overset{!}{=} \left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$\left|\sum_\alpha \chi(\mu\cdot\alpha\cdot\lambda)\, K_\alpha(2,1)\right| = \left|\sum_\alpha \chi(\mu)\chi(\lambda)\,\chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$= |\chi(\mu)\chi(\lambda)| \left|\sum_\alpha \chi(\alpha)\, K_\alpha(2,1)\right|$$

$$\Rightarrow |\chi(\mu\circ\lambda)| = 1 \qquad \forall\, \mu, \lambda \in \pi^1(Q)$$

Particelle identiche

- Prendiamo un sistema di 2 particelle IDENTICHE in $\mathbb{R}^d$.
- Lo sp. delle config è

$$Q = \left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\}\right)/\mathbb{Z}_2$$

parametrizzato da $\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mid \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2\}/\sim$

dove $\sim$ è $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \sim (\bar{x}_2, \bar{x}_1)$

- Loop non contraibile a cost:

$(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))$ t.c. $\bar{x}_1(0) = \bar{x}_1^0$ $\quad \bar{x}_2(0) = \bar{x}_2^0$

$\bar{x}_1(1) = \bar{x}_2^0$ $\quad \bar{x}_2(1) = \bar{x}_1^0$

↳ cammino che scambia la posizione delle due particelle; (componendolo con sé stesso otteniamo cammino triviale!

- $\pi_1\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\}\right)/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$

- Caratteri di $\mathbb{Z}_2$ → due possibilità

1) $\chi^B(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$

2) $\chi^F(\alpha) = \begin{cases} 1 & \forall \alpha \text{ che sia scambio pari} \\ -1 & \forall \alpha \text{ " " " dispari} \end{cases}$

$K^B = \sum_\alpha \chi^B(\alpha) K_\alpha \quad \leftrightarrow$ funzioni d'onda simmetriche per scambio di particelle BOSONI

$K^F = \sum_\alpha \chi^F(\alpha) K_\alpha \quad \Leftrightarrow$ " " antisimmetriche " " FERMIONI

CARATTERI di $\pi^1(Q)$ e CONNESSIONI su Q.

Data una connessione $U(1)$ A su Q che sia PIATTA, posso definire su ogni $\alpha \in \pi^1(Q)$

$$\chi(\alpha) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint_{\ell\in[\alpha]} A}$$ ← dip. solo da $[\alpha]$, non da rap. ℓ.

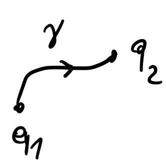
Qta espressione definisce un carattere per $\pi^1(Q)$.

D'altra parte, un carattere di $\pi^1(Q)$ è una mappa che associa a un cammino chiuso un elemento del gruppo $U(1)$. Qto associa una connessione al carattere (trasporto parallelo/olonomia). Siccome il carattere associa lo stesso elem. di $U(1)$ a tutti i cammini nella stessa classe di equiv., la connessione deve essere piatta.

Quando parliamo di CONNESSIONE, intendiamo sempre a meno di 1-forme esatte (o meglio a meno di trasf. di gauge)

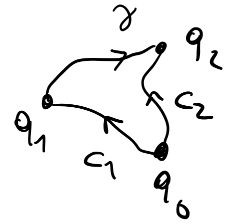
Consideriamo ora l'insieme delle classi di omotopia dei cammini da q_1 a q_2. Introducendo una connessione, possiamo associare ad ogni classe una fase

$$\chi_{12}(\alpha) \equiv e^{i\frac{e}{\hbar c}\int_{\gamma\in\alpha_{12}} A}$$



$\alpha_{12} \longleftrightarrow \alpha \in \pi^1(Q)$

Come si legano χ_{12} e χ ?



$$\rightarrow \quad e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1} A} \chi_{12}(\alpha)\, e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A} = \chi(\alpha)$$

con i cammini c_1 e c_2 fissati.

Possiamo anche scrivere

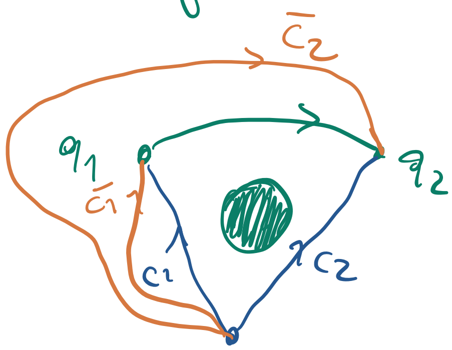
$$\chi_{12}(\alpha) = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{c_2 c_1^{-1}} A} \chi(\alpha)$$

qto è un particolare cammino da q_1 a q_2 che si può sempre scegliere giacere in un aperto semplicemente connesso

$\Downarrow$

Posso prendere A t.c. $\int_{c_2 c_1^{-1}} A = 0$
(A è piatta)

Se scelgo $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ diversi (|Ampl| inv., ma def. di Amp. cambia di una fase)



in modo che $c_2^{-1}\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}c_1$ stia in classe non-triviale

$\Rightarrow$ se $c_2 c_1^{-1}$ sta in aperto sempl. conn, allora $\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}$ non può stare in aperto sempl. connesso

Quindi fissata scelta di A t.c. $\int_{c_2 c_1^{-1}} A = 0$, allora

$\int_{\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}} A \neq 0 \longrightarrow$ la diff. di definizione di K è data

da $\quad e^{i\int_{\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}} A} = e^{i\int_{c_2^{-1}\bar{c}_2\bar{c}_1^{-1}c_1} A} = e^{i\int_{\mu\circ\lambda} A} = \chi(\mu)\chi(\lambda)$

vedi (*) alla fine di lezione precedente

qto che si trova in

P.I. and Θ-term

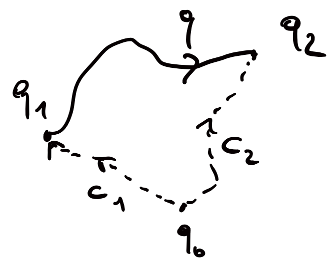
Se sp. Q non-sempl. conn.: 1) aggiungere A (con $B=0$) cambia le predizioni della teoria quant. 2) ambiguità nel def. P.I.

Prendiamo la teoria di partenza e aggiungiamo un termine di derivata totale all'azione. Che legame c'è coi coeff. $\chi(\alpha)$?

$$S_T = \frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\; \dot{q}\cdot \vec{A} = \frac{e}{c}\int_{q_1 \xrightarrow{\gamma} q_2} A$$

A cost.

$$K(q_2,q_1;t_2,t_1) = \int_{\substack{q(t_1)=q_1\\ q(t_2)=q_2}} \mathcal{D}q\; e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_T)} =$$



$$= \sum_\alpha e^{\frac{iS_T}{\hbar}} \int \mathcal{D}q_\alpha\, e^{iS/\hbar}$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{q\in\alpha} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2\alpha c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\alpha} A}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_{c_2} A + \int_{c_1^{-1}} A\right)}}_{\text{fase irrilevante}} \sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha(q_2,q_1) \quad !$$

fase irrilevante ← presente anche se sp. è sempl. connesso (può essere messo a zero con una trasf. di gauge)

Per calcolare l'ampiezza, uno si deve calcolare i singoli K_α, che sono definiti da P.I. standard.

In situazione semiclassica $(\hbar \to 0)$ K_α è ben approssimato da $e^{iS[\varphi_{cl}]}(\det \Delta)^a$ ← integrale Gaussiano

difficile approssimare K_α
⇑
non è tipica prescrit. class.

Tipicamente le classi α non contengono soluzioni classiche. Tuttavia, se passiamo all'Euclideo $S \to S_E$ $\quad \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS} \to \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S_E}$

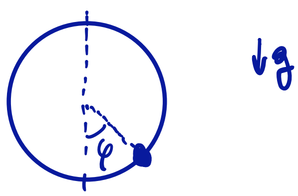
→ S_E ammette soluzioni alle sue eq. di Lagrange nelle classi di omotopia α, chiamate ISTANTONI

$$K_\alpha^E \sim e^{-S_E(\varphi_{ist})}(\det \Delta)^a$$

$\downarrow$ CONTINUAZIONE ANALITICA

$K_\alpha^{Mink.}$

PENDOLO



$Q = S^1$ ← circonferenza

$\pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$

↓

Ci aspettiamo quantizzazioni inequivalenti, parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \qquad V(\varphi) = b(1 - \cos\varphi) \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Termine topologico (⇝ interazione con un potenziale vettore)

$$L_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{(derivata totale)}$$

↓

$$S_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \int dt \, \frac{d\varphi}{dt} = \theta \hbar \, \underbrace{W[\varphi]}_{\text{winding number} \in \mathbb{Z}}$$

Assumendo che $\varphi \to 0$ per $t \to \pm\infty$

Istantoni per il pendolo: $\qquad t \to i\tau \qquad iS \to -S_E$

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + b(1 - \cos\varphi) \right]$$

Eq. del moto $\to$ eq. di Lagr. associate a S_E, cioè le soluz. sono t.c. $\delta S_E = 0$.

Sol.: $\varphi_{ist.}(\tau) = \pm 4 \operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt{b}(\tau - \tau_0)} \right)$

per $\tau \to -\infty \qquad \varphi \to 0$

per $\tau \to +\infty \qquad \varphi \to 2\pi$

$W(\varphi) = 1$

- $S_E(\varphi_{ist.})$ è finita
- $\varphi_{ist.}$ non può essere deformata in maniera continua alla soluz. "di vuoto", cioè $\varphi_0(\tau) = \varphi_{cost}$
- Esistono soluz. con $W(\varphi) \neq 1$, ce ne è una in ogni classe di omotopia, $\varphi^\alpha_{ist.}$

$\cdot \quad K_\alpha \sim e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \cdot \det_\alpha(\cdots)^{-1/2}$

$$K = \sum_\alpha \underbrace{\chi(\alpha)\, e^{-S_E^{(0)}(\varphi^\alpha_{ist.})}}_{e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})}} \cdot \det_\alpha(\cdots)^{-1/2}$$

$e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \sim e^{-n(\cdots)}$

$[\alpha] \sim n$

$\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}$

contributo di K_α diminuisce all'aumentare di n

CARATTERE di un gruppo

- Sia G un gruppo ABELIANO.

  Un CARATTERE di G è una mappa
  $$\chi : G \to \mathbb{C}^*$$
  che è un GROUP HOMOMORPHISM, cioè
  $$\chi(g_1 \cdot g_2) = \chi(g_1)\,\chi(g_2) \qquad g_1, g_2 \in G$$

  $\to$ qta è una RAPPRESENTAZIONE 1dim. di G

  Se richiedo che rep. sia UNITARIA $\left(\chi(g^{-1}) = \chi(g)^* \Rightarrow |\chi(g)|^2 = 1 \right)$:
  $$\chi : G \to U(1)$$

- Ogni carattere χ è costante sotto coniugazione:
  $$\chi(h^{-1} g h) = \frac{1}{\chi(h)}\,\chi(g)\,\chi(h) = \chi(g)$$

- Un GRUPPO FINITO di ordine n ha n caratteri distinti $\chi_1, \dots, \chi_n$. χ_1 è la rep. triviale $\chi_1(g) = 1 \ \forall g \in G$.

  χ_1 è chiamato PRINCIPAL CHARACTER.

- Se G è ABELIANO, l'insieme dei caratteri forma un gruppo. La molt. è def. da
  $$\chi_1 \cdot \chi_2 : g \mapsto \chi_1(g)\,\chi_2(g) \quad \to \text{"CHARACTER GROUP"}$$

Es. $G = (\mathbb{Z}, +)$, $\chi(n) = e^{2\pi i n}$:

$$\chi(0) = 1 \quad (\text{Id.}) \quad ; \quad \chi(n+m) = e^{2\pi i (n+m)} = \chi(n)\,\chi(m)$$

Nota: Gruppi semplici

→ Se G è un gruppo SEMPLICE, l'unica rappresentazione 1 dim. è il SINGOLETTO.

Dim.

Dimostriamo che i generatori di G sono rap. in $V_R = \mathbb{C}$ solo da 0 (sappiamo che dovessero così perché t^a saranno matrici 1×1 traceless). t^a sono matrici 1×1:

$$0 = [t^a, t^b] = f^{abc} t^c$$

$\Rightarrow$ $t^c = 0$ se $f^{abc} \neq 0$ per almeno una coppia (a,b).

Se $\exists\, t^c$ t.c. $f^{abc} = 0 \ \forall (a,b)$, allora $G = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{generato da } t^c}}{U(1)} \times G'$

↳ infatti in qto caso

$$[t^c, t^s] = i f^{csr} t^r = 0 \quad \forall s = 1, \dots, \dim G.$$

//

Qto ci dice che il gruppo dei caratteri di un gruppo semplice è banale.

Nota. Gruppo finito

Dato un gruppo finito di ordine K, si ha che $g^K = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $\chi(g)^K = 1$ → immagine dei caratteri è $\mathbb{Z}_K$ (radici K-esime dell'unità)

Es. $S_3 = \{\text{permutaz. di 3 elem.}\} = \{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{id.}}}{123}, 132, 213, 231, 312, 321\}$

$\chi : S_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6$

132 213

312 231

Ma in realtà χ mappa in $\mathbb{Z}_2$:

$\chi(123) = 1$

$\chi(132)^2 = 1$

$\chi(213)^2 = 1$

$\chi(321)^2 = 1$

$\chi(231)^2 = \chi(312)$

$\chi(312)^2 = \chi(231)$

Inoltre $\chi(132)\,\chi(213) = \chi(312) = \chi(231)$

$\Rightarrow \chi(312) = \chi(231) = 1$ $\longrightarrow$ perm. cicliche vengono mandate in 1

perm. odd vengono mandate o tutte in 1 o tutte in -1

($\chi(132)\cdot\chi(213) = \chi(312) = 1 \Rightarrow \chi(132)$ e $\chi(213)$ hanno stesso segno.)

Ho due χ : χ_0 e χ_1

$\chi_0 : (ijk) \longrightarrow 1 \quad \forall\, (ijk)$

$$\chi_1 : (ijk) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{S}_3 = \mathbb{Z}_2$